

### Ταξινόμηση στοχ. διαδικασιών

1. Οι στοχαστικές διαδικασίες μπορούν να ταξινομηθούν με διάφορους τρόπους. Ένας τρόπος είναι η ταξινόμησή τους βάσει του διανυσματικού χώρου στον οποίο ανήκουν οι τροχιές τους.

2. Τροχιά μιας σ.δ. είναι η ακόλουθη συνάρτηση

$$x_t(\omega) : [0, T] \rightarrow R,$$

για ένα συγκεκριμένο  $\omega \in \Omega$  ή πιο συγκεκριμένα για κάθε  $A \in \mathcal{F}$ , αν το σύνολο-χρόνος είναι το  $[0, T]$ , τ.ω.  $\omega \in A$ .

3. Μια σ.δ. με συνεχείς τροχιές στο  $[0, T]$  είναι για παράδειγμα η μονοδιάστατη κίνηση Brown.
4. Μια διήθηση  $F$  είναι μια οικογένεια  $\sigma$ -αλγεβρών  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  του  $\Omega$ , όπου το σύνολο  $\mathcal{T}$  είναι το ολικά διατεταγμένο σύνολο που ονομάζουμε χρόνο ή χώρο.
5. Για τις  $\sigma$ -άλγεβρες μιας διήθησης όπου π.χ. ο χρόνος είναι το  $[0, T]$  ισχύει ότι αν  $t > s, t, s \in [0, T], \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ , δηλαδή κάθε σύνολο της  $\mathcal{F}_s$  είναι και σύνολο της  $\mathcal{F}_t$ .
6. Μια  $\sigma$ -άλγεβρα δεν είναι απαραίτητο να περιέχει τα μονοσύνολο  $\{\omega\}, \omega \in \Omega$ .
7. Μια άλλη ταξινόμηση των σ.δ. είναι εκείνη που μελετά την κλάση των σ.δ. με ίδιο σύνολο χώρου-χρόνου με την ίδια ολική διάταξη.
8. Επιπλέον κάθε σ.δ. τ.ω. οι τυχαίες μεταβλητές  $x_t : \mathcal{F}_t \rightarrow R$  και κάθε  $\mathcal{F}_t$  ανήκει στην διήθηση  $F$ , ονομάζεται  $F$ -προσαρμοσμένη.
9. Μια διήθηση περιγράφει τη ροή της πληροφορίας μέσα στο χώρο-χρόνο, η οποία αυξάνει.
10. Μια άλλη ταξινόμηση αφορά στα είδη στασιμότητας μιας σ.δ. Για παράδειγμα η μονοδιάστατη κίνηση Brown έχει προσαυξήσεις που ακολουθούν την κανονική κατανομή.
11. Αν π.χ. οι προσαυξήσεις μιας σ.δ. συνεχούς χρόνου ακολουθούν μια κατανομή  $D$  αυτή η κλάση-οικογένεια σ.δ. αποτελεί ξεχωριστή κλάση σ.δ.
12. Ο χώρος πιθανότητας ως προς τον οποίο με το σύνολο χώρου-χρόνου μιας σ.δ.  $T$  και τη διήθηση ως προς την οποία μια σ.δ. είναι  $F$ -προσαρμοσμένη.
13. Για παράδειγμα, αν ο χρόνος είναι το  $[0, T]$ , τότε ο χώρος πιθανότητας ορίζεται να είναι συνήθως ο  $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ .
14. Να ορίσετε μια σ.δ. με προσαυξήσεις Pareto και σύνολο χρόνου  $[0, T]$ .
15. Να ορίσετε μια σ.δ. με προσαυξήσεις κατανομές με ελαφριά ουρά και σύνολο χρόνου το  $[0, T]$ .