Εν. Καλλιγέρη

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ορισμός (ακολουθίας)

Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε συνάρτηση $a: N \to R$ με πεδίο ορισμού το σύνολο N των φυσικών αριθμών και τιμές στους πραγματικούς αριθμούς.

Συμβολισμός: (a_n) ή $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ή $\{a_n\}$

π.χ.

- $a_n = n$, $n \in N$:

$$\{a_n\} = \{\underset{a_1}{1}, \underset{a_2}{2}, \underset{a_3}{3}, \underset{a_4}{4}, \dots\}$$

- $a_n = c$, $n \in N$, $c \in R$:

$$\{a_n\} = \{c, c, c, \dots\}$$

σταθερή ακολουθία

- $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$:

$$\{a_n\} = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$$

- Έστω $a_1 = 1$. Η ακολουθία $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ ονομάζεται αναδρομική

$$\{a_{n+1}\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{1+a_1}, \sqrt{1+a_2}, \dots\}$$

<u>Ορισμός</u> (όριο ακολουθίας, σελ. 289, ψηφιακές σημειώσεις

\# Ν.δ.ο $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \neq 0.$

<u>Λύση</u>

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in \mathbb{N})(\forall n\in \mathbb{N})\left(n\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon\right).$$

από ορισμό σύγκλισης ακολουθίας (ορίου)

Ισοδύναμα

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in \mathbb{N})(\forall n\in \mathbb{N})\left(n\geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon\right).$$

Για να έχουμε λοιπόν σύγκλιση στο 0 θα πρέπει να ισχύει το παραπάνω.

Έστω λοιπόν $\varepsilon>0$. Αναζητούμε $n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. για όλους τους φυσικούς αριθμούς $n\geq n_0$ να ισχύει ότι $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

Από Αρχιμήδεια Ιδιότητα (Λήμμα 3.1, σελ. 27) γνωρίζουμε ότι για δοθέν $\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω.

$$\frac{1}{n_0}<\varepsilon.$$

αφού $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$,

$$\frac{1}{n} < \varepsilon. \quad (\text{από μεταβατικότητα της διάταξης } "<")$$

Άρα,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \neq 0$$

$\square$

Υπενθύμιση!

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Ν.δ.ο. η ακολουθία

$$a_n = \frac{n}{3^n}, \; n \in \mathbb{N}$$

είναι φραγμένη.

Λύση

Από την ανισότητα Bernoulli (σελ. 38, Πρόταση 36) λαμβάνουμε

$$3^n = (1+2)^n \geq 1 + n \cdot 2 \geq 2n$$

Άρα

$$3^n \geq 2n \iff \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2n} \iff \frac{n}{3^n} < \frac{1}{2} \quad \square$$

Ν.δ.ο. η ακολουθία

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad n \in N$$

είναι φραγμένη.

<u>Λύση</u>

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n.$$

Άρα,

$$n! \leq n^n \Leftrightarrow \frac{n!}{n^n} \in (0, 1), \; \forall n \in N.$$

Ν.δ.ο. η ακολουθία

$$a_n = \frac{\cos n + n \sin n}{n^2}, \quad n \in N$$

είναι φραγμένη.

<u>Λύση</u>

$$a_n = \frac{1 \cdot \cos n + n \cdot \sin n}{n^2}$$

Άρα

$$|a_n| = \frac{|1 \cdot \cos n + n \sin n|}{n^2} \leq \frac{1 \cdot |\cos n| + n |\sin n|}{n^2}$$

$$\leq \frac{1+n}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2$$

Άρα,

$$|a_n| \leq 2, \; \forall n \in N \qquad \square.$$

Ν.δ.ο η ακολουθία

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ και } a_1 = \sqrt{2}$$

είναι φραγμένη.

<u>Λύση</u>

Έχουμε τα εξής

$$a_1 = \underline{\sqrt{2} < 2}$$

$$a_2 = \sqrt{2+a_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \underline{\sqrt{2+2} = 2}$$

Αν υποθέσουμε ότι

$$a_n < 2$$

τότε

$$2 + a_n < 4$$

και έτσι

$$\sqrt{2+a_n} < \underline{\sqrt{4} = 2.}$$

Άρα

$$a_{n+1} < 2$$

$\square$.

Υπενθύμιση

- Αριθμητικός Μέσος (Arithmetic Mean)

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

- Γεωμετρικός Μέσος (Geometic Mean)

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

- Αρμονικός Μέσος (Harmonic Mean)

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Γενικά:

$$HM \leq GM \leq AM$$

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

α) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+n+n^2)^{1/n} = 1$

β) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n+3^n)^{1/n} = 3$

γ) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

<u>Λύση</u>

α) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+n+n^2)^{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln(1+n+n^2)^{1/n}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(1+n+n^2)} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+n+n^2)}{n}} \quad (*)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n+n^2)}{n} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\overset{\text{Θ. De l'Hospital}}{=}} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+2n}{1+n+n^2}}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+2n}{1+n+n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = 0$$

Άρα,

$$(*) = e^0 = 1$$

β) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n+3^n)^{1/n} = 3$

$$\underbrace{(3^n)^{1/n}}_{3} \le (2^n+3^n)^{1/n} \le (3^n+3^n)^{1/n} = (2\cdot 3^n)^{1/n} = 2^{1/n}\cdot 3$$

Άρα,

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} 3}_{=\,3} \le \lim_{n\to+\infty} (2^n+3^n)^{1/n} \le \lim_{n\to+\infty} (2^{1/n}\cdot 3) = 2^0\cdot 3 = 3$$

Από κριτήριο Παρεμβολής

$$\lim_{n\to+\infty} (2^n+3^n)^{1/n} = 3$$

γ) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\overset{\text{De L'Hospital}}{=\!=\!=\!=}} \lim_{n\to+\infty} \frac{1/n}{1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

[Πρώτα θέτουμε $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Έπειτα εφαρμόζουμε Θ. De L'Hospital και αφού καταλήξουμε σε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ τότε γράφουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$.]

Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι ακολουθίες

α) $\dfrac{n}{2^n}$, β) $\dfrac{2^n}{n^2}$, γ) $\dfrac{n!}{n^n}$

<u>Λύση</u>

α) Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 229, σελ. 317

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{\frac{n+1}{\cancel{2^n}\cdot 2}}{\frac{n}{\cancel{2^n}}} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow a_{n+1} \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα η a_n είναι φθίνουσα.

Επιπλέον,

$$a_n = \frac{n}{2^n} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή η a_n είναι κάτω φραγμένη και μάλιστα το 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα ($\inf a_n = 0$)

Επειδή η a_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, είναι συγκλίνουσα και

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf a_n = 0$$

□

$$/\ 0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} \leq 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{1}{n}$$

$$\underset{=1}{\frac{n}{n}} \quad \underset{\leq 1}{\frac{n-1}{n}} \quad \underset{\leq 1}{\frac{n-2}{n}}$$

Άρα

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} 0}_{=0} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} \leq \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}}_{=0}$$

Από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

β) Θέτουμε

$$f(x) = \frac{2^x}{x^2}, \quad x > 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\overset{DHL}{=}} \frac{2^x \ln 2}{2x} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\overset{DHL}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \ln 2 \ln 2}{2} = +\infty$$

Άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^2} = +\infty.$$

Άρα η ακολουθία <u>δεν</u> είναι συγκλίνουσα

Μελετήστε την ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$0 < a_1 < 1$$

και

$$a_{\nu+1} = 1-\sqrt{1-a_\nu}\ .$$

Λύση

Για $\nu=1$: $a_2 = 1-\sqrt{1-a_1}$

Για $\nu=2$: $a_3 = 1-\sqrt{1-a_2} = 1-\sqrt{1-1+\sqrt{1-a_1}} = 1-\sqrt{\sqrt{1-a_1}}$

Για $\nu=3$: $a_4 = 1-\sqrt{1-a_3} = 1-\sqrt{1-1+\sqrt{\sqrt{1-a_1}}} = 1-\sqrt{\sqrt{\sqrt{1-a_1}}}$

$\vdots$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η a_ν είναι φθίνουσα και έτσι

$$a_{\nu+1} = 1-(1-a_1)^\nu$$

και

$$a_\nu = 1-(1-a_1)^{\nu-1} \Rightarrow a_{\nu+1} < a_\nu,\ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Επιπλέον η a_ν είναι κάτω φραγμένη:

$$0 < a_1 < 1 \Rightarrow$$

$$0 < 1-a_1 < 1 \Rightarrow$$

$$0 < (1-a_1)^{\nu-1} < 1 \Rightarrow$$

$$0 < 1-(1-a_1)^{n-1} < 1 \Rightarrow$$

$$0 < a_n < 1$$

Αφού η a_n φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε η a_n είναι συγκλίνουσα

Άρα,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lambda$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\sqrt{1-a_n}\right) \Rightarrow$$

$$\lambda = 1-\sqrt{1-\lambda} \Rightarrow$$

$$1-\lambda = \sqrt{1-\lambda} \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)^2 = 1-\lambda \Rightarrow$$

$$1-2\lambda+\lambda^2 = 1-\lambda \Rightarrow$$

$$\lambda^2-\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 = \lambda \Rightarrow$$

$$\lambda(\lambda-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1.$$

Επειδή $a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και φθίνουσα, η $\lambda = 1$ απορρίπτεται.

Άρα

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών:

α) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

β) $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

γ) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}\,\sin(n!\,e^n)}{n+1}$

<u>Λύση</u>

α) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \xrightarrow{\text{Πολ/ζω και διαιρώ με τον συζυγή}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0 \quad \left(\frac{1}{+\infty}\right)$$

β) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln(n+1) - \ln n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$$

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\,\sin(n!e^n)}{n+1}$

$$-1 \le \sin(n!e^n) \le 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{n}}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}\,\sin(n!e^n)}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to+\infty} -\frac{\sqrt{n}}{n+1}}_{=0} \le \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\,\sin(n!e^n)}{n+1} \le \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}}_{=0}$$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim \frac{1}{n^{1/2}(1+\frac{1}{n})} = 0 \right)$$

Άρα, από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\,\sin(n!e^n)}{n+1} = 0$$

__Σχόλιο__

Το κριτήριο παρεμβολής χρησιμοποιείται συχνά σε ακολουθίες που περιέχουν sin και cos καθώς

$$-1 \le \sin \ \text{και} \ \cos \le 1$$

$\square$

Έστω $a > 1$, πραγματικός αριθμός.

Να δειχθεί ότι

$$(1+x)^a \geq 1 + a \cdot x \ , \ \forall x > -1$$

Λύση

Αν είχαμε $a \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ..\}$ η απόδειξη θα μπορούσε να γίνει με τη μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής.

Εδώ όμως $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Άρα,

Θέτουμε

$$f(x) = (1+x)^a \ , \ x > -1$$

Θ.δ.ο. η f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1}$$

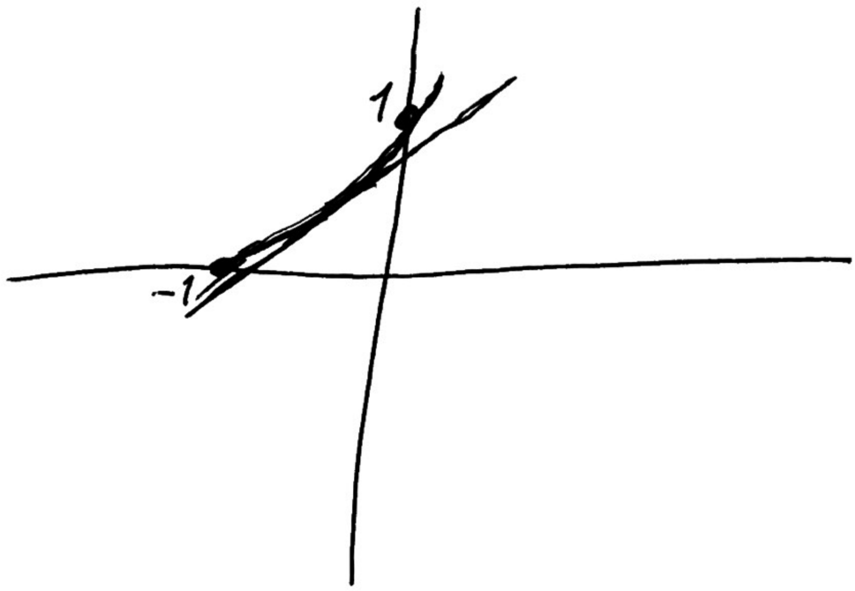
$$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$$

Επειδή $a > 1$ και $x \in (-1, +\infty) \Rightarrow f''(x) > 0, \forall x \in (-1, +\infty)$.

Δηλαδή η f είναι κυρτή ($f \cup$)

πειδή η f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$ ισχύει ότι:

$f(x) \geq$ εξίσωσης εφαπτομένης στο $(0,1)$



Εξίσωση εφαπτομένης στο $(\overset{x_1}{0}, \overset{y_1}{1})$

$$y - \underset{1}{y_1} = \lambda(x - \underset{0}{x_1})$$

$$\Rightarrow y - 1 = \lambda(x - 0)$$

$$\Rightarrow \varepsilon: y = \lambda x + 1 = \alpha x + 1$$

Άρα $f(x) \geq \varepsilon \Rightarrow$

$$(1+x)^a \geq 1 + x \cdot a, \ \forall x > -1$$

∎