Τρίτο Φυλλάδιο Εργασίας
Απειροστικός Λογισμός Ι
Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

Πρώτο Θέμα

Υπολογίστε τα ορισμένα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων στο διάστημα που ορίζονται

$$(i)\ \ f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2|x|, & \text{όταν } x \in [-3, 2] \\ 2x^2 - 2x + 12, & \text{όταν } x \in (2, 3] \end{cases}$$

$$(ii)\ \ f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{όταν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$(iii)\ \ f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } 0 \leq x < 1 \\ (x-2)^2, & \text{όταν } 2 \geq x \geq 1 \end{cases}$$

Σημειώστε την ιδιότητα $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ όταν $c \in (a, b)$.

Δεύτερο Θέμα

Αν $a > 0$ αποδείξτε ότι

$$\int_{-a}^{a} e^{-t^2} \cos t dt = 2 \int_0^a e^{-t^2} \cos t dt \quad \text{και} \quad \int_{-a}^{a} e^{-t^2} \sin t dt = 0$$

Χρησιμοποιήστε κατάλληλα την ιδιότητα $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Τρίτο Θέμα

(*i*) Σχεδιάστε (με το Geogebra) τις συναρτήσεις $f(x) = x^3$, $g(x) = -x$ και $h(x) = 1$ και υπολογίστε το εμβαδό που σχηματίζεται μεταξύ τους.

(*ii*) Σχεδιάστε (με το Geogebra) τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ και υπολογίστε το εμβαδό που σχηματίζεται μεταξύ τους.

(*iii*) Σχεδιάστε (με το Geogebra) τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = 1$ και υπολογίστε το εμβαδό που σχηματίζεται μεταξύ τους μέχρι την κάθετο $x = 4$.

(*iv*) Σχεδιάστε (με το Geogebra) τις συναρτήσεις $f(x) = \cos(x)$ και $g(x) = \sin(x)$ και υπολογίστε το εμβαδό που σχηματίζεται μεταξύ τους και μεταξύ των καθέτων $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{4}$.

(*v*) Σχεδιάστε (με το Geogebra) τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{-x}$ και $g(x) = -\sqrt{-x}$ και $h(x) = x + 6$ και υπολογίστε το εμβαδό που σχηματίζεται μεταξύ τους.

(*vi*) Σχεδιάστε (με το Geogebra) τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x$ και υπολογίστε το εμβαδό που σχηματίζεται μεταξύ τους.

Τέταρτο Θέμα

(i) Σχεδιάστε την έλλειψη $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=2$ στο Geogebra. Στην συνέχεια υπολογίστε το μήκος της περιφέρειας με χρήση κατάλληλου ορισμένου ολοκληρώματος.

(ii) Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $y=\ln x$ μεταξύ των καθέτων $x=\sqrt{3}$ και $\sqrt{8}$.

Πέμπτο Θέμα

Δίνονται οι παρακάτω ακολουθίες a_n. Υπολογίστε το όριο, αν υπάρχει, των ακολουθιών a_n και $\frac{1}{a_n}$

(i) $a_n = 1-\frac{1}{10^n}$, $(0.9, 0.99, 0.999\cdots)$

(ii) $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $a\in\mathbb{R}$ (δοκιμάστε κριτήριο λόγου)

(iii) $a_n = \frac{a^n}{n^n}$, $a\in\mathbb{R}$ (δοκιμάστε κριτήριο νιοστής ρίζας)

(iv) $a_n = \frac{n^k}{2^n}$, $k\in\mathbb{N}$ (δοκιμάστε και τα δυο κριτήρια)

(v) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ (δοκιμάστε κριτήριο λόγου και το γεγονός ότι $(1+\frac{k}{n})^n\to e^k$ για $k\in\mathbb{R}$)

(vi) $a_n = \frac{n}{e^n}$ (δουλέψτε στην αντίστοιχη συνάρτηση, όπου n το x δηλαδή)

(vii) $a_n = \frac{\ln n}{n}$ (παρομοίως)

(viii) $a_n = \frac{4n+5}{n^3-2n+3}$ (παρομοίως)

(ix) $a_n = (-1)^n\frac{n^n}{n!}$ (δοκιμάστε κριτήριο λόγου)

(x) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$ (εργαστείτε στην αντίστοιχη συνάρτηση)

Έκτο Θέμα

Υπολογίστε το όριο των ακολουθιών

(i) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ (Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $f(n)^{g(n)} = e^{g(n)\ln f(n)}$)

(ii) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ (παρομοίως)

(iii) $a_n = nr^n$, $|r|<1$ (δοκιμάστε κριτήριο νιοστής ρίζας)

Έβδομο Θέμα

Εξετάστε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω ακολουθίες

(i) $a_n = \frac{2n}{3n+1}$

(ii) $a_n = \frac{3^n}{1+3^n}$

(iii) $a_n = \frac{n!}{2^n}$

(iv) $a_n = \frac{n}{2^n}$

(v) $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$

Εργαστείτε στον λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ και αποδείξτε ότι είναι μικρότερος της μονάδας για φθίνουσα, μεγαλύτερος της μονάδας για αύξουσα. Παρόμοια, δοκιμάστε την διαφορά $a_{n+1} - a_n$. Δοκιμάστε επίσης να εργαστείτε στην αντίστοιχη συνάρτηση (σε μερικές περιπτώσεις είναι βολικό).

Όγδοο Θέμα

Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών

(i) $a_n = \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$

(ii) $\sqrt[n]{\frac{n!}{5\cdot 9\cdots(4n+1)}}$

χρησιμοποιώντας τον αριθμητικό και γεωμετρικό μέσο αντίστοιχα.

Ένατο Θέμα

Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω αναδρομικές ακολουθίες

(i) $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n}a_n$, $a_1 = 1$

(ii) $a_{n+1} = 3a_n + 4$, $a_1 = 1$

(iii) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$, $a_1 = 2$

(iv) $a_{n+1} = \frac{a_n+2}{a_n+3}$, $a_1 = 1$

Δέκατο Θέμα

Αναπτύξτε σε Taylor τις παρακάτω συναρτήσεις γύρω από το 0, δηλαδή $x_0 = 0$,

(i) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$, μέχρι την τέταρτη παράγωγο (τι παρατηρείτε;)

(ii) $f(x) = \sin x$, μέχρι την τρίτη παράγωγο

(iii) $f(x) = \cos x$, παρομοίως

(iv) $f(x) = \tan x$, παρομοίως

(v) $f(x) = \ln(1+x)$, παρομοίως

(vi) $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$

Στη συνέχεια υπολογίστε τη τιμή της $f(x)$ στο $x = 1/3$ με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων. Περιγράψτε πως αυτό μπορεί να γίνει.

Ενδέκατο Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (\sqrt{2})^x - x$. Προσεγγίστε το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος με την μέθοδο του Νεύτωνα με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Για να υπολογίσετε μια καλή αρχική τιμή εφαρμόστε την μέθοδο της διχοτόμησης.

Δωδέκατο Θέμα

Μπορείτε να σχεδιάσετε την παρακάτω συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x e^{-\frac{(t-2)^2}{8}} dt$$

χρησιμοποιώντας το Geogebra;