Άσκηση

Αποδείξτε επαγωγικά ότι $\forall n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$, ισχύει:

$$1+4+7+\dots+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

ΛΥΣΗ

• Η πρόταση $P(1)$ ισχύει επειδή:

$$1 = \frac{1(3\cdot 1-1)}{2}$$

• Έστω ότι ισχύει η πρόταση $P(n)$, δηλαδή ότι:

$$1+4+7+\dots+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2} \quad (1)$$

• Πρέπει να δείξουμε την $P(n+1)$, δηλαδή ότι:

$$1+4+7+\dots+(3n-2)+[3(n+1)-2] = \frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2}$$

$$\frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2} = \frac{3(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{3(n^2+2n+1)-(n+1)}{2}$$

$$= \frac{3n^2+6n+3-n-1}{2} = \frac{(3n^2-n)+(6n+2)}{2} =$$

Θέλουμε να εμφανίσουμε $\frac{n(3n-1)}{2}$ από τη σχέση 1

$$= \frac{3n^2-n}{2} + \frac{6n+2}{2} = \frac{n(3n-1)}{2} + \frac{\cancel{2}(3n+1)}{\cancel{2}}$$

$$\overset{(1)}{=} \overbrace{1+4+7+\dots+(3n-2)} + 3n+1$$

$$= 1+4+7+\dots+(3n-2)+3n+3-2 = 1+4+7+\dots+(3n-2)+[3(n+1)-2]$$

Άσκηση

Αποδείξτε επαγωγικά ότι για κάθε $n>1$, $n\in\mathbb{N}$ $n! < n^n$

ΛΥΣΗ

• Για $n=2$ $(n>1)$ ισχύει, αφού $2! < 2^2 \Leftrightarrow 1\cdot 2 < 4 \Leftrightarrow 2<4$

• Έστω ότι ισχύει για $n=k$, οπότε $k! < k^k$

• Θα αποδείξω ότι ισχύει για $n=k+1$, οπότε θα δείξω ότι:
$(k+1)! < (k+1)^{k+1}$

$k\in\mathbb{N} \Rightarrow k<k+1 \Rightarrow k^k < (k+1)^k$

$$\xrightarrow[(k+1)]{\text{πολ/ζω με}} \boxed{(k+1)\,k^k < (k+1)(k+1)^k} \quad (1)$$

Από υπόθεση $k! < k^k \underset{\text{πολ/ζω με } (k+1)}{\Rightarrow} (k+1)\cdot k! < (k+1)\,k^k \overset{\text{από σχέση (1)}}{<} (k+1)(k+1)^k$

Άρα $(k+1)\,k! < (k+1)(k+1)^k$

$(k+1)! < (k+1)^{k+1}$

$1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k = k!$

$\underbrace{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}_{k!}(k+1) = (k+1)!$

ή

$k!\,(k+1) = (k+1)!$

Άσκηση

Με βάση την τριγωνική ανισότητα, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει ότι $|x+y| \leq |x|+|y|$.
Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n>2$,

$$|x_1+x_2+\dots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$$

ΛΥΣΗ

• Για $n=2$ ισχύει εφόσον $|x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2|$ (από τριγωνική ανισότητα)

• Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n=k$, δηλαδή,

$$|x_1+x_2+\dots+x_k| \leq |x_1|+|x_2|+\dots+|x_k|$$

• Θα δείξω ότι ισχύει για $n=k+1$, δηλαδή

$$|x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}| \leq |x_1|+|x_2|+\dots+|x_k|+|x_{k+1}|$$

$$\begin{aligned} |x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}| &= |(x_1+x_2+\dots+x_k)+x_{k+1}| \\ &\leq |x_1+x_2+\dots+x_k|+|x_{k+1}| \\ &\leq |x_1|+|x_2|+\dots+|x_k|+|x_{k+1}| \end{aligned}$$

Άσκηση

Αποδείξτε ότι για όλους τους ακέραιους $n \geq 1$,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

ΛΥΣΗ

- Για $n=1$ ισχύει, αφού $1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$

- Έστω ότι ισχύει για $n=k$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 \quad (1)$$

- Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$, δηλ:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

Έχουμε:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3}_{\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2} + (k+1)^3 \overset{\text{από}}{\underset{\text{σχέση (1)}}{=}} \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2\left[k^2 + 4(k+1)\right]}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

Άσκηση

Αποδείξτε ότι εάν $x \neq 1$, τότε για κάθε $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1}$$

ΛΥΣΗ

- Για $n=0$ ισχύει, αφού $x^0 = \frac{x^{0+1} - 1}{x-1} \Rightarrow 1 = \frac{x-1}{x-1}$, ισχύει

- Έστω ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή ότι ισχύει:

$$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1} - 1}{x-1} \qquad (1)$$

- Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$. Πράγματι

$$\sum_{i=0}^{k+1} x^i = \sum_{i=0}^{k} x^i + x^{k+1} \overset{(1)}{=} \frac{x^{k+1} - 1}{x-1} + x^{k+1}$$

$$= \frac{x^{k+1} - 1 + x^{k+1}(x-1)}{x-1} = \frac{\cancel{x^{k+1}} - 1 + x \cdot x^{k+1} - \cancel{x^{k+1}}}{x-1}$$

$$= \frac{x^{k+2} - 1}{x-1}$$

Άσκηση

Έστω f_n, $n \geq 1$ οι αριθμοί της ακολουθίας Fibonacci, οι οποίοι ορίζονται αναδρομικά ως ακολούθως:

$f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, για $n \geq 2$.

Να δείξετε επαγωγικά ότι:

$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$, για όλα τα $n \geq 1$.

ΛΥΣΗ

Για την ακολουθία Fibonacci ισχύει ότι:

$f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = f_1 + f_0 = 1$, $f_3 = f_2 + f_1 = 2, \dots$

- Για $n = 1$, ισχύει αφού έχουμε: $f_1 = f_{1+2} - 1$

$$f_1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$$, ισχύει.

- Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = f_{k+2} - 1 \quad (1)$$

- Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$:

Στη σχέση (1) προσθέτω και στα 2 μέλη f_{k+1} και έχουμε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k + f_{k+1} = f_{k+2} - 1 + f_{k+1}$$

$$= (f_{k+2} + f_{k+1}) - 1 = f_{k+3} - 1$$

Άσκηση

Αποδείξτε επαγωγικά τη γενίκευση του νόμου του De Morgan για την ένωση συνόλων:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}.$$

Υπενθύμιση: • Νόμος De Morgan: Έχουμε πράξεις τομής και ένωσης μεταξύ γεγονότων και των συμπληρωματικών τους.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

• Ο νόμος De Morgan μπορεί να επεκταθεί για περισσότερα από 2 γεγονότα:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$$

ΛΥΣΗ

- Για $n=1$ έχουμε $\overline{A_1} = \overline{A_1}$ (ισχύει)
- Έστω ότι ισχύει για $n=k \in \mathbb{N}$ δηλαδή έχουμε:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_k} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k} \quad (1)$$

- Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1 \in \mathbb{N}$, δηλ:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k+1}} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k+1}}$$

Έχουμε ότι: $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k+1}} = \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}}$

$= \overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k} \cap \overline{A_{k+1}}$ = (Εφάρμοσα τον De Morgan για 2 σύνολα τα $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ και A_{k+1})

$\overset{(1)}{=} (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}) \cap \overline{A_{k+1}} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k+1}}$

Άσκηση

Θεωρείστε την ακολουθία πραγματικών αριθμών που ορίζεται ως $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \sqrt{1+2x_n}$ για $n \geq 1$

Αποδείξτε επαγωγικά ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, $x_n < 4$

ΛΥΣΗ

Για κάθε $n \geq 1$, έστω P_n η πρόταση "$x_n < 4$".

- Η πρόταση P_1 λέει ότι $x_1 = 1 < 4$ (που ισχύει)
- Έστω ότι ισχύει η πρόταση P_k, δηλ. ότι: $x_k < 4$.
- Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η πρόταση P_{k+1}, δηλαδή ότι $x_{k+1} < 4$

$$x_{k+1} = \sqrt{1+2x_k} < \sqrt{1+2(4)} = \sqrt{9} = 3 < 4$$

Επομένως η P_{k+1} ισχύει. Άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, για κάθε $n \geq 1$, η P_n ισχύει

Άσκηση 1

Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή $\alpha+\beta i$

(α) $(-4+6i)+(7-2i)$ (β) $(3-2i)-(6+4i)$

(γ) $(3+4i)+(-8-7i)+(5+3i)$ (δ) $(3+2i)(4+5i)$

(ε) $3i(6+i)$

(ζ) $i(3+i)(2-i)$ (στ) $(4+3i)(4-3i)$

ΛΥΣΗ

(α) $(-4+6i)+(7-2i)=-4+6i+7-2i=3+4i$

(β) $(3-2i)-(6+4i)=3-2i-6-4i=-3-6i$

(γ) $(3+4i)+(-8-7i)+(5+3i)=$

$=3+4i-8-7i+5+3i=0+0i$

$i^2=-1$

(δ) $(3+2i)(4+5i)=12+15i+8i+10i^2$

$=12+15i+8i-10=2+23i$

(ε) $3i(6+i)=18i+3i^2=-3+18i$

(στ) $\underbrace{(4+3i)(4-3i)}_{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}=4^2-(3i)^2=16-9i^2=16+9=25+0i$

(ζ) $i(3+i)(2-i)=(3i+i^2)(2-i)=(3i-1)(2-i)$

$=6i-3i^2-2+i=7i+3-2=1+7i$

Άσκηση 2

Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στη μορφή α+βi:

(α) $\frac{1}{1-i}$ (β) i^6 (γ) i^2+2i+1 (δ) $(1+i\sqrt{3})^2$

(ε) $\frac{3+i}{2-i}$ (στ) $\frac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$

ΛΥΣΗ

(α) $\frac{1}{1-i} \xrightarrow[\text{με το συζυγή του παρανομαστή}]{\text{Πολ/ζουμε}} \frac{1\cdot(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{1+1} = \frac{1+i}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

(β) $i^6 = i^{4+2} = i^4 \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1 = -1+0i$

(γ) $i^2+2i+1 = -1+2i+1 = 0+2i$

(δ) $(1+i\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 = 1+2i\sqrt{3}+i^2 3$

$= 1+2i\sqrt{3}-3 = -2+2i\sqrt{3}$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(ε) $$\frac{3+i}{2-i} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+2i+i^2}{2^2-i^2} = \frac{6+5i-1}{4+1}$$

$$= \frac{5+5i}{5} = \frac{5}{5} + \frac{5i}{5} = 1+i$$

(στ) $$\frac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}} = \frac{(6-i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{6-6i\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i^2\cancel{\sqrt{2}^2}^{\,2}}{1-(i\sqrt{2})^2} = \frac{6-7i\sqrt{2}-2}{1-(i\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{4-7i\sqrt{2}}{1-i^2\cdot 2} = \frac{4-7i\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{3}i$$

Άσκηση 3

Ποιός είναι ο $\bar{z}$ όταν:

(α) $z=-5+7i$ (β) $z=-4-9i$ (γ) $z=4i$

(δ) $z=11$ (ε) $z=-i$ (στ) $z=0$

ΛΥΣΗ

(α) $z=-5+7i$

$\bar{z}=-5-7i$

(β) $z=-4-9i$

$\bar{z}=-4+9i$

(γ) $z=4i$

$\bar{z}=-4i$

(δ) $z=11$

$\bar{z}=11$

(ε) $z=-i$

$\bar{z}=i$

(στ) $z=0$

$\bar{z}=0$

Γενικά ισχύει ότι:

Αν $z=\alpha+\beta i$

$\bar{z}=\alpha-\beta i$

Άσκηση 4

Αν $z_1 = \dfrac{5-9i}{7+4i}$ και $z_2 = \dfrac{5+9i}{7-4i}$ να δείξετε ότι ο z_1+z_2 είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο z_1-z_2 είναι φανταστικός αριθμός

ΛΥΣΗ

Παρατήρηση: Γενικά ισχύει ότι:

Για 2 συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z = a+bi$, $\bar{z} = a-bi$

$z+\bar{z} = 2a$

$z-\bar{z} = 2bi$

Παρατηρούμε ότι $\bar{z}_1 = \dfrac{5+9i}{7-4i} = z_2$

Άρα

$z_1+z_2 = z_1+\bar{z}_1 = 2\,\mathrm{Re}(z_1)$ που είναι πραγματικός

$z_1-z_2 = z_1-\bar{z}_1 = 2i\,\mathrm{Im}(z_1)$ που είναι φανταστικός

Άσκηση 5

Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:

(α) $x^2-3x+2=0$

(β) $x^2-2x+3=0$

(γ) $x+\frac{1}{x}=1$

ΛΥΣΗ

(α) $x^2-3x+2=0$

$\Delta=9-8=1 \qquad x=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}=2$ ή 1

(β) $x^2-2x+3=0$

$\Delta=4-12=-8<0 \qquad x=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2\pm i\sqrt{8}}{2}$

$=\frac{2\pm i2\sqrt{2}}{2}=1\pm i\sqrt{2}$

(γ) $x+\frac{1}{x}=1$

Περιορισμός: $x\neq 0$

$x+\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2+1=x \Leftrightarrow x^2-x+1=0$

$\Delta=1-4=-3<0 \qquad x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Άσκηση 6

Αν μια ρίζα της εξίσωσης $2x^2+\beta x+\gamma=0$, όπου $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ είναι $3+2i$, να βρείτε τις τιμές των β και γ

ΛΥΣΗ

Αφού $3+2i$ ρίζα της εξίσωσης

$\Leftrightarrow\ 2(3+2i)^2+\beta(3+2i)+\gamma=0$

$2(9+12i+4i^2)+3\beta+2\beta i+\gamma=0$

$18+24i+8(-1)+3\beta+2\beta i+\gamma=0$

$10+24i+3\beta+2\beta i+\gamma=0$

$(10+3\beta+\gamma)+(24+2\beta)i=0$

$10+3\beta+\gamma=0$ και $24+2\beta=0$

$10+3\beta+\gamma=0$ και $\beta=-12$

$10+3(-12)+\gamma=0$ και $\beta=-12$

$\boxed{\gamma=26}$ και $\boxed{\beta=-12}$

Άσκηση 7

Αν α, β, γ και δ είναι πραγματικοί αριθμοί, να εξετάσετε πότε το πηλίκο $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ είναι πραγματικός αριθμός.

ΛΥΣΗ

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} \xrightarrow[\text{με το συζυγή του παρονομαστή}]{\text{Πολ/ζουμε}} \frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)} = \frac{\alpha\gamma-\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta i^2}{\gamma^2-(\delta i)^2}$$

$$= \frac{\alpha\gamma-\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} = \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$$

$$= \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$$

Άρα $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2} = 0 \Leftrightarrow \beta\gamma-\alpha\delta = 0$

Σημείωση: Για να είναι πραγματικός αριθμός το πηλίκο $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, θα πρέπει το φανταστικό μέρος $=0$

Άσκηση 8

(α) Για ένα μιγαδικό αριθμό z να αποδείξετε ότι:

- Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z=\bar{z}$
- Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z=-\bar{z}$

ΛΥΣΗ

Έστω $z=x+yi$

- $z=\bar{z} \Leftrightarrow x+yi=x-yi$

$2yi=0$

$y=0 \Leftrightarrow \boxed{z=x \text{ πραγματικός}}$

- $z=-\bar{z} \Leftrightarrow x+yi=-(x-yi)$

$x+yi=-x+yi$

$2x=0$

$x=0 \Leftrightarrow \boxed{z=yi \text{ φανταστικός}}$

Άσκηση 8 (συνέχεια)

(β) Αν $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ και $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ και $z_1 \cdot z_2 \neq -1$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ είναι πραγματικός

ενώ ο αριθμός $v = \frac{z_1-z_2}{1+z_1z_2}$ είναι φανταστικός.

ΛΥΣΗ

$$\bar{u} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2} = \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}}$$

$$= \frac{\frac{z_2+z_1}{\cancel{z_1z_2}}}{\frac{z_1\cdot z_2+1}{\cancel{z_1z_2}}} = \frac{z_2+z_1}{z_1z_2+1} = u \overset{(a)}{\Longrightarrow} u \text{ πραγματικός}$$

Αφού $\bar{u} = u$. u: πραγματικός

$$\bar{v} = \overline{\left(\frac{z_1-z_2}{1+z_1z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2} = \frac{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}}$$

$$= \frac{\frac{z_2-z_1}{\cancel{z_1z_2}}}{\frac{z_1z_2+1}{\cancel{z_1z_2}}} = \frac{z_2-z_1}{z_1z_2+1} = -\frac{z_1-z_2}{1+z_1z_2} = -v$$

$\overset{(a)}{\Longrightarrow}$ v φανταστικός

Αφού $\bar{v} = -v$ v: φανταστικός

Άσκηση

Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών:

(α) $1+i$, (β) $1-i$, (γ) $3+4i$, (δ) $3-4i$, (ε) $-5i$

(στ) -4 (ζ) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (η) $(1-i)^2(1+i)^4$, (θ) $(2-i)(1+2i)$

(ι) $\dfrac{3+i}{4-3i}$

ΛΥΣΗ

Ως μέτρο του $z=x+yi$ ορίζουμε $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

(α) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

(β) $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

(γ) $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

(δ) $|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

(ε) $|-5i| = |-5|\,|i| = 5\cdot 1 = 5$

(στ) $|-4| = 4$

(ζ) $\left|\dfrac{1+i}{1-i}\right| = \dfrac{|1+i|}{|1-i|} = 1$ (οι $1+i$, $1-i$ είναι συζυγείς, άρα έχουν το ίδιο μέτρο) (η) $\left|(1-i)^2 \cdot (1+i)^4\right| = \left|(1-i)^2\right| \left|(1+i)^4\right|$

$= \sqrt{2}^2 \sqrt{2}^4 = 2 \cdot 4 = 8$

(θ) $\left|(2-i)(1+2i)\right| = |2-i|\,|1+2i|$

$= \sqrt{4+1}\,\sqrt{1+4} = \sqrt{5}\,\sqrt{5} = 5$

(ι) $\left|\dfrac{3+i}{4-3i}\right| = \dfrac{|3+i|}{|4-3i|} = \dfrac{\sqrt{9+1}}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Άσκηση 1 Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x+yi$ για τους οποίους ισχύει:

(α) $|z^2| = z^2$ (β) $|z-1| = z$ (γ) $|z+i| = 2\bar{z}$

ΛΥΣΗ

(α) $|z^2| = z^2 \Leftrightarrow |z|^2 - z^2 = 0$

$$z\bar{z} - z^2 = 0$$

$$z(\bar{z} - z) = 0$$

$$z = 0 \quad \text{ή} \quad \bar{z} - z = 0$$

$$z = 0 \quad \text{ή} \quad \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Γενικά ισχύει ότι: Αν $z = x+yi$, τότε $\bar{z} = x - yi$ και $-z = -x-yi$

Επομένως $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(β) $|z-1| = z$

Επειδή $0 \leq |z-1| = z$, ο z είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Έστω $z = x$

$$|z-1| = z$$

$$\Leftrightarrow |x-1| = x$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

(γ) $|z+i| = 2\bar{z}$ (συνέχεια Άσκηση 1)

Επειδή $0 \le |z+i| = 2\bar{z}$, ο $\bar{z}$ είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, άρα και ο z.

Έστω $z = x = \bar{z}$, $x \geq 0$

Η δοσμένη εξίσωση ισοδυναμεί

$$|x+i| = 2x$$

$$\sqrt{x^2+1^2} = 2x$$

$$x^2+1 = (2x)^2$$

$$x^2+1 = 4x^2$$

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

αφού $x \geq 0$

Άσκηση 2

Να βρείτε που ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει:

(α) $|z|=1$ (β) $|z-i|=1$ (γ) $|z+1+2i|=3$

(δ) $1<|z|<2$ (ε) $|z|\geq 2$

ΛΥΣΗ

(α) $|z|=1 \Leftrightarrow |z-(0+0i)|=1 \Leftrightarrow$ ο z ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1

(β) $|z-i|=1 \Leftrightarrow |z-(0+1)i|=1$

$\Leftrightarrow$ ο z ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $K(0,1)$ και ακτίνα 1

(γ) $|z+1+2i|=3 \Leftrightarrow |z-(-1-2i)|=3$

$\Leftrightarrow$ ο z ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $K(-1,-2)$ και ακτίνα 3

(δ) $1<|z|<2 \Leftrightarrow 1<|z-(0+0i)|<2$

$\Leftrightarrow$ ο z ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα 2 και στο εξωτερικό του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα 1.

(ε) $|z|\geq 2 \Leftrightarrow |z-(0+0i)|\geq 2$

$\Leftrightarrow$ ο z ανήκει στο εξωτερικό του κύκλου ή πάνω στον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή O των αξόνων και ακτίνα 2

Άσκηση 3

Για 2 μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

ΛΥΣΗ

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$

$$=z_1\bar{z}_1+\cancel{z_1\bar{z}_2}+\cancel{z_2\bar{z}_1}+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_1-\cancel{z_1\bar{z}_2}-\cancel{z_2\bar{z}_1}+z_2\bar{z}_2$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1|^2+|z_2|^2$$

$$=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6}$

ΛΥΣΗ

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{(1+i)\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Άρα $z = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Γενικά: $z^{\nu} = \rho^{\nu}\left(\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta)\right)$

Άρα $z^{-6} = 1^{-6}\left(\cos\left(-6\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-6\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= \cos\left(-3\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0 - i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -(-1)\cdot i = i$$

Άσκηση 5

Αν $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ να υπολογίσετε τον z^{2000}

ΛΥΣΗ

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα $\theta = \frac{\pi}{3}$

Άρα $z = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$z^{2000} = 1^{2000}\left[\cos\left(2000\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2000\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \cos\left(\frac{1998\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{1998\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(666\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(666\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

Άσκηση 6

Αν $z_1 = \sqrt{3} + i$ και $z_2 = \sqrt{3} - i$, να υπολογίσετε την παράσταση $z_1^{\nu} + z_2^{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος.

ΛΥΣΗ

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Για τον z_1 έχουμε:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_1^{\nu} = 2^{\nu}\left(\cos\frac{\nu\pi}{6} + i\sin\frac{\nu\pi}{6}\right)$$

$$z_2^{\nu} = \bar{z}_1^{\nu} = 2^{\nu}\left(\cos\frac{\nu\pi}{6} - i\sin\frac{\nu\pi}{6}\right)$$

$$z_1^{\nu} + z_2^{\nu} = z_1^{\nu} + \bar{z}_1^{\nu} = 2\mathrm{Re}(z_1^{\nu}) = 2\cdot 2^{\nu}\cos\frac{\nu\pi}{6}$$

$$= 2^{\nu+1}\cos\frac{\nu\pi}{6}$$

Άσκηση 7

Αποδείξτε ότι το άθροισμα των πρώτων n φυσικών αριθμών ισούται με $\frac{n(n+1)}{2}$

ΛΥΣΗ

- Για $n=1$ ισχύει ότι $1 = \frac{1(1+1)}{2}$
- Έστω ότι ισχύει για $n=k$,

δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{k} i = 1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- Θα αποδείξω ότι ισχύει για $n=k+1$, δηλαδή ότι

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1+2+3+\dots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$1+2+3+\dots+(k+1) = 1+2+3+\dots+k+(k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Άσκηση 8

Αποδείξτε ότι για όλους τους ακέραιους $n \geq 2$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

ΛΥΣΗ

• Για $n=2$ έχουμε: $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{1} 1(1+1) = 2$ (1)

και $\frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{2(2+1)(2-1)}{3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{3} = 2$ (2)

Από (1) και (2) ισχύει ότι: $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$,

για $n=2$ (3)

• Έστω ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{k-1} i(i+1) = \frac{k(k+1)(k-1)}{3}$$

• Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$, δηλ. αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1) = \frac{(k+1)(k+2)k}{3}$$

Άσκηση 8 (συνέχεια)

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1) = \underbrace{1(1+1) + 2(2+1) + \dots + (k-1)(k-1+1)}_{\sum_{1}^{k-1} i(i+1)} + k(k+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} i(i+1) + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k-1)}{3} + k(k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)(k-1) + 3k(k+1)}{3} = \frac{(3+k-1)k(k+1)}{3}$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \qquad (4)$$

Άρα ισχύει και για $n=k+1$

Από (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$

$\forall n \geq 2$

Άσκηση 9

Αποδείξτε επαγωγικά ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, το 3 διαιρεί ακέραια (ακριβώς, χωρίς υπόλοιπο) τον $n^3 + 5n + 6$

ΛΥΣΗ

- Για $n = 0$, $0^3 + 5 \cdot 0 + 6 = 6$, που διαιρείται ακριβώς δια του 3.

- Έστω ότι για $n = k$, ο $k^3 + 5k + 6$ διαιρείται ακριβώς δια του 3. Άρα μπορεί να γραφεί σαν $3m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$

- Για $n = k+1$, $(k+1)^3 + 5(k+1) + 6 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 + 6$

$$= (k^3 + 5k + 6) + 3k^2 + 3k + 6 = 3m + 3(k^2 + k + 2)$$

Που διαιρείται ακριβώς δια του 3

Άσκηση 10

Αποδείξτε επαγωγικά ότι το γινόμενο τριών οποιωνδήποτε συνεχόμενων φυσικών αριθμών διαιρείται με το 6.

ΛΥΣΗ

- Το γινόμενο των 3 πρώτων φυσικών αριθμών $(1,2,3)$ ισούται με το 6 (και προφανώς διαιρείται με το 6)
- Έστω για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, το $k(k+1)(k+2)$ διαιρείται με το 6
- Θα αποδείξουμε ότι και το $(k+1)(k+2)(k+3)$ διαιρείται επίσης με το 6

Από την υπόθεση $k(k+1)(k+2) = 6m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$

$$(k+1)(k+2)(k+3) = k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)$$
$$= 6m + 3(k+1)(k+2)$$

Οι $k+1$ και $k+2$ είναι διαδοχικοί αριθμοί, συνεπώς ο είνας από τους δύο είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.
Ένας από τους δύο λοιπόν θα γράφεται στη μορφή $2s$, $s \in \mathbb{N}$
Άρα ο $3(k+1)(k+2)$ θα μπορεί να γραφτεί στη μορφή $3 \cdot 2t$, $t \in \mathbb{N}$

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(-2)$, $f(1)$

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A = \mathbb{R}$

Αν ο τύπος της συνάρτησης δεν περιέχει παρανομαστές, ρίζες, ή λογαρίθμους το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$

β) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 2 = -2$

$f(-2) = 3(-2)^2 + 5(-2) - 2 = 0$

Αν $f(\rho) = 0$ τότε ο αριθμός ρ λέγεται ρίζα της f

$f(1) = 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = 6$

Άσκηση

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ (β) $g(x) = \sqrt{x-2}$ (γ) $h(x) = \ln(x+1)$

ΛΥΣΗ

(α) Πρέπει να είναι: $x-3 \neq 0$

Άρα $x \neq 3$

Με συνέπεια το πεδίο ορισμού της f να είναι $\boxed{A = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)}$

Όταν ο τύπος της συνάρτησης περιέχει παρανομαστές αυτοί πρέπει να είναι διάφοροι του μηδενός

(β) $g(x) = \sqrt{x-2}$

Πρέπει να είναι $x-2 \geq 0$

Άρα $x \geq 2$

Επομένως το πεδίο ορισμού της g είναι $\boxed{A = [2, +\infty)}$

Οι υπόρριζες ποσότητες πρέπει να είναι μη αρνητικές

(γ) $h(x) = \ln(x+1)$

Πρέπει να είναι $x+1 > 0$

Άρα $x > -1$ με συνέπεια το πεδίο ορισμού της h να είναι $\boxed{A = (-1, +\infty)}$

Για κάθε παράσταση της μορφής $\ln(A(x))$ θα πρέπει $A(x) > 0$

Ασκηση

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x)=\sqrt{x-10}+\dfrac{1}{x-2}$ (β) $f(x)=\dfrac{3x+1}{|x|-x}$

ΛΥΣΗ

(α) Πρέπει να είναι $x-10\geq 0$ και $x-2\neq 0$

Το υπόρριζο είναι μη αρνητικό

Ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδέν

Άρα $x\geq 10$ και $x\neq 2$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $\boxed{A=[10,+\infty)}$

(β) $f(x)=\dfrac{3x+1}{|x|-x}$

Θα πρέπει $|x|-x\neq 0$

Άρα $|x|\neq x$

Όμως ισχύει $|x|=x$ όταν $x\geq 0$

Άρα θα πρέπει να είναι $x<0$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, είναι $\boxed{A=(-\infty,0)}$

> **Υπενθύμιση**
>
> $|x|=x$ αν $x\geq 0$
>
> και
>
> $|x|=-x$ αν $x<0$

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq 0 \\ 3\sin(x), & 0 < x \leq \pi \\ x^2+1, & x > \pi \end{cases}$

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης;
β) Να υπολογίσετε τις παρακάτω τιμές:
$f(-10)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f(\sqrt{30})$

ΛΥΣΗ

(α) Το πεδίο ορισμού της f είναι $\boxed{A = \mathbb{R}}$ αφού η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δεδομένου ότι έχει νόημα όταν $x \leq 0$ ή $0 < x \leq \pi$ ή $x > \pi$

(β) i) Είναι $-10 < 0$, επομένως $\boxed{f(-10) = -3}$

ii) Επειδή $0 \leq \frac{\pi}{3} < \pi$ έχουμε:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sin\frac{\pi}{3} = 3\,\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

iii) Είναι $\sqrt{30} = 5.48 > \pi$, άρα

$$f(\sqrt{30}) = \sqrt{30}^2 + 1 = 30 + 1 = 31$$

$$\boxed{f(\sqrt{30}) = 31}$$

Άσκηση

Να βρείτε τα παρακάτω όρια

(α) $\lim_{x \to -1} (3x^3 - 4x + 8)$

(β) $\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 - 8}{x - 2}$

(γ) $\lim_{x \to 3} \sqrt{x+6}$

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων.
Ουσιαστικά κάνουμε αντικατάσταση.

(α) $\lim_{x \to -1} (3x^3 - 4x + 8) = 3(-1)^3 - 4(-1) + 8 = -3 + 4 + 8 = 9$

(β) $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 8}{x - 2} = \frac{3 \cdot 0^2 - 8}{0 - 2} = 4$

(γ) $\lim_{x \to 3} \sqrt{x+6} = \sqrt{3+6} = 3$

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$ (β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$

(γ) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3+x-30}{x-3}$

Σημείωση **ΛΥΣΗ**

Στις περιπτώσεις ρητών συναρτήσεων της μορφής $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ όπου $g(x)$, $h(x)$ πολυώνυμα του x και το $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ καταλήγει στη μορφή $\dfrac{0}{0}$, τότε σίγουρα το a είναι ρίζα των πολυωνύμων και αυτά γράφονται με τη μορφή:

$g(x) = (x-a)\,g_1(x)$ και $h(x) = (x-a)\,h_1(x)$

με συνέπεια το κλάσμα να απλοποιείται

(α) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$

(β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+5)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+5) = 6$

(γ) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3+x-30}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+10)}{\cancel{x-3}}$

$= \lim\limits_{x \to 3} (x^2+3x+10) = 28$

Άσκηση

Αν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -3$ και $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 4$. Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to a} \left(3\cdot f(x) - 4\cdot g(x)\right)$

(β) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2f(x)+g(x)}{\sqrt{g(x)}}$

ΛΥΣΗ

(α) $\lim\limits_{x\to a} \left(3\cdot f(x) - 4\cdot g(x)\right) = 3\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) - 4\lim\limits_{x\to a} g(x)$

$= 3(-3) - 4(4) = -9 - 16 = -25$

(β) ! Επειδή $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 4 > 0$ η συνάρτηση $g(x)$ παίρνει θετικές τιμές σε περιοχή του a και έτσι η $\sqrt{g(x)}$ ορίζεται

$$\lim_{x\to a} \frac{2f(x)+g(x)}{\sqrt{g(x)}} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\left(2\cdot f(x)+g(x)\right)}{\lim\limits_{x\to a}\sqrt{g(x)}} =$$

$$= \frac{2\lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to a} g(x)}} = \frac{2(-3)+4}{\sqrt{4}} = \frac{-6+4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Άσκηση

Να βρείτε τα παρακάτω όρια

α) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 1}{10x + 5}$

β) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$

ΛΥΣΗ

Υπενθύμιση

- $a^2 - \beta^2 = (a-\beta)(a+\beta)$
- $a^3 - \beta^3 = (a-\beta)(a^2 + a\beta + \beta^2)$
- $a^3 + \beta^3 = (a+\beta)(a^2 - a\beta + \beta^2)$
- $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

α) $2x^2 - x - 1 = 0$ $\quad \Delta = 9 \quad \rho_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \rho_1 = 1 \\ \rho_2 = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

Επομένως

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x - 1}{10x + 5} = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{10\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2(x-1)}{10} = \frac{2\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{10} = -0.3$$

β) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^4-16} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-2^3}{(x^2)^2-4^2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{(x^2-4)(x^2+4)}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+2x+4}{(x+2)(x^2+4)} = \dfrac{4+4+4}{4(4+4)} = \dfrac{3}{8}$

Άσκηση 1

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων;

(α) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = \dfrac{x^3 + 10x + 7}{x}$, $x \neq 0$

(γ) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 5\ln x$, $x > 0$

(δ) $f(x) = 10e^x + 35\sqrt{x} + \ln 10$, $x \geq 0$

ΛΥΣΗ

(α) $f(x) = 5x^3 + 3x^2 + 6x + 9$

$$f'(x) = 5(x^3)' + 3(x^2)' + 6(x)' + (9)'$$

$$= 15x^2 + 6x + 6 + 0$$

$$\boxed{f'(x) = 15x^2 + 6x + 6}$$

(β) $f(x) = \dfrac{x^3 + 10x + 7}{x}$

$$f'(x) = \frac{(x^3 + 10x + 7)' \cdot x - (x^3 + 10x + 7)(x)'}{x^2}$$

$$= \frac{(3x^2 + 10)x - (x^3 + 10x + 7) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{3x^3 + \cancel{10x} - x^3 - \cancel{10x} - 7}{x^2} = \frac{2x^3 - 7}{x^2}$$

Άρα $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x^3 - 7}{x^2}}$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

(γ) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 5\ln x = x^{\frac{1}{3}} + 5\ln x$

$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 5(\ln x)'$

$= \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} + 5\frac{1}{x}$

$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{5}{x}$

$= \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} + \frac{5}{x} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{x}$

Άρα $\boxed{f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{x}}$

<u>Υπενθύμιση</u>: $\sqrt[\nu]{x^{\mu}} = x^{\frac{\mu}{\nu}}$ για κάθε $x > 0$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

(δ) $f(x) = 10e^x + 35\sqrt{x} + \ln 10$

$f'(x) = 10(e^x)' + 35(\sqrt{x})' + (\ln 10)'$

$= 10 \cdot e^x + 35 \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 0$

$\Rightarrow f'(x) = 10e^x + \dfrac{35}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x>0$

Άσκηση 2

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

(α) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

(β) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$

(γ) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, $x \neq 2$

(δ) $g(t) = \dfrac{t^2+1}{1-t^2}$, $t \neq 1, -1$

ΛΥΣΗ

(α) $f'(x) = \left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)' = \dfrac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{e^{2x}}$

$= \dfrac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(2x-x^2)}{e^{2x}}$

Άρα $f'(x) = \dfrac{2x-x^2}{e^x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(β) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x>0$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} - \ln x}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}}$$

(γ) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x \neq 2$

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-2) - (x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2} = \frac{\cancel{x} - 2 - \cancel{x} - 1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

Άρα $\boxed{f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} \quad , x \neq 2}$

(δ)

Άσκηση 2 (συνέχεια)

$$g(t) = \frac{t^2+1}{1-t^2} \quad , \quad t \neq 1, -1$$

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1, -1$ έχουμε:

$$g'(t) = \frac{(t^2+1)'(1-t^2) - (t^2+1)(1-t^2)'}{(1-t^2)^2}$$

$$= \frac{2t(1-t^2) - (t^2+1)(-2t)}{(1-t^2)^2}$$

$$= \frac{2t - \cancel{2t^3} + \cancel{2t^3} + 2t}{(1-t^2)^2} = \frac{4t}{(1-t^2)^2} \quad , \quad t \neq 1, -1$$

Άρα $\boxed{g(t) = \frac{4t}{(1-t^2)^2} \quad , \quad t \neq 1, -1}$

Άσκηση 3

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

(α) $f(x) = (2x+1)(3x-2)$

(β) $f(x) = 500(15-x^2)(3x-2)$

(γ) $f(x) = x^5 \cdot e^x$

(δ) $f(x) = (x^2+1)\ln x \qquad x>0$

ΛΥΣΗ

(α) $f'(x) = (2x+1)'(3x-2) + (2x+1)(3x-2)'$

$= 2(3x-2) + (2x+1)\cdot 3$

$= 6x - 4 + 6x + 3$

Άρα $\boxed{f'(x) = 12x - 1}$

(β) $f(x) = 500(15-x^2)(3x-2)$

$f'(x) = 500\left[(15-x^2)'(3x-2) + (15-x^2)(3x-2)'\right]$

$= 500\left[-2x(3x-2) + (15-x^2)\cdot 3\right]$

$= 500\left(-6x^2 + 4x + 45 - 3x^2\right)$

$\boxed{f'(x) = 500\left(-9x^2 + 4x + 45\right)}$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

(γ) $f(x) = x^5 e^x$

$f'(x) = (x^5)' e^x + x^5 (e^x)' = 5x^4 e^x + x^5 \cdot e^x$

Άρα $\boxed{f'(x) = e^x (x^5 + 5x^4)}$

(δ) $f(x) = (x^2+1) \ln x \qquad x > 0$

$f'(x) = (x^2+1)' \ln x + (x^2+1)(\ln x)'$

$= 2x \ln x + (x^2+1) \frac{1}{x}$

$\boxed{f'(x) = 2x \ln x + x + \frac{1}{x}}$

Άσκηση 4

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = x^2 - 6x + 1$ (β) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$

(γ) $f(x) = xe^x$ (δ) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

ΛΥΣΗ

(α) $f(x) = x^2 - 6x + 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 3}$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	γνησίως φθίνουσα	Ο.Ε	γνησίως αύξουσα

Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις πρωτοβάθμιες ανισώσεις, δηλ. δεξιά του 0 ομόσημο του α.

Όπως βλέπαμε από το πινακάκι:

- $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 3)$ άρα η $f(x)$ γν. φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, 3]$
- $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (3, +\infty)$ άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [3, +\infty)$

Η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 3$, το $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = -8$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

(β) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 6\cdot x - 9 = 0 \iff x^2 + 2x - 3 = 0$

$\iff x = -3$ ή $x = 1$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		γν. αύξουσα	Τ.Μ	γν. φθίνουσα	Τ.Ε	γν. αύξουσα	

Για τα πρόσημα ισχύει η θεωρία για τις δευτεροβάθμιες ανισώσεις, δηλ όταν $\Delta > 0$ και η εξίσωση έχει 2 ρίζες, τότε για τα πρόσημα ισχύει ότι εντός των ριζών είναι ετερόσημο του α δηλ του συντελεστή του x^2

Όπως βλέπουμε και από το πινακάκι:

- $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (-\infty, -3]$ και για κάθε $x \in [1, +\infty)$
- $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-3, 1)$ άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [-3, 1]$

Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -3$, το $f(-3) = 34$

Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$, το $f(1) = 2$

(γ) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + xe^x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1+x=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x=-1}$

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσουμε θα λύσουμε τις ανισώσεις $f'(x)>0$ και $f'(x)<0$)

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x > 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) > 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1+x>0 \Leftrightarrow x>-1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x + xe^x < 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) < 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1+x<0 \Leftrightarrow x<-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	γνησίως φθίνουσα	Ο.Ε	γνησίως αύξουσα

Όπως βλέπουμε και από τον πίνακα:

- $f'(x)<0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, -1]$
- $f'(x)>0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [-1, +\infty)$

Η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = -1$, το $f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

(δ) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ Άσκηση 4 (Συνέχεια)

$D_f = (0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - \ln x (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e$

$\Leftrightarrow \boxed{x = e}$

(Για το πρόσημο της $f'(x)$ δεν ισχύει κάποια θεωρία, άρα για να το υπολογίσουμε θα λύσουμε τις ανισώσεις $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$)

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \overset{x^2 > 0 \text{ για κάθε } x > 0}{\Longleftrightarrow} 1 - \ln x > 0$

$\Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow \boxed{x < e}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \overset{x^2 > 0 \text{ για κάθε } x > 0}{\Longleftrightarrow} 1 - \ln x < 0$

$\Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow \boxed{x > e}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		γν. αύξουσα		γν. φθίνουσα	
			Ο.Μ		

Από τον πίνακα έχουμε:

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, e)$, άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (0, e]$

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (e, +\infty)$, άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [e, +\infty)$

Η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = e$, το $f(x_0) = f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

Άσκηση 5

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x-3, & x \leq 1 \\ x^2-6x+7, & x>1 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Πρώτα εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Έχουμε: $f(1) = 1^2+4\cdot 1-3 = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2+4x-3) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2-6x+7) = 2$

$\Rightarrow$ Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

- Για $x \in (-\infty, 1)$ είναι $f'(x) = (x^2+4x-3)' = 2x+4$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-2}$

- Για $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) = (x^2-6x+7)' = 2x-6$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=3}$

Άρα τελικά:

Άσκηση 5 (συνέχεια)

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		γνησίως φθίνουσα		γνησίως αύξουσα		γνησίως φθίν.		γνησίως αύξουσα	
			Τ.Ε		Τ.Μ		Τ.Ε		

- Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[1,3]$
- Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2,1]$ και $[3,+\infty)$
- Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=-2$ το $f(x_1)=f(-2)=-7$ και στο $x_2=3$, το $f(x_2)=f(3)=-2$
- Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_3=1$ το $f(x_3)=f(1)=2$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - 2x + e$

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

ΛΥΣΗ

(α) $f(x) = x\ln x - 2x + e$

$D_f = (0, +\infty)$

$f'(x) = (x\ln x - 2x + e)' = \ln x + x\dfrac{1}{x} - 2 = \ln x + 1 - 2$

$f'(x) = \ln x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow \boxed{x = e}$

(Για τα πρόσημα λύνουμε τις ανισότητες)

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \Leftrightarrow x > e$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$

Άρα

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα
		Ο.Ε	

Από το πινακάκι έχουμε:

- $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, e)$ άρα η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (0, e]$
- $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η $f(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [e, +\infty)$
- Η $f(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = e$, $f(e) = e\ln e - 2e + e = 0$

Άσκηση 6 (συνέχεια)

(β) Από το (α) ισχύει ότι $f(e)=0$, άρα η $x=e$ είναι η λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ και επειδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=e$ το $f(e)=0$, η $x=e$ είναι και μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$

Άσκηση "Διαίρεση Πολυωνύμων"

Να γίνει η διαίρεση $(2x^4+3x^3-x^2+5x-2):(x^2+x)$

ΛΥΣΗ

1ο Βήμα: Γράφουμε το γνωστό σχήμα της διαίρεσης

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

2ο Βήμα: Διαιρούμε το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρετέου με το μεγιστοβάθμιο όρο του Διαιρέτη.
Έτσι υπολογίζουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου.

$$\boxed{\text{Άρα} \quad \frac{2x^4}{x^2}=2x^2}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

3ο Βήμα: Πολλαπλασιάζουμε τον όρο που βρήκαμε στο πηλίκο με κάθε όρο του Διαιρέτη (κάναμε δηλαδή επιμεριστική ιδιότητα)

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \cline{2-2} -2x^4-2x^3 & 2x^2 \\ \cline{1-1} x^3-x^2+5x-2 & \end{array}$$

4ο Βήμα: Εκτελούμε την πρόσθεση. Οι αντίθετοι όροι διαγράφονται. Έπειτα "κατεβάζουμε" και τους υπόλοιπους όρους του Διαιρετέου

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+3x^3-x^2+5x-2 & x^2+x \\ \cline{2-2} -2x^4-2x^3 & 2x^2+x \\ \cline{1-1} x^3-x^2+5x-2 & \end{array}$$

Συνεχίζουμε κατά τον ίδιο τρόπο, έως ότου ο βαθμός του υπολοίπου γίνει μικρότερος από εκείνον του διαιρέτη. Τότε η διαίρεση σταματάει

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +3x^3 & -x^2 & +5x & -2 & x^2+x \\
\cline{6-6}
-2x^4 & -2x^3 & & & & 2x^2+x \\
\cline{1-2}
 & x^3 & -x^2 & +5x & -2 & \\
 & -x^3 & -x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & -2x^2 & +5x & -2 &
\end{array}
$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και έχουμε:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +3x^3 & -x^2 & +5x & -2 & x^2+x \\
\cline{6-6}
-2x^4 & -2x^3 & & & & 2x^2+x-2 \\
\cline{1-2}
 & x^3 & -x^2 & +5x & -2 & \\
 & -x^3 & -x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & -2x^2 & +5x & -2 & \\
 & & 2x^2 & +2x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 7x & -2 &
\end{array}
$$

Άρα, η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης θα γράφεται:

$$\underbrace{2x^4+3x^3-x^2+5x-2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x^2+x)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(2x^2+x-2)}_{\pi(x)} + \underbrace{7x-2}_{\upsilon(x)}$$

Άσκηση Να γίνει διαίρεση $(2x^4-3x^3-10x^2+5x-2):(x-3)$

Προκειμένου να υπολογίσουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$, αντί να εφαρμόσουμε τον κλασικό αλγόριθμο της διαίρεση πολυωνύμων εφαρμόζουμε έναν άλλον αλγόριθμο, πολύ συντομότερο και απλούστερο. Ο αλγόριθμός αυτός ονομάζεται __σχήμα Horner__ και έχει ως εξής:

$$(2x^4-3x^3-10x^2+5x-2):(x-3)$$

Γράφουμε τους συντελεστές του Διαιρετέου

2	−3	−10	5	−2	3
	6				
2					

Εδώ γράφουμε το ρ

Κατεβάζουμε

$\cdot 3$ Πολλαπλασιάζουμε με το $\rho=3$

2	−3	−10	5	−2	3
	6	9			
2	3				

Προσθέτουμε

$\cdot 3$ Πολλ/ζουμε με το $\rho=3$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο

$$
\begin{array}{ccccc|c}
2 & -3 & -10 & 5 & -2 & 3 \\
 & 6 & 9 & -3 & 6 & \\
\hline
2 & 3 & -1 & 2 & \boxed{4} & \\
\end{array}
$$

$$\underbrace{2 \quad 3 \quad -1 \quad 2}_{\pi(x)} \qquad \underbrace{4}_{\upsilon(x)}$$

Άρα $\pi(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$

Άρα γράφουμε:

$$\underbrace{2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 5x - 2}_{\Delta(x)} = \underbrace{(x-3)}_{\delta(x)} \underbrace{(2x^3 + 3x^2 - x + 2)}_{\pi(x)} + \underbrace{4}_{\upsilon(x)}$$

ΒΑΣΙΚΑ ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. $\int x^a \, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c$, όπου $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2. $\int x^{-1} \, dx = \ln|x| + c$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$, όπου $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

Ειδικά, $\int e^x \, dx = e^x + c$

4. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

5. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

6. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan(x) + c$

7. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot(x) + c$

8. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$

9. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos(x) + c$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int 2x\,dx$

ΛΥΣΗ

$\int 2x\,dx = x^2 + c$, γιατι $F'(x) = (x^2)' = 2x$

Δηλαδή η $F(x) = x^2$ είναι μία αντιπαράγωγος $f(x) = 2x$ και c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \cos x\,dx$

ΛΥΣΗ

$\int \cos x\,dx = \sin x + c$, γιατι $F'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

Δηλαδή $F(x) = \sin x$ είναι μία αντιπαράγωγος της $f(x) = \cos x$ και c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ αόριστων ολοκληρωμάτων που ανάγονται στον πίνακα των βασικών ολοκληρωμάτων, χρησιμοποιώντας τους κανόνες ολοκλήρωσης

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int (x^2-2x+2)\,dx$

ΛΥΣΗ

$$\int (x^2-2x+2)\,dx = \int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 2\int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + c_1 - 2\,\frac{x^2}{2} + c_2 + 2x + c_3$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + c$$

όπου $c = c_1 + c_2 + c_3$ η σταθερά ολοκλήρωσης και $\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x$ η αντιπαράγωγος της $x^2 - 2x + 2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int (2\sin x - 3\cos x)\,dx$

ΛΥΣΗ

$\int (2\sin x - 3\cos x)\,dx = \int 2\sin x\,dx - \int 3\cos x\,dx$ (γιατί $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$)

$= 2\int \sin x\,dx - 3\int \cos x\,dx =$ (γιατί $\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$)

$= 2(-\cos x) - 3\sin x + c =$ (γιατί $\int \sin x\,dx = -\cos x$ και $\int \cos x\,dx = \sin x$)

$= -2\cos x - 3\sin x + c$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{2x+1}\,dx$

ΛΥΣΗ

$\int \frac{x}{2x+1}\,dx =$

Θα προσπαθήσουμε να το γράψουμε στη μορφή $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$, γιατί

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c, \; c \in \mathbb{R}$

$= \int \frac{2x}{2(2x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{2x+1}\,dx$

πολ/ζουμε με 2

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{2x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2(2x+1)}\,dx$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \frac{2}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \frac{(2x+1)'}{2x+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln|2x+1| + c$, αφού $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Έστω το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)\,dx$ του οποίου δεν μπορούμε άμεσα να βρούμε την αντιπαράγωγο. Μία μέθοδος που μπορεί να εφαρμοστεί είναι η μέθοδος της αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής.

Διαδικασία υπολογισμού του ολοκληρώματος $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$ με αντικατάσταση

1. Αντικαθιστούμε την $g(x)$ με μία άλλη μεταβλητή u, δηλαδή $u=g(x)$, οπότε θα έχουμε $du=dg(x) \Rightarrow du=g'(x)\,dx$ και το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

2. Ολοκληρώνουμε ως προς u

3. Στο αποτέλεσμα που προκύπτει αντικαθιστούμε το u με το ίσο του $g(x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int (2x+1)^2\, dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $u = 2x+1$

$$d(2x+1) = du$$

$$(2x+1)'\, dx = du$$

$$2\, dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

Οπότε

$$\int (2x+1)^2\, dx = \int u^2 \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^2\, du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^3}{3} + c = \frac{1}{6} u^3 + c = \frac{1}{6}(2x+1)^3 + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int e^{ax+b}\,dx$, $a \neq 0$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε

$$u = ax+b$$

$$du = d(ax+b)$$

$$du = (ax+b)'\,dx$$

$$du = a\,dx$$

$$dx = \frac{du}{a}$$

Οπότε:

$$\int e^{ax+b}\,dx = \int e^{u}\frac{1}{a}\,du = \frac{1}{a}\int e^{u}\,du$$

$$= \frac{1}{a}e^{u} + c = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sin(3x+2)\,dx$

ΛΥΣΗ

$$\int \sin(3x+2)\,dx$$

Θέτουμε $3x+2 = u$

$$3\,dx = du$$

$$dx = \frac{du}{3}$$

Οπότε

$$\int \sin u \,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = \frac{1}{3}(-\cos u) + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\cos(3x+2)\right) + c = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \cos \frac{x}{5}\, dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε

$$u = \frac{x}{5}$$

$$du = \frac{1}{5}\, dx$$

$$dx = 5\, du$$

Οπότε :

$$\int \cos \frac{x}{5}\, dx = \int 5 \cdot \cos u\, du = 5 \int \cos u\, du$$

$$= 5 \sin u + c = 5 \sin \frac{x}{5} + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \cos^n x \sin x\, dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $u = \cos x$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow du = -\sin x\, dx$$

Οπότε:

$$\int \cos^n x \sin x\, dx = \int u^n (-du) = -\int u^n\, du$$

$$= -\frac{u^{n+1}}{n+1} + c = -\frac{\cos x^{n+1}}{n+1} + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \cos^3 x \, dx$

ΛΥΣΗ

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= \int (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx = \int \cos x \, dx - \int \cos x \sin^2 x \, dx$$

$$= \sin x - \int \cos x \cdot \sin^2 x \, dx$$

Θέτουμε $u = \sin x$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$du = \cos x \, dx$$

Άρα

$$\sin x - \int \underbrace{\sin^2 x}_{u^2} \, \underbrace{\cos x \, dx}_{du} = \sin x - \int u^2 \, du$$

$$= \sin x - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

ΛΥΣΗ

Ο παρανομαστής γράφεται ως:

$$\sqrt{x^2+2x+2} = \sqrt{x^2+2x+1+1} = \sqrt{(x+1)^2+1}$$

Άρα

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx$$

Θέτουμε $u = x+1$

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$$

Άρα

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx = \int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,du$$

Πολ/ζουμε με 2

$$\int \frac{2u}{2\sqrt{u^2+1}}\,du$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{u^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u^2+1}}\left(u^2+1\right)' = \frac{2u}{2\sqrt{u^2+1}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$$

Άρα $\displaystyle\int \frac{2u}{2\sqrt{u^2+1}}\,du = \int \left(\sqrt{u^2+1}\right)' du$

$$= \sqrt{u^2+1} + c = \sqrt{(x+1)^2+1} + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (2x-1)(x^2-x+5)^4\,dx$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $u = x^2 - x + 5$

$du = (2x-1)\,dx$

Άρα $\int (2x-1)(x^2-x+5)^4\,dx$

$$= \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + c = \frac{(x^2-x+5)^5}{5} + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (x-2)(x^2-4x+1)^5 \, dx$$

ΛΥΣΗ

Θέταμε $u = x^2-4x+1$

$du = (2x-4)dx$ ή $du = 2(x-2)dx$

Άρα

$$\int (x-2)(x^2-4x+1)^5 \, dx = \int \frac{1}{2} u^5 \, du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^5 \, du = \frac{1}{2}\frac{u^6}{6} + c = \frac{(x^2-4x+1)^6}{12} + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \sqrt{3x-2}\, dx$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $u = 3x-2$

$du = 3\,dx$

$dx = \frac{1}{3}\,du$

Άρα

$$\int \sqrt{3x-2}\, dx = \int \sqrt{u}\, \frac{1}{3}\, du$$

$$= \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{9} + c = \frac{2(3x-2)^{\frac{3}{2}}}{9} + c$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Όταν έχουμε ρίζα, συνήθως ονομάζουμε u την υπόρριζη ποσότητα

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Τύπος: $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

Χρησιμοποιείται κυρίως σε ολοκλήρωση γινομένου δύο συναρτήσεων.

Συγκεκριμένα εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση στις παρακάτω γενικές περιπτώσεις:

(α) (πολυωνυμική) (εκθετική), με παράγουσα εκθετική

(β) (πολυωνυμική) (τριγωνομετρική), με παράγουσα τριγωνομετρική

(γ) (πολυωνυμική) (λογαριθμική), με παράγουσα πολυωνυμική

(δ) (εκθετική) (τριγωνομετρική), με παράγουσα όποια θέλουμε

Κάνουμε διαδοχική εφαρμογή της μεθόδου μέχρι να εξαντληθούν οι δυνάμεις του πολυωνύμου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $I_1 = \int \ln x \, dx$

ΛΥΣΗ

$$I_1 = \int \ln x \, dx = \int (x)' \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c, \ c \in \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $I_2 = \int \ln^2(x+1) \, dx$

ΛΥΣΗ

$$I_2 = \int \ln^2(x+1) \, dx = \int (x+1)' \ln^2(x+1) \, dx$$

$$= (x+1) \ln^2(x+1) - \int \cancel{(x+1)} \frac{1}{\cancel{x+1}} 2 \ln(x+1) \, dx$$

$$= (x+1) \ln^2(x+1) - \int 2 \ln(x+1) \, dx$$

$$= (x+1) \ln^2(x+1) - 2 \int (x+1)' \ln(x+1) \, dx$$

$$= (x+1) \ln^2(x+1) - 2 (x+1) \ln(x+1) - \left[-2 \int \cancel{(x+1)} \frac{1}{\cancel{x+1}} dx \right]$$

$$= (x+1) \ln^2(x+1) - 2 (x+1) \ln(x+1) + 2 \int dx$$

$$= (x+1) \ln^2(x+1) - 2 (x+1) \ln(x+1) + 2x + c, \ c \in \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I=\int (x^2+x)e^x dx$

ΛΥΣΗ

$$I=\int (x^2+x)e^x dx = \int (x^2+x)(e^x)' dx$$

$$= (x^2+x)e^x - \int (2x+1)e^x dx$$

$$= (x^2+x)e^x - \int (2x+1)(e^x)' dx$$

$$= (x^2+x)e^x - (2x+1)e^x - \left[-\int 2e^x dx\right]$$

$$= (x^2+x)e^x - (2x+1)e^x + 2e^x + c \quad , c\in\mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I=\int (x^2+2x+3)\ln x\, dx$

ΛΥΣΗ

$$I=\int (x^2+2x+3)\ln x\, dx = \int \left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)' \ln x\, dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\frac{1}{x} dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3}+x+3\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\ln x - \left(\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right) + c$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} - 3x + c \quad , c\in\mathbb{R}$$

Άσκηση

Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x^3 e^{-x} dx$

ΛΥΣΗ

$$\int x^3 e^{-x} dx = -\int x^3 (e^{-x})' dx$$

$$= -x^3 e^{-x} + \int 3x^2 e^{-x} dx$$

$$= -x^3 e^{-x} + 3\int x^2 e^{-x} dx$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3\int x^2 (e^{-x})' dx$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 3\int (x^2)' e^{-x} dx$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6\int x e^{-x} dx$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6\int x (e^{-x})' dx$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} + 6\int e^{-x} dx$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} - 6 e^{-x} + c$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int e^{2x+1}\cos(3x)\,dx$

Λύση

$$I=\int e^{2x+1}\cos(3x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \left(e^{2x+1}\right)'\cos(3x)\,dx$$

$$\overset{\text{παραγ.}}{\underset{\text{ολοκλ.}}{=}} \frac{1}{2}e^{2x+1}\cos(3x)-\frac{1}{2}\int e^{2x+1}\left(\cos(3x)\right)'dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x+1}\cos(3x)-\frac{1}{2}\int e^{2x+1}\left(-3\sin(3x)\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x+1}\cos(3x)+\frac{3}{2}\int e^{2x+1}\sin(3x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x+1}\cos(3x)+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\left(e^{2x+1}\right)'\sin(3x)\,dx$$

$$\overset{\text{παραγ.}}{\underset{\text{ολοκλ.}}{=}} \frac{1}{2}e^{2x+1}\cos(3x)+\frac{3}{4}e^{2x+1}\sin(3x)-\frac{3}{4}\int e^{2x+1}\cdot 3\cos(3x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x+1}\cos(3x)+\frac{3}{4}e^{2x+1}\sin(3x)-\frac{9}{4}\int e^{2x+1}\cos(3x)\,dx$$

Apa

$$I = \frac{1}{2} e^{2x+1} \cos(3x) + \frac{3}{4} e^{2x+1} \sin(3x) - \frac{9}{4} \cdot I$$

$$\frac{13}{4} I = \frac{1}{2} e^{2x+1} \cos(3x) + \frac{3}{4} e^{2x+1} \sin(3x)$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{13} e^{2x+1} \left[\cos(3x) + \sin(3x) \right] + C$$

∇ Πως αντιμετωπίζουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \sin^{\nu}x \, dx \quad , \quad \int \cos^{\nu}x \, dx$$

• Αν το ν είναι άρτιος, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους αποτετραγωνισμού

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a \quad , \quad 2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$$

Άσκηση Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \cos^2(2x+3)\, dx$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $2x+3 = u$

$2dx = du$

Άρα

$$I = \int \frac{1}{2}\cos^2 u \, du = \frac{1}{2}\int \cos^2 u \, du$$

$$= \frac{1}{4}\int 2\cos^2 u \, du = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2u)\, du$$

$$= \frac{1}{4}\int du + \frac{1}{4}\int \cos 2u \, du = \frac{1}{4}u + \frac{\sin 2u}{8} + c$$

$$= \frac{1}{4}(2x+3) + \frac{1}{8}\sin(4x+6) + c$$

• Αν το ν είναι περιττός, τότε θέτουμε $u = \cos x$ ή $u = \sin x$ αντίστοιχα, σπάζοντας συγχρόνως σε γινόμενο:

$$\sin^{\nu} x = \sin^{\nu-1} x \cdot \sin x \quad \text{ή} \quad \cos^{\nu} x = \cos^{\nu-1} x \cdot \cos x$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\int \cos^3 x \, dx$

ΛΥΣΗ

Θέτω $u = \sin x$

$du = \cos x dx$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - u^2$

Άρα

$$\int \cos^3 x \, dx = \int (1-u^2) du = u - \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

2. $\int \sin^2 3x \, dx$

ΛΥΣΗ

$$\int \sin^2 3x \, dx = \int \frac{1 - \cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + c$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$$

ΛΥΣΗ

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 9-8 = 1 > 0$

$$\rho_{1,2} = \frac{3\pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$ Άρα $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$

και $P(x) = (x-1)(x-2)$

Επομένως $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ (αναλύουμε το πηλίκο σε άθροισμα)

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Leftrightarrow 1 = A(x-2) + B(x-1)$$

$\Rightarrow 1 = Ax - 2A + Bx - B$

$\Rightarrow 1 = (A+B)x - 2A - B$

$$\left.\begin{array}{l} A+B = 0 \Rightarrow A = -B \\ -2A - B = 1 \Rightarrow 2A = B \end{array}\right\} \boxed{A = -1} \quad \boxed{B = 1}$$

Scanned with CamScanner

Άρα $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$

$$= \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}\right] dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right) dx$$

$$= -\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

Λύση

$\Delta = 1 > 0$, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 3$

$P(x) = (x-3)(x-2)$

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

$\Leftrightarrow \quad 1 = A(x-2) + B(x-3)$

$\Leftrightarrow \quad 1 = Ax - 2A + Bx - 3B$

$\Leftrightarrow \quad 1 = (A+B)x - 2A - 3B$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0 \\ -2A-3B&=1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\boxed{A=1} \\ &\boxed{B=-1} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{1}{(x-3)(x-2)}dx = \int \left[\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}\right] dx$$

$$= \int \frac{1}{x-3}dx + \int -\frac{1}{x-2}dx = \int \frac{1}{x-3}dx - \int \frac{1}{x-2}dx$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + c = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{3x^2-x-14}$$

Λύση

$\Delta = 169 > 0$, $\rho_1 = -2$, $\rho_2 = \frac{7}{3}$

$P(x) = 3x^2 - x - 14 = 3(x+2)(x-7/3)$

$$\int \frac{dx}{3x^2-x-14} = \int \frac{dx}{3(x+2)(x-7/3)} = \frac{1}{3}\int \left[\frac{A}{x-7/3} + \frac{B}{x+2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{A}{x-7/3}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{B}{x+2}\,dx = \frac{A}{3}\int \frac{1}{x-7/3}\,dx + \frac{B}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{A}{3}\ln\left|x-\frac{7}{3}\right| + \frac{B}{3}\ln|x+2| + C$$

Αρκεί να υπολογίσω την τιμή του A και του B.

$$\frac{1}{\left(x-\frac{7}{3}\right)(x+2)} = \frac{A}{x-\frac{7}{3}} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow 1 = A(x+2) + B(x-7/3)$$

$$\Leftrightarrow 1 = (A+B)x + 2A - \frac{7}{3}B$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0 \\ 2A-\frac{7}{3}B&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A = 3/13} \quad \boxed{B = -3/13}$$

Apa

$$\int \frac{1}{3x^2-x-14}\,dx = \frac{3/13}{3}\ln\left|x-\frac{7}{3}\right| + \frac{-3/13}{3}\ln|x+2| + c$$

$$= \frac{1}{13}\ln\left|\frac{x-\frac{7}{3}}{x+2}\right| + c$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx$

Λύση

$\Delta=0$, $\rho_{1,2}=2$ και $P(x)=(x-2)^2$

$$\int \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \int (x-2)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2-6x+9}\,dx$

ΛΥΣΗ

$\Delta=0$, $\rho_{1,2}=3$ και $P(x)=(x-3)^2$

$$\int \frac{1}{x^2-6x+9}\,dx = \int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \int (x-3)^{-2}\,dx = \frac{(x-3)^{-2+1}}{-2+1}+c$$

$$= \frac{(x-3)^{-1}}{-1}+c = -\frac{1}{x-3}+c$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{2x^2-4x+2}dx$

ΛΥΣΗ

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 16-16=0$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{4}{4} = 1$$

Άρα $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)$

$$= 2(x-1)(x-1) = 2(x-1)^2$$

$$\int \frac{1}{2x^2-4x+2}dx = \int \frac{1}{2(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{2}(x-1)^{-2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x-1)^{-2}dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{2(x-1)} + c$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^3-x}\,dx$

ΛΥΣΗ

$$\int \frac{1}{x^3-x}\,dx = \int \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx = \int \frac{1}{x(x-1)(x+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx + \int \frac{\Gamma}{x+1}\,dx$$

Υπολογίζουμε τα A, B, Γ:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + \Gamma x(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = Ax^2 + Ax - Ax - A + Bx^2 + Bx + \Gamma x^2 - \Gamma x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = (A+B+\Gamma)x^2 + (B-\Gamma)x - A$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+\Gamma = 0 \\ B-\Gamma = 0 \\ -A = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ B = \Gamma = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\int \frac{1}{x^3-x}\,dx = \int -\frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1/2}{x-1}\,dx + \int \frac{1/2}{x+1}\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^2+6}{x^3-3x^2+2x}\,dx$$

ΛΥΣΗ

$$x^3-3x^2+2x = x(x-1)(x-2)$$

$$\frac{x^2+6}{x^3-3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x-2}$$

$$\Rightarrow x^2+6 = A(x-1)(x-2) + B(x-2)x + \Gamma(x-1)x$$

$$\Rightarrow x^2+6 = A(x^2-3x+2) + Bx(x-2) + \Gamma x(x-1)$$

$$\Rightarrow x^2+6 = (A+B+\Gamma)x^2 + (-3A-2B-\Gamma)x + 2A.$$

$$\begin{aligned} A+B+\Gamma &= 1 \\ -3A-2B-\Gamma &= 0 \\ 2A &= 6 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{A=3}$$

$$\left\{\begin{aligned} B+\Gamma &= -2 \\ 2B+\Gamma &= -9 \\ A &= +3 \end{aligned}\right\} \boxed{\begin{aligned} A &= +3 \\ B &= -7 \\ \Gamma &= 5 \end{aligned}}$$

Άρα $I = \int \frac{x^2+6}{x^3-3x^2+2x}\,dx$

$= \int \left(\frac{3}{x} - \frac{7}{x-1} + \frac{5}{x-2} \right) dx$

$= 3\log|x| - 7\log|x-1| + 5\log|x-2| + c$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2x-3}{x^2+5x+6}\,dx$$

ΛΥΣΗ

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

$$\frac{2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\Rightarrow 2x-3 = A(x+3)+B(x+2)$$

$$\Rightarrow 2x-3 = Ax+3A+Bx+2B$$

$$\Rightarrow 2x-3=(A+B)x+3A+2B$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=2 \\ 3A+2B=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-7 \\ B=9 \end{array}$$

Apa $\int \frac{2x-3}{x^2+5x+6}\,dx = \int\left(\frac{-7}{x+2} + \frac{9}{x+3}\right)dx$

$= -7\log|x+2| + 9\log|x+3| + c$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^3+5x^2+3x-9}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$

ΛΥΣΗ

Πιθανές ρίζες του αριθμητή είναι οι ακέραιοι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλ του -9 Οπότε πιθανές ρίζες είναι οι $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής του κλάσματος διαιρείται με το $(x-1)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+5x^2+3x-9 & x-1 \\ \cline{2-2}
-x^3+x^2 & x^2+6x+9 \\ \cline{1-1}
\quad 6x^2+3x-9 & \\
\quad -6x^2+6x & \\ \cline{1-1}
\qquad 9x-9 & \\
\qquad -9x+9 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Οπότε γράφουμε $x^3+5x^2+3x-9 = (x-1)(x^2+6x+9)$

$$= (x-1)(x+3)^2$$

Scanned with CamScanner

Άρα μπορούμε να απλοποιήσουμε την έκφραση:

$$\frac{x^3+5x^2+3x-9}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)^2}{\cancel{(x-1)}(x^2-2x-5)} = \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+5}, \quad x \neq 1$$

Άρα έχουμε:

$$I = \int \frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{x^2+8x-2x+5+4}{x^2-2x+5}\,dx$$

$$= \int \frac{(x^2-2x+5)+(8x+4)}{x^2-2x+5}\,dx = \int \left(\frac{x^2-2x+5}{x^2-2x+5} + \frac{8x+4}{x^2-2x+5} \right) dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{8x+4}{x^2-2x+5} \right) dx = \int 1\,dx + \int \frac{8x+4}{x^2-2x+5}\,dx$$

$$= x + \int \frac{8x+4}{x^2-2x+5}\,dx$$

Το ολοκλήρωμα $\int \frac{8x+4}{x^2-2x+5}\,dx$ είναι ένα ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης με αριθμητή ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού και παρανομαστή ένα πολυώνυμο 2ου βαθμού το οποίο δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε δεν παραγοντοποιείται.

Για να το υπολογίσουμε θα γράψουμε τον αριθμητή ως άθροισμα της παραγώγου του παρανομαστή συν (πιθανά) έναν αριθμό, πολ/σμένα με έναν κατάλληλο συντελεστή. Στη συνέχεια θα σπάσουμε το ολοκλήρωμα σε 2 ολοκληρώματα, το ένα από τα οποία θα έχει ως αριθμητή την παράγωγο του παρανομαστή, το δεύτερο τον αριθμό.

Οπότε θα κάνουμε τις εξής πράξεις:

Στον αριθμητή θέλουμε το $(2x-2)$ την παράγωγο του παρανομ.

$$\int \frac{8x+4}{x^2-2x+5}dx = 4\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5}dx = 4\int \frac{2x-2+3}{x^2-2x+5}dx$$

$$= 4\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + 4\int \frac{3}{x^2-2x+5}dx$$

$$= 4\ln(x^2-2x+5) + 4\int \frac{3}{x^2-2x+5}dx \quad (1)$$

Για το ολοκλήρωμα $4\int \frac{3}{x^2-2x+5}dx$ θα εφαρμόσουμε συμπλήρωση τετραγώνου ώστε να οδηγηθούμε στον τύπο της ολοκλήρωσης που μας δίνει ως αποτέλεσμα τη συνάρτηση τόξο εφαπτομένη.

Έχουμε ότι: $4\int \frac{3}{x^2-2x+5}dx = 6\int \frac{2}{(x-1)^2+2^2}dx$

(Θέτουμε: $u = x-1 \Leftrightarrow du = dx$)

$$= 6\arctan\left(\frac{u}{2}\right)+c = 6\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

Άρα $(1) = 4\ln(x^2-2x+5) + 6\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{t+2}{t^2-6t+10}\,dt$$

ΛΥΣΗ

$$\int \frac{t+2}{t^2-6t+10}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2(t+2)}{t^2-6t+10}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t+4}{t^2-6t+10}\,dt$$

Θέλουμε να εμφανίσουμε στον αριθμητή την παράγωγο του παρανομαστή

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t-6+10}{t^2-6t+10}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t-6}{t^2-6t+10}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{10}{t^2-6t+10}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2-6t+10| + \int \frac{5}{t^2-6t+10}\,dt \quad (1)$$

$$\int \frac{5}{t^2-6t+10} = \int \frac{5}{t^2-2\cdot 3t+9-9+10}\,dt$$

$$= \int \frac{5}{(t-3)^2+1}\,dt \left(\begin{matrix} \text{θέτω} & u=t-3 \\ (=) & du=dt \end{matrix}\right) = \int \frac{5}{u^2+1}\,du$$

$$= 5\int \frac{1}{u^2+1}\,du = 5\arctan(u) + c = 5\arctan(t-3) + c$$

Άρα $(1) = \frac{1}{2}\ln|t^2-6t+10| + 5\arctan(t-3) + c$

Εναλλακτικά, σε παρόμοια ολοκληρώματα, μπορούμε να εφαρμόσουμε από την αρχή συμπλήρωση τετραγώνου όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\int \frac{t+2}{t^2-6t+10}\,du = \int \frac{t+2}{t^2-2\cdot 3t+9-9+10}\,dt = \int \frac{t+2}{(t-3)^2+1}\,dt$$

Θέτω $u = t-3$

$du = dt$

$$= \int \frac{u+3+2}{u^2+1}\,du = \int \frac{u+5}{u^2+1}\,du = \int \frac{u}{u^2+1}\,du + \int \frac{5}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du + \int \frac{5}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u^2+1| + 5\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\ln|u^2+1| + 5\arctan(u) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left((t-3)^2+1\right) + 5\arctan(t-3) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2-6t+10\right) + 5\arctan(t-3) + c$$

Με τον ίδιο τρόπο θα λύσουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{8x+4}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{8x+4}{x^2-2x+4+1}\,dx = \int \frac{8x+4}{(x-1)^2+4}\,dx$$

θέτω

$$\underset{du=dx}{\overset{u=x-1}{=\!=}} \int \frac{8(u+1)+4}{u^2+4}\,du = \int \frac{8u+12}{u^2+4}\,du$$

$$= \int \frac{8u}{u^2+4}\,du + \int \frac{12}{u^2+4}\,du$$

$$= 4\int \frac{2u}{u^2+4}\,du + 6\int \frac{2}{u^2+2^2}\,du$$

→ θέλουμε να έχουμε στον αριθμητή την παράγωγο του παρανομαστή

$$= 4\ln|u^2+4| + 6\arctan\left(\frac{u}{2}\right) + c$$

$$= 4\ln\left|(x-1)^2+4\right| + 6\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

$$= 4\ln|x^2-2x+5| + 6\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

Β) Περίπτωση που ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο από τον παρανομαστή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$I = \int \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}\,dx$$

ΛΥΣΗ

• Αναλύουμε το κλάσμα σε επιμέρους κλάσματα

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$x-1 = A(x-2) + B(x+1)$$

$$x-1 = Ax - 2A + Bx + B$$

$$x-1 = (A+B)x + (B-2A)$$

• Εξισώνουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του x

$$\left.\begin{aligned} A+B &= 1 \\ -2A+B &= -1 \end{aligned}\right\} \boxed{A = \frac{2}{3}} \quad \boxed{B = \frac{1}{3}}$$

Άρα $$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{x-2}$$

$$I = \int \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{2}{3}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx = \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}\,dx$$

ΛΥΣΗ

- Αναλύουμε τον παρονομαστή σε παράγοντες

$$\frac{x+2}{x^2+2x-8} = \frac{x+2}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}$$

$$x+2 = A(x-2) + B(x+4)$$

$$x+2 = (A+B)x + (4B-2A)$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ 4B-2A=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{A=\frac{1}{3}} \quad \boxed{B=\frac{2}{3}}$$

Οπότε

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x-8}\,dx = \int\left(\frac{1}{3(x+4)} + \frac{2}{3(x-2)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+4| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x-3}{x^3-3x^2+2x}\,dx$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι ο παρανομαστής παραγοντοποιείται στη μορφή:

$$x^3-3x^2+2x = x(x-1)(x-2)$$

Οπότε αναλύουμε σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$\frac{x-3}{x^3-3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x-2}$$

$$x-3 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + \Gamma x(x-1)$$

$$x-3 = (A+B+\Gamma)x^2 + (-3A-2B-\Gamma)x + 2A$$

$$\left.\begin{aligned} A+B+\Gamma &= 0 \\ -3A-2B-\Gamma &= 1 \\ 2A &= -3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\Gamma = -\frac{1}{2}},\ \boxed{B=2},\ \boxed{A=-\frac{3}{2}}$$

Οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{(x-3)}{x(x-1)(x-2)}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x-2| + c$$

Scanned with CamScanner

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{3x}{2x^2+5x+2}\,dx$$

ΛΥΣΗ

Το πολυώνυμο $2x^2+5x+2$ μπορεί να γραφεί ως $(2x+1)(x+2)$.

Άρα $\dfrac{3x}{2x^2+5x+2} = \dfrac{A}{2x+1} + \dfrac{B}{x+2}$

$$3x = A(x+2) + B(2x+1)$$

$$3x = (A+2B)x + (2A+B)$$

$$\left.\begin{array}{l} A+2B=3 \\ 2A+B=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A=-1} \quad \boxed{B=2}$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται ως εξής:

$$\int \frac{3x}{2x^2+5x+2}\,dx = \int\left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{2x+1}\right)dx$$

$$= \int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{2x+1}\,dx = 2\int \frac{1}{x+2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2\cdot 1}{2x+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{e^t}{e^{2t} + 3e^t + 2}\, dt$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $e^t = x$

$$\Rightarrow e^{2t} + 3e^t + 2 = (e^t)^2 + 3e^t + 2 = x^2 + 3x + 2$$

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$$

$$I = \int \frac{1}{x^2+3x+2}\, dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\, dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = A(x+2) + B(x+1)$$

$$1 = (A+B)x + (2A+B)$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{array}\right\} \quad \boxed{A=1} \quad \boxed{B=-1}$$

Άρα

$$I = \int \frac{1}{x+1}\, dx - \int \frac{1}{x+2}\, dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c = \ln\left|\frac{e^t+1}{e^t+2}\right| + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x-1}{e^x+2}\,dx$

ΛΥΣΗ

$\int \frac{e^x-1}{e^x+2}\,dx$ Θέτω $u=e^x$

$du=e^x dx \Rightarrow dx=\frac{du}{e^x}=\frac{du}{u}$

Οπότε

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+2}\,dx=\int \frac{u-1}{(u+2)u}\,du$$

Έχουμε ότι $\frac{u-1}{u(u+2)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+2}$

$$\left.\begin{aligned} u-1&=A(u+2)+Bu\\ u-1&=(A+B)u+2A\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} A+B&=1\\ 2A&=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{A=-\frac{1}{2}}\quad \boxed{B=\frac{3}{2}}$$

Άρα $\int \frac{e^x-1}{e^x+2}\,dx=\int\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u}+\frac{3}{2}\frac{1}{u+2}\right)du$

$$=\int -\frac{1}{2}\frac{1}{u}\,du+\int \frac{3}{2}\frac{1}{u+2}\,du=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du+\frac{3}{2}\int\frac{1}{u+2}\,du$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|u|+\frac{3}{2}\ln|u+2|+c$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|e^x|+\frac{3}{2}\ln|e^x+2|+c=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\ln(e^x+2)+c$$

* Περίπτωση που ο παρανομαστής μιας ρητής παράστασης αναλύεται σε γινόμενο δύο παραγόντων ενός πρώτου και ενός δευτέρου βαθμού (ο οποίος δεν παραγοντοποιείται)

$$\frac{kx^2+\lambda x+\mu}{(x+a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$$

Το πολυώνυμο x^2+bx+c δεν έχει πραγματικές ρίζες (δηλαδή έχει αρνητική διακρίνουσα) και δεν παραγοντοποιείται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x-1}{x^3+1}\,dx$

ΛΥΣΗ

Το κλάσμα αναλύεται ως εξής:

$$\frac{x-1}{x^3+1} = \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2-x+1}$$

$$x-1 = A(x^2-x+1) + (Bx+\Gamma)(x+1)$$

$$x-1 = (A+B)x^2 + (-A+B+\Gamma)x + (A+\Gamma)$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0 \\ -A+B+\Gamma&=1 \\ A+\Gamma&=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A=-\frac{2}{3}} \quad \boxed{B=\frac{2}{3}} \quad \boxed{\Gamma=-\frac{1}{3}}$$

Οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται ως εξής:

$$\int \frac{(x-1)}{x^3+1}\,dx = \frac{-2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{(2x-1)}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x^2-x+1| + c$$

* Περίπτωση που ο παρανομαστής μιας ρητής παράστασης αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων πρώτου ή και δευτέρου βαθμού καθένας από τους οποίους μπορεί να είναι υψωμένος σε δύναμη μεγαλύτερη της μονάδας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

ΛΥΣΗ

- Πρώτα παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή

$$x^3-x^2-x+1 = x^2(x-1)-(x-1) = (x-1)(x^2-1)$$

$$= (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$$

- Στη συνέχεια αναλύουμε την ρητή παράσταση σε απλά κλάσματα

$$\frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x+1}$$

$$x^2+3 = A(x+1) + B(x-1)(x+1) + \Gamma(x-1)^2$$

$$x^2+3 = (B+\Gamma)x^2 + (A-2\Gamma)x + (A-B-\Gamma)$$

$$\left.\begin{array}{l} B+\Gamma=1 \\ A-2\Gamma=0 \\ A-B-\Gamma=3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \boxed{A=2} \\ \boxed{B=0} \\ \boxed{\Gamma=1} \end{array}$$

Άρα $\frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$

Οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται ως εξής:

$$\int \frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \ln|x+1| + 2\int (x-1)^{-2}\,dx = \ln|x+1| + 2\,\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$= \ln|x+1| - 2(x-1)^{-1} + c$$

$$= \ln|x+1| - \frac{2}{x-1} + c$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^2+3}{x^4-x^3} dx$

ΛΥΣΗ

Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή

$$x^4 - x^3 = x^3(x-1)$$

Στη συνέχεια αναλύουμε τη ρητή παράσταση σε απλά κλάσματα

$$\frac{x^2+3}{x^4-x^3} = \frac{x^2+3}{x^3(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x^3} + \frac{\Delta}{x-1}$$

$$x^2+3 = A(x-1)x^2 + B(x-1)x + \Gamma(x-1) + \Delta x^3$$

$$x^2+3 = (A+\Delta)x^3 + (-A+B)x^2 + (-B+\Gamma)x - \Gamma$$

$$\left.\begin{array}{l} A+\Delta=0 \\ -A+B=1 \\ -B+\Gamma=0 \\ -\Gamma=3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \boxed{A=-4} \\ \boxed{B=-3} \\ \boxed{\Gamma=-3} \\ \boxed{\Delta=4} \end{array}$$

Άρα $I = \int \frac{x^2+3}{x^4-x^3} dx = \int\left(-\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x-1}\right) dx$

$$= -4\int \frac{1}{x} dx - 3\int x^{-2} dx - 3\int x^{-3} dx + 4\int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= -4\ln|x| - 3\frac{x^{-1}}{-1} - 3\frac{x^{-2}}{-2} + 4\ln|x-1| + c$$

$$= 4\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2} + c$$

Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Άσκηση

Αν $\int_1^5 f(x)dx = 2$, $\int_2^5 f(x)dx = 3$ και $\int_1^7 f(x)\,dx = 5$

Να βρείτε τα ολοκληρώματα

(i) $\int_5^2 f(x)\,dx$ (ii) $\int_5^7 f(x)\,dx$ (iii) $\int_1^2 f(x)\,dx$

(iv) $\int_2^7 f(x)\,dx$

ΛΥΣΗ

(i) $\int_5^2 f(x)\,dx = -\int_2^5 f(x)\,dx = -3$

(ii) $\int_5^7 f(x)\,dx = \int_5^1 f(x)\,dx + \int_1^7 f(x)\,dx = -\int_1^5 f(x)\,dx + \int_1^7 f(x)\,dx$

$= -2 + 5 = 3$

(iii) $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx + \int_5^2 f(x)\,dx = 2-3=-1$

(iv) $\int_2^7 f(x)\,dx = \int_2^5 f(x)\,dx + \int_5^1 f(x)\,dx + \int_1^7 f(x)\,dx = 3-2+5=6$

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα:

(i) $\int_1^3 (4x-3)\,dx$ (ii) $\int_2^3 (3x^2-2x+5)\,dx$ (iii) $\int_0^1 (2xe^x + x^2e^x)\,dx$

(iv) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}\,dx$

ΛΥΣΗ

(i) $\int_1^3 (4x-3)\,dx = \int_1^3 4x\,dx - \int_1^3 3\,dx = 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 - 3\left[x\right]_1^3$

$= 2(9-1) - 3(3-1) = 10$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(ii) $$\int_2^3 (3x^2-2x+5)\,dx = \int_2^3 3x^2\,dx - \int_2^3 2x\,dx + \int_2^3 5\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 + 5\left[x\right]_2^3$$

$$= (3^3-2^3) - (3^2-2^2) + 5(3-2) = 19$$

(iii) $$\int_0^1 (2xe^x + x^2e^x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^2e^x)'\,dx = \left[x^2e^x\right]_0^1 = e - 0 = e$$

(iv) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(\sin(x))'x - \sin(x)(x)'}{x^2}\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'dx = \left[\frac{\sin(x)}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0 - \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

Ολοκληρώματα σύνθετων συναρτήσεων

I. $$\int_a^b e^{f(x)} f'(x)\,dx = \left[e^{f(x)}\right]_a^b$$

II. $$\int_a^b \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = \left[2\sqrt{f(x)}\right]_a^b$$

III. $$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left[\ln(f(x))\right]_a^b$$

IV. $$\int_a^b \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,dx = \left[-\frac{1}{f(x)}\right]_a^b$$

V. $$\int_a^b f^k(x) f'(x)\,dx = \left[\frac{(f(x))^{k+1}}{k+1}\right]_a^b$$

Μεθοδολογία Αν το ολοκλήρωμα μας θυμίζει κάποια από τις παραπάνω μορφές ολοκληρωμάτων σύνθετων συναρτήσεων, τότε εφαρμόζουμε απευθείας τον αντίστοιχο τύπο. Συνήθως όμως οι συναρτήσεις μοιάζουν πολύ αλλά δεν είναι ίδιες. Τότε φτιάχνουμε την $f'(x)$ με κάποια απλή πράξη (π.χ πολ/ζοντας και διαιρώντας με ένα αριθμό) ώστε να αναχθούμε σε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

(i) $\int_0^1 3x^2 e^{x^3+5}\,dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+1}\,dx$

(iv) $\int_1^2 \frac{2x+2}{(x^2+2x)^2}\,dx$ (v) $\int_0^3 (2x-3)(x^2-3x)^5\,dx$

ΛΥΣΗ

(i) $\int_0^1 3x^2 e^{x^3+5}\,dx = \int_0^1 (x^3+5)' e^{x^3+5}\,dx$

$= \int_0^1 \left(e^{x^3+5}\right)' dx = \left[e^{x^3+5}\right]_0^1 = e^6 - e^5$

(ii) $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{(x^3+1)'}{\sqrt{x^3+1}}\,dx = \int_0^1 \left(2\sqrt{x^3+1}\right)' dx$

$= \left[2\sqrt{x^3+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$

(iii) $\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{(x^2+5x+1)'}{x^2+5x+1}\,dx = \int_0^1 \left(\ln(x^2+5x+1)\right)' dx$

$= \left[\ln(x^2+5x+1)\right]_0^1 = \ln 7$

(iv) $\int_1^2 \frac{2x+2}{(x^2+2x)^2} = \int_1^2 \frac{(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2}\,dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2+2x}\right)' dx$

$= \left[-\frac{1}{x^2+2x}\right]_1^2 = -\frac{1}{8}+\frac{1}{3} = \frac{5}{24}$

(v) $\int_0^3 (2x-3)(x^2-3x)^5\,dx = \int_0^3 (x^2-3x)'(x^2-3x)^5\,dx$

$= \int_0^3 \left[\frac{(x^2-3x)^6}{6}\right]' dx = \left[\frac{(x^2-3x)^6}{6}\right]_0^3 = 0$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Άσκηση

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 xe^x\,dx$

ΛΥΣΗ

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x(e^x)'\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 (x)'e^x\,dx$$

$$= (e-0) - \int_0^1 e^x\,dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e-(e-e^0)$$

$$= e^0 = 1$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}\,dx$

Λύση

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}\,dx = \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx = -\int_0^1 x^2 (e^{-x})'\,dx$$

$$= -\left[x^2 e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (x^2)' e^{-x}\,dx$$

$$= -e^{-1} + \int_0^1 2x e^{-x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{e} - \int_0^1 2x (e^{-x})'\,dx$$

$$= -\frac{1}{e} - \left[2x e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (2x)' e^{-x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{e} - (2e^{-1}) + \int_0^1 2e^{-x}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{e} - \left[2e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{3}{e} - (2e^{-1} - 2) = 2 - \frac{5}{e}$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} 2x\sin(2x)\,dx$

ΛΥΣΗ

$$\int_0^{\pi} 2x\sin(2x)\,dx = \int_0^{\pi} 2x\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)' dx$$

$$= \left[-2x\,\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (2x)'\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right) dx$$

$$= \left[-x\cos 2x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right) dx$$

$$= -\pi\cos 2\pi + \int_0^{\pi} \cos 2x\,dx = -\pi + \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi + \frac{\sin 2\pi}{2} - \frac{\sin 0}{2} = -\pi$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(i) $\int_1^2 (3x^2+1)\ln x\, dx$ (ii) $\int_1^e \ln x\, dx$

ΛΥΣΗ

$$\int_1^2 (3x^2+1)\ln x\, dx = \int_1^2 (x^3+x)' \ln x\, dx$$

$$= \Big[(x^3+x)\ln x\Big]_1^2 - \int_1^2 (x^3+x)(\ln x)'\, dx$$

$$= 10\ln 2 - \int_1^2 (x^3+x)\frac{1}{x}\, dx$$

$$= 10\ln 2 - \int_1^2 (x^2+1)\, dx$$

$$= 10\ln 2 - \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^2$$

$$= 10\ln 2 - \left[\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-1\right]$$

$$= 10\ln 2 - \frac{10}{3}$$

(ii) $$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e (x)'\ln x\,dx = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'\,dx$$

$$= e\ln e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,dx = e - \int_1^e 1\,dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi e^x \sin x\,dx$

ΛΥΣΗ

$$I = \int_0^\pi e^x \sin x\,dx = \int_0^\pi (e^x)'\sin x\,dx$$

$$= \left[e^x \sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x(\sin x)'\,dx$$

$$= e^\pi \sin\pi - e^0 \sin 0 - \int_0^\pi e^x \cos x\,dx =$$

$$= -\int_0^\pi (e^x)'\cos x = -\left[e^x \cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x(\cos x)'\,dx$$

$$= -\left(e^\pi \cos\pi - e^0\cos 0\right) + \int_0^\pi e^x(-\sin x)\,dx$$

$$= -(-e^\pi - 1) - \int_0^\pi e^x \sin x\,dx = e^\pi + 1 - I$$

Άρα $I = e^\pi + 1 - I \Leftrightarrow 2I = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I = \dfrac{e^\pi + 1}{2}$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Άσκηση Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(i) $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ (ii) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$ (iii) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

ΛΥΣΗ

(i) $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

Θέτω $u=x^2+1$. Άρα $du=2x\,dx$

Για τα άκρα του ολοκληρώματος: Για $x=0$, $u=1$

Για $x=1$, $u=2$

Άρα $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^2 \sqrt{u}\,du = \int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\,du$

$$= \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^2 = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$$

(ii) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

Θέτω $u = \ln x$, άρα $du = \frac{1}{x}dx$

- Για $x = 1$, $u = 0$
- Για $x = e$, $u = 1$

Άρα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\,du$

$$= \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2\left[\sqrt{u}\right]_0^1 = 2(\sqrt{1}-\sqrt{0})$$
$$= 2$$

Scanned with CamScanner

(iii) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Θέτω $u=\sqrt{x+1}$

$u^2 = x+1$

Άρα $2u\,du = dx$

• Για $x=0$, $u=1$

• Για $x=3$, $u=2$

Άρα $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^2 \frac{u^2-1}{\cancel{u}} \cdot 2\cancel{u}\,du$

$= 2\int_1^2 (u^2-1)\,du = 2\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^2$

$= 2\left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{8}{3}$

Scanned with CamScanner

(Συνδυαστικό παραγοντικής - αλλαγής μεταβλητής)

Άσκηση Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x \ln(9+x^2)dx$$

ΛΥΣΗ

$$\int_0^1 x \ln(9+x^2)\, dx$$

Θέτω $u = 9+x^2$, άρα $du = 2x\,dx$

- Για $x=0$, $u=9$
- Για $x=1$, $u=10$

Άρα

$$\int_9^{10} \frac{1}{2} \ln u \, du = \frac{1}{2}\int_9^{10} \ln u \, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_9^{10} (u)' \ln u \, du = \frac{1}{2}\left[u \ln u\right]_9^{10} - \frac{1}{2}\int_9^{10} u (\ln u)' \, du$$

$$= \frac{1}{2}(10\ln 10 - 9\ln 9) - \frac{1}{2}\int_9^{10} 1 \, du$$

$$= \frac{1}{2}(10\ln 10 - 9\ln 9) - \frac{1}{2}\left[u\right]_9^{10}$$

$$= \frac{1}{2}(10\ln 10 - 9\ln 9) - \frac{1}{2}$$

Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int_4^5 \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}\,dx$

Λύση

(i) $\displaystyle\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$\Leftrightarrow 2x+1 = A(x-3) + B(x-2)$

$\Leftrightarrow 2x+1 = (A+B)x + (-3A-2B)$

$$\left.\begin{aligned} A+B &= 2 \\ -3A-2B &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{Άρα } \boxed{B=7} \quad \boxed{A=-5}$$

Άρα $\displaystyle\int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int_4^5 \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int_4^5 \left(\frac{-5}{x-2} + \frac{7}{x-3}\right)dx$

$= -5\big[\ln|x-2|\big]_4^5 + 7\big[\ln|x-3|\big]_4^5$

$= -5(\ln 3 - \ln 2) + 7(\ln 2 - \ln 1) = 12\ln 2 - 5\ln 3$

Scanned with CamScanner

(ii) $\displaystyle\int_4^5 \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}\,dx = \int_4^5 \frac{x^2-5x+2x+6+1}{x^2-5x+6}\,dx$

$$= \int_4^5 \left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+6} + \frac{2x+1}{x^2-5x+6} \right) dx$$

$$= \int_4^5 1\,dx + \int_4^5 \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$$

→ το έχουμε υπολογίσει στο ερώτημα (i)

$$= [x]_4^5 + 12\ln 2 - 5\ln 3 = 1 + 12\ln 2 - 5\ln 3$$

Ολοκληρώματα με απόλυτες τιμές

Συνήθως συναντάμε τη μορφή $\int_a^b |f(x)|dx$.
Αρχικά λύνω την εξίσωση $f(x)=0$, βρίσκουμε το πρόσημο της f και βγάζουμε την απόλυτη τιμή

Άσκηση Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^2 (x^2-|x-1|)\,dx$

Λύση

$$\int_0^2 (x^2-|x-1|)\,dx$$

Έχουμε $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

Άρα, έστω $f(x)=x^2-|x-1| \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+x-1, & x<1 \\ x^2-x+1, & x\geq 1 \end{cases}$

Άρα $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^2+x-1)\,dx+\int_1^2 (x^2-x+1)\,dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=\frac{5}{3}$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{3} (2|x-2|+1)\,dx$

Λύση

Έχουμε $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Έστω $f(x) = 2|x-2|+1 \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -2(x-2)+1, & x<2 \\ 2(x-2)+1, & x \geq 2 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left[-2(x-2)+1\right] dx + \int_{2}^{3} \left[2(x-2)+1\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x+5)\,dx + \int_{2}^{3} (2x-3)\,dx = \left[-x^2+5x\right]_{-1}^{2} + \left[x^2-3x\right]_{2}^{3}$$

$$= \left[(-4+10)-(-1-5)\right] + \left[(9-9)-(4-6)\right] = 14$$

Ιδιότητες ορισμένων ολοκληρωμάτων

1. $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

2. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

4. $(\forall x\in[a,b]: 0\le f(x)) \Rightarrow 0 \le \int_a^b f(x)\,dx$

5. $(\forall x\in[a,b]: g(x)\le f(x)) \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$

6. $(\forall x\in[a,b]: A\le f(x)\le B) \Rightarrow A\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le B\cdot(b-a)$

7. $\exists x_0\in[a,b]: f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

(Οι συναρτήσεις $f(x), g(x)$ θεωρούνται συνεχείς)

Άσκηση

Αν η παράγωγος της συνάρτησης f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $f(0)=1$ και $f(1)=2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}\right) dx$ (β) $\displaystyle\int_0^1 x\left(2f(x)+xf'(x)\right) dx$

ΛΥΣΗ

(α) $$\int_0^1 \left[\left(f'(x)-f(x)\right)e^{-x}\right] dx = \int_0^1 \left(f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[f'(x)e^{-x} + f(x)\left(e^{-x}\right)'\right] dx = \int_0^1 \left(f(x)e^{-x}\right)' dx$$

$$= \left[e^{-x} f(x)\right]_0^1 = e^{-1} f(1) - e^{0} f(0) = \frac{2}{e} - 1$$

(B) $\int_0^1 x\left(2f(x)+xf'(x)\right)dx$

$= \int_0^1 \left(2xf(x)+x^2f'(x)\right)dx$

$= \int_0^1 \left[(x^2)'f(x)+x^2f(x)\right]dx$

$= \int_0^1 \left(x^2f(x)\right)'dx$

$= \left[x^2f(x)\right]_0^1 = f(1)-0 = f(1) = 2$

Άσκηση

Έστω μία συνάρτηση f με $f(x) \neq 0$ και $f^3(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha)$ και $-f(\beta)$ ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 5x - 1 = 0$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση που μας δίνεται $f^3(x) + f'(x) = 0$ για να τη φέρουμε σε τέτοια μορφή ώστε η f να είναι αρχική μιας άλλης συνάρτησης

Έχουμε ότι: $f^3(x) + f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f^3(x) = -f'(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \cdot f^2(x) = -f'(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{1}{f(x)}\right)'$$

Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^\beta \left(\frac{1}{f(x)}\right)' dx = \frac{1}{f(\beta)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a)-f(\beta)}{f(a)\cdot f(\beta)} \quad (1)$$

Έχουμε ότι τα $f(a)$ και $-f(\beta)$ ρίζες της εξίσωσης $3x^2-5x-1=0$

Με τη χρήση των τύπων Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο ριζών

$S = -\frac{\beta}{a} \Leftrightarrow f(a)-f(\beta) = \frac{5}{3}$

$P = \frac{\gamma}{a} \Leftrightarrow f(a)(-f(\beta)) = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow f(a)f(\beta) = \frac{1}{3}$

Άρα η (1) γράφεται: $\displaystyle\int_a^\beta f(x)\,dx = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = 5$

Άσκηση

Έστω μία συνάρτηση f με $f'(x) = 2\sin x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(\sqrt{\pi}) = 1$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)\,dx$

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε την f', άρα για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε την κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} (x)' f(x)\,dx = \left[x f(x)\right]_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} x f'(x)\,dx$$

$$= \left[x f(x)\right]_0^{\sqrt{\pi}} - \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot 2\sin x^2\,dx$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot f(\sqrt{\pi}) - 0 - \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin x^2\,dx$$

$$= \sqrt{\pi} - \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin x^2\,dx$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$-\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin x^2 \, dx$$

Θέτουμε:

$$x^2 = t$$

$$2x \, dx = dt$$

Για τα άκρα το ολοκληρώματος: • Για $x=0 \Rightarrow t=0$

• Για $x=\sqrt{\pi} \Rightarrow t=\pi$

Άρα έχουμε ότι:

$$-\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin x^2 \, dx = -\int_0^{\pi} \sin t \, dt$$

$$= \left[\cos t\right]_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -2$$

Άρα

$$I = \sqrt{\pi} - 2$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$ (β) $\int_1^2 \frac{1}{3x-2}\,dx$ (γ) $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$

(δ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$

ΛΥΣΗ

(α) $\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$

Θέτουμε $x^2 = t \Leftrightarrow 2x\,dx = dt$

Υπολογίζουμε τα καινούρια όρια ολοκλήρωσης:

Για $x=0 \Rightarrow t=0$

Για $x=1 \Rightarrow t=1$

Άρα έχουμε: $\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx = \int_0^1 t e^t \frac{1}{2}\,dt$

$= \int_0^1 \frac{t}{2}(e^t)'\,dt = \left[\frac{t}{2}e^t\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{t}{2}\right)' e^t\,dt$

$= \frac{1}{2}e - \int_0^1 \frac{1}{2}e^t\,dt = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}(e-e^0) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}(e-1) = \frac{1}{2}(e-e+1) = \frac{1}{2}$

Scanned with CamScanner

(β) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3x-2}\,dx$

Θέτουμε $3x-2=t$

$3\,dx = dt$

- Για $x=1 \Rightarrow t=1$
- Για $x=2 \Rightarrow t=4$

$$\int_1^2 \frac{1}{3x-2}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{t}\,\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\Big[\ln t\Big]_1^4$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln 4 - \ln 1\right)$$

(γ) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$

Θέτουμε $1+\sin^2 x = t \iff (1+\sin^2 x)'\,dx = dt$

$\iff 2\sin x\cos x\,dx = dt$

$\iff \sin 2x\,dx = dt$

- Για $x=0 \Rightarrow t = 1+\sin^2 0 = 1$
- Για $x=\pi \Rightarrow t = 1+\sin^2 \pi = 1$

Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται ως:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

Αφού είναι γνωστό ότι: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(δ) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$$

(Θα κάνουμε χρήση της σχέσης $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$)

Άρα έχουμε: $$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(\cos^2 x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\left(\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 x)^2\,dx$$

Θέτουμε: $t = \tan x \Rightarrow dt = (\tan x)'\,dx$

$\Rightarrow dt = 1+\tan^2 x\,dx$

• Για $x=0 \Rightarrow t = \tan 0 = 0$

• Για $x = \pi/4 \Rightarrow t = \tan \pi/4 = 1$

Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται ως:

$$I = \int_0^1 (1+t^2)\,dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

(α) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$ (β) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^3 x\,dx$

ΛΥΣΗ

(α) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$

Θα προσπαθήσουμε να εμφανίσουμε μέσα στο ολοκλήρωμα την παράσταση $1+\tan^2 x$, αφού $1+\tan^2 x = (\tan x)'$

$$= \int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x + 1 - 1\,dx = \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1)\,dx - \int_0^{\pi/4} 1\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\tan x)'\,dx - \int_0^{\pi/4} 1\,dx = \left[\tan x\right]_0^{\pi/4} - \left[x\right]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(β) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \tan^3 x \, dx$

Θέταμε $t = \tan x$

$\Leftrightarrow dt = (\tan x)' dx$

$\Leftrightarrow dt = (1+\tan^2 x)\, dx$

$\overset{t=\tan x}{\Longleftrightarrow} \quad dt = (1+t^2)\, dx$

• Για $x=0 \Rightarrow t = \tan 0 = 0$

• Για $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \int_0^{\pi/6} \tan^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} t^3 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^3}{1+t^2}\, dt$$

(κάναμε τη διαίρεση $t^3 : (t^2+1)$ και έχουμε $t^3 = (t^2+1)t - t$)

Άρα $$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^3}{1+t^2}\, dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{(t^2+1)t - t}{1+t^2}\, dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} t\, dt - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t}{1+t^2}\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{1}{6} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,dx$ (β) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

ΛΥΣΗ

(α) $$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,dx$$

Θα κάνουμε χρήση των τύπων: $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan x}$, $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2 x}}\,dx$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2 x)^2}{\tan^2 x}\,dx$$

Θέτουμε: $\tan x = t$

$(1+\tan^2 x)\,dx = dt$

- Για $x=\pi/6 \Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- Για $x=\pi/4 \Rightarrow t=1$

Άρα

$$I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1+t^2}{t^2}\,dt = \int_{\sqrt{3}/3}^{1}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)dt = \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+t\right]_{\sqrt{3}/3}^{1} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

(β) $$\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$$

Παρατηρούμε ότι $\left(\sqrt{1+\ln x}\right)' = \dfrac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$

Θέτουμε: $\sqrt{1+\ln x} = t \Leftrightarrow 1+\ln x = t^2 \Leftrightarrow \boxed{\ln x = t^2 - 1}$

$$\left(\sqrt{1+\ln x}\right)' dx = dt$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}(\ln x + 1)'\,dx = dt$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\cdot\frac{1}{x}\,dx = dt$$

Άρα

$$\boxed{\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx = 2\,dt}$$

- Για $x=1 \Leftrightarrow t = \sqrt{1+\ln 1} \Leftrightarrow t = 1$
- Για $x=e \Leftrightarrow t = \sqrt{1+\ln e} \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$

Άρα $$\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)\,2\,dt = \left[\frac{2t^3}{3} - 2t\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2}^3}{3} - 2\sqrt{2}\right) - \left(\frac{2\cdot 1^3}{3} - 2\cdot 1\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

(α) $J=\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ όπου $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x<0 \\ \ln(x+1), & x\geq 0\end{cases}$

(β) $J=\int_{0}^{2} \left(|x^2-1|+x\right)dx$

ΛΥΣΗ

(α) Παρατηρούμε ότι στο $x_0=0$, αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης. Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$J=\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx+\int_{0}^{2} \ln(x+1)\,dx$$

Θα υπολογίσουμε καθένα από τα ολοκληρώματα ξεχωριστά με την χρήση της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης.

$$\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx=\int_{-1}^{0} x\left(-e^{-x}\right)'dx=\left[-xe^{-x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0} -e^{-x}(x)'\,dx$$

$$=\left[-xe^{-x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx=\left[-xe^{-x}\right]_{-1}^{0}+\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$

$$=\left(-(-1)e^{-(-1)}\right)+\left(-e^{0}-(-e)\right)=e-1+e=-1$$

$$\int_0^2 \ln(x+1)\,dx = \int_0^2 (x)' \ln(x+1)\,dx$$

$$= \left[x \cdot \ln(x+1)\right]_0^2 - \int_0^2 x\,(\ln(x+1))'\,dx$$

$$= (2\ln 3 - 0) - \int_0^2 x \,\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 2\ln 3 - \int_0^2 \frac{x}{x+1}\,dx$$

$$= 2\ln 3 - \int_0^2 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$

$$= 2\ln 3 - \int_0^2 \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= 2\ln 3 - \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= 2\ln 3 - \left[x - \ln(x+1)\right]_0^2 = 2\ln 3 - (2 - \ln 3 - 0 + \ln 1) = 3\ln 3 - 2$$

Επομένως $I = -1 + 3\ln 3 - 2 = 3\ln 3 - 3$

(β) $\int_0^2 (|x^2-1|+x)\,dx$

Αρχικά πρέπει να "βγάλουμε" την απόλυτη τιμή

$|x^2-1| = x^2-1$ αν $x^2-1>0$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_0^2 (|x^2-1|+x)\,dx = \int_0^1 \left[(-x^2+1)+x\right]dx + \int_1^2 (x^2-1+x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1-0\right) + \left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{7}{6}+\frac{17}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ (β) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

- $I = \displaystyle\int_a^b f(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$, θέτουμε $x = a\sin t$
- $I = \displaystyle\int_a^b f(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$, θέτουμε $x = \dfrac{a}{\sin t}$
- $I = \displaystyle\int_a^b f(x, \sqrt{x^2+a^2})\,dx$, θέτουμε $x = a\cdot\tan t$

(α) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

Παρατηρούμε ότι μέσα στο ολοκλήρωμα εμφανίζεται η παράσταση x^2+a^2

Άρα θέτουμε $x = \tan t \Rightarrow dx = (1+\tan^2 t)\,dt$

- Για $x = 1 \Rightarrow 1 = \tan t \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$
- Για $x = 0 \Rightarrow 0 = \tan t \Rightarrow t = 0$

Άρα $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan t}{\cancel{1+\tan^2 t}} \cancel{(1+\tan^2 t)}\,dt$

$$= \int_0^{\pi/4} \tan t \, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos t} \, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{(-\cos t)'}{\cos t} \, dt$$

$$= \left[-\ln|\cos t|\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| + \ln|\cos 0| = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1$$

$$= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(β) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \, dx$

Παρατηρούμε ότι μέσα στο ολοκλήρωμα εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{a^2-x^2}$

Άρα θέτουμε $x = \sqrt{2}\sin t \Rightarrow dx = (\sqrt{2}\sin t)' dt$

$\Rightarrow dx = \sqrt{2}\cos t \, dt$

- Για $x=1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin t = 1 \Rightarrow \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$
- Για $x=-1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin t = -1 \Rightarrow \sin t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$

Άρα $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \, dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{2-2\sin^2 t}} \sqrt{2}\cos t \, dt$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{2(1-\sin^2 t)}}\,dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cancel{\sqrt{2}}\cos t}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2 t}}\,dt$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1\,dt = \left[t\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Για την ολοκλήρωση άρρητης συνάρτησης, δηλαδή για ολοκληρώματα που περιέχουν ν-οστή ρίζα της μορφής:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x, \sqrt[\nu]{g(x)}\right) dx$$

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης θέτοντας:

$$\sqrt[\nu]{g(x)} = u \Rightarrow g(x) = u^{\nu}$$

Οπότε έχουμε $\quad g'(x)\,dx = \nu u^{\nu-1}\,du$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{2}^{3} x^2 \sqrt[3]{x-2}\, dx$$

ΛΥΣΗ

Είναι ορισμένο ολοκλήρωμα άρρητης συνάρτησης, αφού παρουσιάζεται ρίζα τρίτης τάξης $\sqrt[3]{x-2}$

$$\int_{2}^{3} x^2 \sqrt[3]{x-2}\, dx$$

Θέτουμε: $\sqrt[3]{x-2} = u$

$$\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3 = u^3$$

$$x-2 = u^3 \Rightarrow x = u^3+2$$

$$(x)'\,dx = (u^3+2)'\,du$$

$$dx = 3u^2\,du$$

- Για $x=2 \Rightarrow u = \sqrt[3]{2-2} = 0$
- Για $x=3 \Rightarrow u = \sqrt[3]{3-2} = 1$

Άρα

$$\int_2^3 x^2 \sqrt[3]{x-2}\, dx = \int_0^1 (u^3+2)^2 \, u \, 3u^2 du$$

$$= \int_0^1 3(u^3+2)^2 u^3 du = \int_0^1 3\left(u^6 + 4u^3 + 4\right) u^3 du$$

$$= 3\int_0^1 \left(u^9 + 4u^6 + 4u^3\right) du$$

$$= 3\left[\frac{u^{10}}{10} + \frac{4u^7}{7} + \frac{\cancel{4}u^4}{\cancel{4}}\right]_0^1 = 3\left(\frac{1}{10} + \frac{4}{7} + 1 - 0\right) = \frac{351}{70}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\sqrt[4]{3}} x^7\sqrt{x^4+1}\,dx$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε: $\sqrt{x^4+1} = u$

$$\Rightarrow x^4+1 = u^2$$

$$x^4 = u^2-1$$

$$(x^4)'dx = (u^2-1)'du$$

$$4x^3dx = 2u\,du$$

$$x^3dx = \frac{u}{2}du$$

- Για $x=0 \Rightarrow u=\sqrt{0+1}=1$
- Για $x=\sqrt[4]{3} \Rightarrow u=\sqrt{(\sqrt[4]{3})^4+1}$

$$\Rightarrow u=\sqrt{3+1} \Rightarrow u=2$$

Άρα έχουμε: $\displaystyle\int_0^{\sqrt[4]{3}} x^7\sqrt{x^4+1}\,dx = \int_0^{\sqrt[4]{3}} x^4\cdot x^3\sqrt{x^4+1}\,dx$

$$= \int_1^2 (u^2-1)\cdot u\cdot\frac{u}{2}\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 u^2(u^2-1)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (u^4-u^2)\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2^5}{5}-\frac{2^3}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{58}{15} = \frac{29}{15}$$