ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 24

20/01/2021

#33 Να αποδείξετε ότι

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{100} = 3^{50} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ΛΥΣΗ Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Τότε $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε $A^{100} = (A^2)^{50} =$ $3^{50}\Gamma^{50}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma^{50} = B$.

Έχουμε $\Gamma^2 = B$ και $\Gamma^6 = I_2$. Άρα, $\Gamma^{50} = \Gamma^2 \cdot \Gamma^{48} =$ $= \Gamma^2 (\Gamma^6)^8 = B \cdot (I_2)^8 = B$. $\square$

Μαθήματα 22 και 23: Διαγώνισμα 2 (18/01/2021) κ Λύσεις (19/01/2021), αντ.

#34. Σωστό ή λάθος; Αν $A, B \in M_n(K)$, τότε

$$tr(AB) = tr(A) \cdot tr(B)$$

<u>ΛΥΣΗ</u> Λάθος. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε $tr(A) = 1$ και $tr(B) = 1$, άρα $tr(A)tr(B) = 1$.

Από την άλλη μεριά, $AB = O_2$, οπότε $tr(AB) = 0 \neq tr(A)tr(B)$. □

#35. Έστω $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, n κάποιος φυσικός αριθμός, ένα σύνολο συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, κάθε μια από τις οποίες έχει παραγώγους μέχρι και $n-1$ τάξης. Αν για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$f_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j f_j \quad \text{για κάποια } \lambda_j \in \mathbb{R},\ j \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{i\},$$

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

Με κατάλληλο παράδειγμα, να δείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

<u>ΛΥΣΗ</u> Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι η παραπάνω ορίζουσα είναι η ορίζουσα του Wroński, η οποία σχετίζεται με τις συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_n$ και συμβολίζεται με $\det(W(f_1,\ldots,f_n)(x))$.

Θεωρώντας την υπόθεση της άσκησης για τη συνάρτηση f_i παίρνουμε ότι για κάθε $k=1,2,\ldots,n-1$, $f_i^{(k)} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j f_j^{(k)}$,

και συνεπώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η i-στήλη του πίνακα $W(f_1,\ldots,f_n)(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων στηλών. Άρα, από την γραμμικότητα της ορίζουσας ως προς τις στήλες, εύκολα παίρνουμε ότι $\det(W(f_1,\ldots,f_n)(x))=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (βλ. επίσης λύση της άσκησης 10(δ), 11/01/2021, σελ. 10).

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να ακολουθήσει τη λύση της άσκησης 9, 1/12/2020, σελίδα 17, όπου είχαμε αποδείξει ότι αν για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$, $\det(W(f_1,\ldots,f_n)(x_0))\neq 0$, τότε για οποιαδήποτε $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k = \mathbf{0}$ (όπου $\mathbf{0}$ είναι η μηδενική συνάρτηση επί του $\mathbb{R}$) ισχύει ότι $\lambda_k=0$ για κάθε $k=1,\ldots,n$.

Για το δεύτερο μέρος της άσκησης, θεωρήστε το σύνολο $S=\{f_1=x^3, f_2=|x|^3\}$. Οι f_1, f_2 είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\det(W(f_1,f_2)(x))=0$, αλλά δεν υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, όχι και τα δύο ίσα με μηδέν, έτσι ώστε $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=0$. $\square$

#36. Να αποδείξετε τα παρακάτω:

(1) $tr(AB) = tr(BA)$ για κάθε $A, B \in M_n(K)$.

(2) Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος.

ΛΥΣΗ (1) Έστω $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$, $AB = (\gamma_{ij})$ και $BA = (\delta_{ij})$. Έχουμε:

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki}\alpha_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{kk}$$

$$= tr(BA)$$

(2) Έστω $A, B \in M_n(K)$ δύο όμοιοι πίνακες. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(K)$ τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$. Από το (1) έχουμε:

$$tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(P^{-1}(AP)) = tr((AP)P^{-1}) =$$
$$= tr(A(PP^{-1})) = tr(A). \qquad \square$$

#37 Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \sin\phi & \cos\phi \\ -\cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}),$$

όπου $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε

$$\det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} \sin\phi - x & \cos\phi \\ -\cos\phi & \sin\phi - x \end{vmatrix}$$

$$= (\sin\phi - x)^2 + \cos^2\phi$$

$$= x^2 - 2(\sin\phi)x + \underbrace{\sin^2\phi + \cos^2\phi}_{1}$$

$$= x^2 - 2(\sin\phi)x + 1.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2(\sin\phi)x + 1$ είναι $\Delta = (-2\sin\phi)^2 - 4\cdot1\cdot1 = 4(\sin^2\phi - 1)$

$$= -4\cos^2\phi < 0$$

$(\cos\phi \neq 0$ για όλα τα $\phi \in (0, \frac{\pi}{2}))$.

Άρα, το τριώνυμο έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες:

$$\lambda_1 = \frac{2\sin\phi + i\,2\cos\phi}{2} = \sin\phi + i\cos\phi$$

και

$$\lambda_2 = \frac{2\sin\phi - i\,2\cos\phi}{2} = \sin\phi - i\cos\phi$$

(θυμηθείτε ότι για $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos\phi > 0$, άρα

$\sqrt{\cos^2\phi} = |\cos\phi| = \cos\phi$).

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_1 είναι οι μη μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\begin{cases} (\sin\phi - (\sin\phi + i\cos\phi))x + (\cos\phi)y = 0 \\ (-\cos\phi)x + (\sin\phi - (\sin\phi + i\cos\phi))y = 0 \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} -(i\cos\phi)x + (\cos\phi)y = 0 \\ -(\cos\phi)x - (i\cos\phi)y = 0 \end{cases}$$

(Πολ/ζουμε τη πρώτη εξίσωση επί i και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στη 2η εξίσωση)

ή

$$\begin{cases} -(i\cos\phi)x + (\cos\phi)y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Από το τελευταίο σύστημα παίρνουμε ότι η γενική μορφή των λύσεων του συστήματος $(A-\lambda_1 I_2)X=0$ είναι

$$(x, ix), \quad x \in \mathbb{C}$$

και άρα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην λ_1 είναι τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Η εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_2 αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. $\square$

#38 Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(α) Να βρεθεί ένα πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού το πολύ 1 με πραγματικούς συντελεστές τέτοιο ώστε $A^7 - 3A^6 + 3A^5 + 5A^4 + A = p(A)$.

(β) Να υπολογιστεί ο πίνακας $A^{2003}(A-2I_2)^{2004}$.

#39. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρα το πλήθος πολυώνυμα $p(x)$ τέτοια ώστε $p(A) = 0$.

#40. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $B \in M_4(\mathbb{C})$ με $B^4 = A$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$