ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 21

12/01/2021

#19. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$$

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{pmatrix}$.

(Με επαγωγή στο n.)

#20. Έστω $A \in M_n(K)$ τέτοιος ώστε

$$A^n + A^{n-1} + \dots + A^2 + A + I_n = O_n .$$

Να αποδείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε τον αντίστροφό του.

ΛΥΣΗ Από τη δοθείσα εξίσωση παίρνουμε ότι

$$(*) \qquad A^n = -A^{n-1} - \dots - A^2 - A - I_n .$$

Επίσης,

$$A^n + A^{n-1} + \dots + A^2 + A + I_n = O_n$$

$$\Rightarrow A^n + A^{n-1} + \dots + A^2 + A = -I_n$$

$$\Rightarrow A(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I_n) = -I_n$$

$$\Rightarrow A\left(-A^{n-1}-A^{n-2}-\ldots-A-I_n\right)=I_n$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} A\cdot A^n = I_n.$$

Άρα, ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=A^n$. $\square$

#21. Αν $u=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ είναι μια λύση ενός συστήματος $AX=B$ και $v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ είναι μια λύση του ομογενούς συστήματος $AX=0$, τότε βρείτε 4 επιπλέον λύσεις του $AX=B$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Στο μάθημα 27/10/2020, άσκηση 9, σελίδα 20, αποδείξαμε ότι αν s είναι μια λύση ενός γραμμικού συστήματος $AX=B$, τότε το σύνολο λύσεων του $AX=B$ είναι το

$$\Sigma=\{s+h : h \text{ είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος } AX=0\}.$$

Αφού το $v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ είναι λύση του $AX=0$, έπεται ότι για κάθε $k\in\mathbb{N}$, το kv είναι λύση του $AX=0$. Άρα, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, το $u+kv$ είναι λύση του $AX=B$.

Επειδή $v \neq 0$, έπεται ότι για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{N}$ με $k \neq \lambda$ έχουμε ότι $kv \neq \lambda v$. Άρα, το σύνολο $T = \{u + kv : k \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα άπειρο υποσύνολο του Σ. Επομένως, είναι πολύ εύκολο να βρούμε 4 επιπλέον λύσεις του $AX = B$. Για παράδειγμα, οι $u + kv$, $k = 1, 2, 3, 4$, είναι 4 διακεκριμένες λύσεις του $AX = B$, διάφορες του u. $\square$

#22. Σωστό ή λάθος;

(α) Αν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ είναι τέτοιοι ώστε
$$A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n, \text{ τότε } AB = BA$$

(β) Αν ο A έχει μια μηδενική γραμμή, τότε και ο $\operatorname{adj}(A)$ έχει μια μηδενική γραμμή.

(γ) Το άθροισμα δύο ιδιοτιμών του A είναι ιδιοτιμή του A.

(δ) Αν $E \in M_n(\mathbb{R})$ είναι στοιχειώδης και $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε οι πίνακες EA και AE έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

(ε) Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A έχει το πολύ $n^2 - n$ μηδενικά.

(στ) Αν το 0 δεν είναι ρίζα του ελάχιστου πολυωνύμου ενός $n\times n$ πίνακα A, τότε είναι δυνατόν να υπάρχει ένας $n\times 1$ πίνακας B τέτοιος ώστε το σύστημα $AX=B$ να είναι αδύνατο.

<u>ΛΥΣΗ</u> (α) Σωστό: Έχουμε

$$(AB)^2 = I_n \qquad (\text{υπόθεση})$$

$$\Rightarrow \quad ABAB = I_n$$

$$\Rightarrow \quad A(ABAB) = A\cdot I_n$$

$$\Rightarrow \quad BAB = A \qquad (\text{διότι } A^2 = I_n)$$

$$\Rightarrow \quad (BAB)B = AB$$

$$\Rightarrow \quad BA = AB \qquad (\text{διότι } B^2 = I_n)$$

(β) Λάθος: Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(γ) Λάθος: Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $1, -1$, ενώ το $0 = 1 + (-1)$ δεν είναι ιδιοτιμή του A.

(δ) Σωστό: Έχουμε δει ότι για κάθε $X, Y \in M_n(K)$, οι πίνακες $X \cdot Y$ και $Y \cdot X$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και συνεπώς τις ίδιες ιδιοτιμές (βλ. 8/12/2020, σελίδα 1 και 15/12/2020, σελίδα 10).

Ένας άλλος τρόπος είναι: Ο E είναι αντιστρέψιμος ως στοιχειώδης. Επίσης, $AE = E^{-1}(EA)E$, οπότε οι πίνακες AE και EA είναι όμοιοι. Άρα, οι AE, EA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολ/μο και συνεπώς τις ίδιες ιδιοτιμές.

Και βέβαια, μπορούμε να δώσουμε μια απευθείας απόδειξη ότι οι EA, AE έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$
\begin{aligned}
\det(EA - xI_n) &= \det(EA - xEE^{-1}) \\
&= \det(EA - E(xE^{-1})) \\
&= \det(E(A - xE^{-1})) \\
&= \det(E)\det(A - xE^{-1}) \\
&= \det(A - xE^{-1})\det(E) \\
&= \det((A - xE^{-1})E) \\
&= \det(AE - (xE^{-1})E) \\
&= \det(AE - xI_n).
\end{aligned}
$$

(ε) Σωστό: Εφόσον ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, κάθε γραμμή του A έχει το πολύ $n-1$ μηδενικά. Διαφορετικά, κάποια γραμμή του A θα ήταν μηδενική, οπότε θα είχαμε ότι $\det(A) = 0$, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

Εφόσον ο A έχει n γραμμές, από τα παραπάνω έπεται ότι ο A έχει το πολύ $n(n-1) = n^2 - n$ μηδενικά.

(στ) Λάθος: Εφόσον το 0 δεν είναι ρίζα του $m_A(x)$, έπεται ότι το 0 δεν είναι ρίζα του $\chi_A(x)$ (θυμηθείτε ότι τα $\chi_A(x)$ και $m_A(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες). Άρα, ο A είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε επιλογή B στο $M_{n\times 1}(K)$. $\square$

#23. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν όλοι οι πίνακες B στο $M_2(\mathbb{R})$ οι οποίοι αντιμετατίθενται με τον A.

#24. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε

$$A^2 = A,\ B^2 = B,\ A + B = I_n.$$

Να αποδείξετε ότι $AB = BA = O_n$.

ΛΥΣΗ Έχουμε:

$$A^2 = A = A\cdot I_n = A(A+B) = A^2 + AB.$$

Άρα, $AB = O_n$. Παρόμοια,

$$B^2 = B = BI_n = B(B+A) = B^2 + BA.$$

Άρα, $BA = O_n$. Από τα παραπάνω, $AB = BA = O_n$. $\square$

#25. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + \mu z = 2 \\ x + \lambda^2 y + \mu^2 z = 4 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Για τις τιμές των λ, μ που έχουμε μοναδική λύση, χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Cramer για να βρείτε τη μοναδική λύση.

ΛΥΣΗ Έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda^2 & \mu^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & \mu - 1 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & \mu^2 - 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \mu - 1 \\ \lambda^2 - 1 & \mu^2 - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\mu - 1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda + 1 & \mu + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)(\mu-1)(\mu-\lambda).$$

Άρα, $|A| = (\lambda-1)(\mu-1)(\mu-\lambda)$.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & \mu \\ 4 & \lambda^2 & \mu^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 4r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & \mu-2 \\ 0 & \lambda^2-4 & \mu^2-4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & \mu-2 \\ \lambda^2-4 & \mu^2-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\mu-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda+2 & \mu+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\mu-2)(\mu-\lambda).$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \mu \\ 1 & 4 & \mu^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \mu-1 \\ 0 & 3 & \mu^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \mu-1 \\ 3 & \mu^2-1 \end{vmatrix} = (\mu-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & \mu+1 \end{vmatrix} = (\mu-1)(\mu-2).$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda^2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & \lambda^2-1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ \lambda^2-1 & 3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda+1 & 3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(2-\lambda).$$

Συνοψίζοντας:

$|A| = (\lambda-1)(\mu-1)(\mu-\lambda)$.

$|A_x| = (\lambda-2)(\mu-2)(\mu-\lambda)$.

$|A_y| = (\mu-1)(\mu-2)$.

$|A_z| = (\lambda-1)(2-\lambda)$.

Αν $|A| \neq 0$, ή ισοδύναμα αν $\lambda \neq 1$ και $\mu \neq 1$ και $\mu \neq \lambda$, τότε έχουμε μοναδική λύση, η οποία δίνεται από τη μέθοδο Cramer ως

$$\left(\frac{|A_x|}{|A|}, \frac{|A_y|}{|A|}, \frac{|A_z|}{|A|}\right) = \left(\frac{(\lambda-2)(\mu-2)}{(\lambda-1)(\mu-1)}, \frac{\mu-2}{(\lambda-1)(\mu-\lambda)}, \frac{2-\lambda}{(\mu-1)(\mu-\lambda)}\right)$$

Αν $|A| = 0$ τότε $\lambda = 1$ ή $\mu = 1$ ή $\mu = \lambda$.

(1) $\lambda = 1$. Τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + \mu z = 2 \\ x + y + \mu^2 z = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mu & 2 \\ 1 & 1 & \mu^2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu-1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu^2-1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - (\mu+1) r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\mu \end{array}\right)$$

- Αν $2-\mu \neq 0$, ισοδύναμα αν $\mu \neq 2$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

- Αν $2-\mu = 0$, ισοδύναμα $\mu = 2$, τότε παίρνουμε (από τον τελευταίο πίνακα για $\mu=2$) το ακόλουθο σύστημα το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0x + 0y + z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, η γενική μορφή των οποίων είναι

$$(-y, y, 1), \quad y \in \mathbb{R}.$$

(2) $\mu = 1$. Τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + \lambda^2 y + z = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda^2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - (\lambda+1) r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda \end{array}\right)$$

- Αν $2 - \lambda \neq 0$, ή $\lambda \neq 2$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $2 - \lambda = 0$, ή $\lambda = 2$, τότε παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0x + y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

τό οποίο έχει άπειρο πλήθος λύσεων, η γενική μορφή των οποίων είναι

$(-z, 1, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

(3) $\lambda = \mu$. Τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + \lambda z = 2 \\ x + \lambda^2 y + \lambda^2 z = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & \lambda^2 - 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - (\lambda+1) r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda \end{array}\right).$$

- Αν $2 - \lambda \neq 0$, ή $\lambda \neq 2$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο
- Αν $2 - \lambda = 0$, ή $\lambda = 2$, τότε παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0x + y + z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων και η γενική μορφή των λύσεων είναι

$(0, 1 - z, z)$, $z \in \mathbb{R}$. $\square$

#26. Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & x+1 & 6 \\ x^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

#27. Να αποδειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = -2\cdot(n-2)!$$

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} \underset{\underline{i=2,\dots,n}}{\overset{r_i \to r_i - 2r_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ 0 & -2 & -1 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } 1^{\eta} \text{ στήλη}}{=} \begin{vmatrix} -2 & -2 & \cdots & -2 \\ -2 & -1 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -2 & -2 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & \cdots & -2 \\ 1 & -1 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -2 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2,\dots,n-1}{\overset{r_i \to r_i - r_1}{=}} -2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 & \cdots & -2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}}_{\text{άνω τριγωνικός και } a_{ii} = i-1 \text{ για } i=2,\dots,n-1.}$$

$$= -2(n-2)! \qquad \square$$

#28. Να αποδειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & 1 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = (1-x)^3.$$

#29. Να αποδειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a+1 & b+c+2 & c+1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε

$$\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a+1 & b+c+2 & c+1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 \to r_2 - r_1}{=} \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \square$$

\# 30. Να υπολογιστεί η παρακάτω ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 & 0 \end{vmatrix}$$

<u>ΛΥΣΗ</u> Εφαρμόζουμε $r_i \to r_i + r_1$ για κάθε $i = 2, 3, \ldots, n$ και παίρνουμε

$$D = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 2\cdot 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}}_{\text{άνω τριγωνικός}}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)\, n$$

$$= n! \qquad \square$$

#31. Να αποδειχθεί ότι αν

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

τότε $\det(A_n) = 2^{n-1}$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Αποδεικνύουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο n.

Για $n=1$, $A_1 = (1)$, οπότε $\det(A_1) = 1 = 2^{1-1}$.

Για $n=2$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, οπότε $\det(A_2) = 2 = 2^{2-1}$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $\det(A_k) = 2^{k-1}$ για όλους τους φυσικούς k με $k<n$.

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα του A_n ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης και παίρνουμε ότι:

$$\det(A_n) = \det(A_{n-1}) + (-1)(-1)^{2+1}\det(A_{n-1})$$
$$= 2\det(A_{n-1})$$
$$= 2 \cdot 2^{n-2} \quad (\text{από την υπόθεση της επαγωγής, } \det(A_{n-1}) = 2^{n-2})$$
$$= 2^{n-1}. \qquad \square$$

#32. Να αποδείξετε ότι αν ο πίνακας $A \in M_n(K)$ είναι συμμετρικός, τότε ο $adj(A)$ είναι επίσης συμμετρικός.

<u>ΛΥΣΗ</u>. Αν ο A είναι συμμετρικός, τότε για κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_{ij} = (A^t)_{ij} = (A_{ji})^t$.

Επομένως, για όλα τα i και j έχουμε

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| = (-1)^{j+i} |(A_{ji})^t|$$
$$= (-1)^{j+i} |A_{ji}| = c_{ji}.$$

Άρα,

$$adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

και συνεπώς $(adj(A))^t = adj(A)$, δηλαδή ο $adj(A)$ είναι συμμετρικός. $\square$