Διαγωνισμα 2: "Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Σ.Α.Χ.Μ.

18 Ιανουαριου 2021, 09:00–12:00

ΘΕΜΑ 1. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x+\alpha y+\beta z &= 2 \\ x+\alpha^2 y+\beta^2 z &= 4 \end{aligned}$$

για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα $B = 3A^{2005} - 6A + I_3$.

ΘΕΜΑ 3. Έστω $A \in M_3(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^3 = 0_3$. Έστω $B = (I_3 + A)^2 - A$ και $\Gamma = (I_3 - A)^2 + A$. Να αποδείξετε τα παρακάτω:

(α) Οι πίνακες B και Γ είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθούν οι αντίστροφοί τους.

(β) Οι πίνακες $B - \Gamma$ και $B^2 - \Gamma^2$ είναι μη αντιστρέψιμοι.

(γ) Ο πίνακας $B + \Gamma$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

ΘΕΜΑ 4. (α) Στον παρακάτω πίνακα W να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $t \in \mathbb{R}$ ώστε να έχουμε $\det(W) = \alpha$, $\alpha \neq 1$.

$$W = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ t & 1+t & t & t \\ t^2 & t^2 & 1+t^2 & t^2 \\ t^3 & t^3 & t^3 & 1+t^3 \end{pmatrix}.$$

(β) Αν τα στοιχεία του $n \times n$ πίνακα A και του A^{-1} είναι ακέραιοι, τότε να αποδείξετε ότι και οι δύο ορίζουσες είναι 1 ή -1, αιτιολογώντας κάθε ισχυρισμό σας.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω $A, P \in M_3(\mathbb{C})$ δύο αντιστρέψιμοι πίνακες τέτοιοι ώστε $AP = PA^{-1}$. Να αποδείξετε ότι μια ιδιοτιμή του πίνακα A είναι το 1 ή το -1.

(β) Δίνεται ο πίνακας

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Με χρήση του Θεωρήματος των Cayley–Hamilton, να υπολογιστεί ο αντίστροφος (αν υπάρχει) του πίνακα M. Να βρείτε επίσης το ελάχιστο πολυώνυμο του M.

(γ) Εξηγήστε γιατί ο Z δεν είναι ποτέ όμοιος με τον $Z + I$.

(δ) Αν ο 3×3 πίνακας N έχει ιδιοτιμές $0, 1, 2$ ποιές είναι οι ιδιοτιμές του $N(N - I)(N - 2I)$;

Καλη Επιτυχια!