

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4 (ΟΡΙΖΟΥΣΕΙΣ)

#1. Να αποδειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+b & a+c \\ 1 & b+a & 0 & b+c \\ 1 & c+a & c+b & 0 \end{vmatrix} = -4(ab+bc+ca)$$

#2. Να αποδειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & (b-c)^2 & a^2+2bc \\ c^2+a^2 & (c-a)^2 & b^2+2ca \\ a^2+b^2 & (a-b)^2 & c^2+2ab \end{vmatrix} = 2(a^2+b^2+c^2)(b-a)(c-a)[c(c+a)-b(b+a)]$$

#3. Να λύσουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$(α) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2\lambda-3 \\ 1 & \lambda & -\lambda \\ 3\lambda-1 & 2\lambda+6 & 4\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (β) \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(γ) \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 7 & x-5 & 1 \\ 6 & -6 & x+2 \end{vmatrix} = 0, \quad (δ) \begin{vmatrix} 2\cos x - 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2\cos x - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\cos x - 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2\cos x - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(ε) \begin{vmatrix} x+1 & 5 & 3 \\ -1 & x-4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

#4 Έστω ο $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

ΝΣο $\det A = (a+n-2)(a-2)^{n-1}$

Να βρείτε επίσης τον $\det(\text{adj } A)$.

#5 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ με περιβάλλοντα από $n^2 - n$ μηδενικά στοιχεία. ΝΣο $\det A = 0$.

#6. ΝΣο
$$\begin{vmatrix} \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 3x & \cos 4x & \cos 5x \\ \cos 5x & \cos 6x & \cos 7x \end{vmatrix} = 0.$$

#7. Έστω μια συνάρτηση f με νόμο:

$$f(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & \sin x \cos x \\ \sin x & \cos x & -\cos x \\ -\cos x & -\sin x & 1 - \sin x \cos x \end{vmatrix}$$

(α) Να βρεθούν το μέγιστο όριζοντιό της f και το σύνολο τιμών της f .

(β) ΝΣο η f είναι άρτια συνάρτηση.

#8. Δείξτε ότι τρία ευρεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ του επιπέδου είναι συγγραμμικά (βρίσκονται συν. πάνω στην ίδια ευθεία) αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

#9. Υπολογίστε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

#10. Έστω $A, B, P \in M_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε P αναστρέψιμος και $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Δείξτε ότι $\det B = \det A$.

#11. Έστω A ένας αντισυμμετρικός πίνακας (δηλ. $A^t = -A$)
 Έτσι $\det A = (-1)^n \cdot \det A$.

#12. Σωστό ή λάθος;

(α) $\det(k \cdot A) = k \det A$, όπου $k \in \mathbb{R}, A \in M_n(\mathbb{R})$.

(β) $\det(kA) = k^n \cdot \det A$, " " " "

(γ) $\det(AA^t) = \det(A^t A) = (\det A)^2$

(δ) Αν σε ένα $A \in M_n(\mathbb{R})$ εναλλάξουν δύο γραμμές και δύο στήλες, η ορίζουσα του A αλλάζει πρόσημο.

(ε) Αν $\det A = 2, \det B = 3$, τότε $\det(A+B) = 5$

(στ) Αν $\det A = 2, \det B = 3$, τότε $\det(AB) = 6$.

(j) Το γινόμενο ενός πίνακα επί του adjoint του είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

(m) Ο αντίστροφος του adjoint ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ο πίνακας των συμπαραγόντων του A .

#13. Βρείτε τον adjoint του πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

#14. Να δείξετε ότι $\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

#15. $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι αντεσρέπιμος, αν και μόνο αν, $\text{adj } A$ είναι αντεσρέπιμος.

#16. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ αντεσρέπιμος, όπου $n > 1$.

$$\text{NSo } \text{adj}(\text{adj } A) = (\det A)^{n-2} \cdot A.$$

#17. NSo ο αντίστροφος ενός αντεσρέπιμου άνω-τριγωνικού πίνακα είναι άνω-τριγωνικός.

#18. Όπου είναι δυνατόν, να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με μέθοδο Cramer.

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \quad , \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \quad , \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$5x_1 + 2x_2 = 1 \quad , \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \quad , \quad 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad , \quad x_2 + x_3 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \quad , \quad x_1 + 6x_2 - x_3 = 4$$

19. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$x_1 + \lambda x_3 = -2(x_2 + x_3)$$

$$2x_1 + 3(x_2 + x_3) = -\lambda x_3$$

$$3x_1 + 6\lambda x_2 + 7x_3 = x_2$$

έχει μοναδική λύση (χρησιμοποιώντας ορίσματα), για κάθε μια από αυτές τις τιμές του λ , να βρεθεί η μοναδική λύση με τη μέθοδο του Cramer.

20. Να γίνουν όλες οι "Αεκήσεις για τον αναγνώστη" που διατυπώθηκαν στις διαλέξεις γι' αυτό το κεφάλαιο.