Διαγωνισμα: "Εφαρμοσμενη Γραμμικη Αλγεβρα Ι"

Πανεπιστημιο Αιγαιου – Τμημα Σ.Α.Χ.Μ.

21 Δεκεμβριου 2020, 09:00–11:00

ΘΕΜΑ 1. (α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} (\lambda-1)x + 2y + \lambda z &= \lambda \\ x + \lambda y + 2z &= 2 \\ (2\lambda+1)x + (3\lambda+4)y + (\lambda+8)z &= 4\lambda+2 \end{aligned}$$

Για τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση, να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο του Cramer για να βρείτε τη μοναδική λύση.

(β) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα A^n και να υπολογίσετε το άθροισμα $A + A^2 + \cdots + A^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Να δώσετε ένα παράδειγμα τετραγωνικού πίνακα A για τον οποίο ισχύει ότι $A^2 = A$ και $A \neq O, I$. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

ΘΕΜΑ 2. (α) Αν ο πίνακας A είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$2X^2 - 3X - I_n = O_n$$

τότε να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A - I_n$ είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε τον αντίστροφό του.

(β) Να εξετάσετε αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος, και αν είναι τότε να βρείτε τον αντίστροφό του και να γράψετε τον A ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

ΘΕΜΑ 3. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες των οριζουσών για να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 1+a & b+2 & b-a+1 \\ 1-a & 2a+1 & 3a \\ 1+a & a-b & -b-1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 4. Δίνεται ότι $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ και $\det(A^{-1}) = 3$. Να βρείτε τον πίνακα A.

Καλη Επιτυχια!

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ (21/12/2020) ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι"

ΘΕΜΑ 1 (α) Έχουμε:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2\lambda+1 & 3\lambda+4 & \lambda+8 \end{vmatrix} \quad (c_2 \to c_2 - c_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2-\lambda & \lambda \\ 1 & \lambda-2 & 2 \\ 2\lambda+1 & 2(\lambda-2) & \lambda+8 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 2\lambda+1 & 2 & \lambda+8 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_2 \to r_2 + r_1 \\ r_3 \to r_3 + 2r_1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 0 & \lambda+2 \\ 4\lambda-1 & 0 & 3\lambda+8 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{ανάπτυγμα ως} \\ \text{προς τη } 2^{\eta} \text{ στήλη} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda & \lambda+2 \\ 4\lambda-1 & 3\lambda+8 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda+1).$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda & 2 \\ 4\lambda+2 & 3\lambda+4 & \lambda+8 \end{vmatrix} \quad (C_1 \to C_1 - C_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 \\ 3(\lambda-2) & 3\lambda+4 & \lambda+8 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{c}\text{ανάπτυγμα} \\ \text{ως προς την} \\ \text{1η στήλη}\end{array}\right)$$

$$= 3(\lambda-2) \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3(\lambda-2)^2(\lambda+2)$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 2 & 2 \\ 2\lambda+1 & 4\lambda+2 & \lambda+8 \end{vmatrix} \quad (C_2 \to C_2 - C_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 2 \\ 2\lambda+1 & 3(\lambda-2) & \lambda+8 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{c}\text{ανάπτυγμα ως προς} \\ \text{την 2η στήλη}\end{array}\right)$$

$$= 3(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(\lambda-2)^2 .$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2\lambda+1 & 3\lambda+4 & 4\lambda+2 \end{vmatrix} \quad (c_2 \to c_2 - c_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2-\lambda & \lambda \\ 1 & \lambda-2 & 2 \\ 2\lambda+1 & -\lambda+2 & 4\lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 2\lambda+1 & -1 & 4\lambda+2 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_2 \to r_2 + r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 0 & \lambda+2 \\ \lambda+2 & 0 & 3\lambda+2 \end{vmatrix}$$ (ανάπτυγμα ως προς τη 2η στήλη)

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda & \lambda+2 \\ \lambda+2 & 3\lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(\lambda-2)^2(\lambda+1).$$

<u>Συνοψίζοντας</u>:

$$\det(A) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

$$\det(A_x) = -3(\lambda-2)^2(\lambda+2)$$

$$\det(A_y) = 3(\lambda-2)^2$$

$$\det(A_z) = 2(\lambda-2)^2(\lambda+1).$$

Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για το λ:

(i) $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -1$. Τότε $\det(A) \neq 0$, οπότε έχουμε μοναδική λύση, η οποία (από την μέθοδο του Cramer) είναι η διατεταγμένη τριάδα

$$\left(\frac{\det(A_x)}{\det(A)}, \frac{\det(A_y)}{\det(A)}, \frac{\det(A_z)}{\det(A)}\right) = \left(\frac{3(\lambda+2)}{\lambda+1}, \frac{-3}{\lambda+1}, -2\right).$$

(ii) $\lambda=2$. Τότε $\det(A)=\det(A_x)=\det(A_y)=\det(A_z)=0$ και το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ x+2y+2z=2 \\ 5x+10y+10z=10 \end{cases}$$

Είναι άμεσο ότι το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, των οποίων η γενική μορφή είναι:

$$(2-2y-2z,\ y,\ z),\quad y,z\in\mathbb{R}.$$

(iii) $\lambda=-1$. Τότε $\det(A)=0$, αλλά $\det(A_x)\neq 0$. Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο. □

(β) Είναι $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ και $A^3=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$.

Ισχυριζόμαστε ότι $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό μας με επαγωγή.

Για $n=1$, το συμπέρασμα είναι προφανές.

Υποθέτουμε ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και θα αποδείξουμε ότι $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$.

Έχουμε $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Τώρα, για $n \in \mathbb{N}$, έχουμε:

$$A + A^2 + \dots + A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1+\dots+1 & 0+0+\dots+0 \\ 1+2+\dots+n & 1+1+\dots+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & n \end{pmatrix}.$$

(γ) Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Τότε $A^2 = A$ και $A \neq O_2, I_2$.

Εφόσον

$$A^2 = A \iff A(A-I) = O,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$A(A-I) = O \not\Longrightarrow A = O \text{ ή } A = I. \qquad \square$$

<u>ΘΕΜΑ 2</u> (α) Εφόσον ο A είναι ρίζα της εξίσωσης $2X^2 - 3X - I_n = O_n$, έχουμε ότι

$$2A^2 - 3A - I_n = O_n$$

$$\Rightarrow 2A^2 - A - 2A + I_n - 2I_n = O_n$$

$$\Rightarrow A(2A - I_n) - (2A - I_n) = 2I_n$$

$$\Rightarrow (A - I_n)(2A - I_n) = 2I_n$$

$$\Rightarrow (A - I_n)\left[\frac{1}{2}(2A - I_n)\right] = I_n.$$

Άρα, ο $A - I_n$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(A - I_n)^{-1} = \frac{1}{2}(2A - I_n). \qquad \square$$

(β) Έχουμε:

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 + 3r_1}}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -10 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_2 \to (-1) r_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -10 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{r_1 \to r_1 - 3r_2 \\ r_3 \to r_3 - 11 r_2}}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 11 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{r_1 \to r_1 - r_3 \\ r_2 \to r_2 + r_3}}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 14 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -17 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 11 & 1 \end{array}\right)$$

Άρα, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{pmatrix}$.

Από τα παραπάνω, για να γράψουμε τον A ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε τους αντίστροφους των παραπάνω στοιχειωδών στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, ξεκινώντας από το τέλος προς την αρχή.

$e_1 = r_2 \to r_2 - r_3$, $e_2 = r_1 \to r_1 + r_3$,

$e_3 = r_3 \to r_3 + 11 r_2$, $e_4 = r_1 \to r_1 + 3 r_2$,

$e_5 = r_2 \to (-1) r_2$, $e_6 = r_3 \to r_3 - 3 r_1$,

$e_7 = r_2 \to r_2 + 8 r_1$.

Για $i = 1, \ldots, 7$, έστω $E_i = e_i(I_3)$ οι αντίστοιχοι στοιχειώδεις πίνακες (να υπολογίσετε τους E_i).

Τότε $A = E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1$. $\square$

<u>ΘΕΜΑ 3</u> Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1+a & b+2 & b-a+1 \\ 1-a & 2a+1 & 3a \\ 1+a & a-b & -b-1 \end{vmatrix} \overset{c_1 \to c_1 + c_3}{=\!=} \begin{vmatrix} b+2 & b+2 & b-a+1 \\ 1+2a & 2a+1 & 3a \\ a-b & a-b & -b-1 \end{vmatrix}$$

$= 0$ (διότι η 1^{η} στήλη είναι ίση με την 2^{η} στήλη).

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+0 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ 0+ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2 & b^2 & ca \\ 0 & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & bc & ca+c^2 \\ ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} 1 & bc & ca+c^2 \\ 1 & b^2 & ca \\ 0 & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} + ab \begin{vmatrix} 0 & bc & ca+c^2 \\ 1 & b^2 & ca \\ 1 & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} 1 & bc & ca+c^2 \\ 0 & b(b-c) & -c^2 \\ 0 & b(b+c) & c^2 \end{vmatrix} + ab \begin{vmatrix} 0 & bc & ca+c^2 \\ 0 & -bc & ca-c^2 \\ 1 & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= a^2bc^2 \begin{vmatrix} b-c & -1 \\ b+c & 1 \end{vmatrix} + ab^2c \begin{vmatrix} 1 & ca+c^2 \\ -1 & ca-c^2 \end{vmatrix}$$

$$= a^2bc^2\left(b-c+b+c\right) + ab^2c\left(ca-c^2+ca+c^2\right)$$

$$= 2a^2b^2c^2 + 2a^2b^2c^2$$

$$= 4a^2b^2c^2.$$

□

ΘΕΜΑ 4 Από τις υποθέσεις του θέματος και τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

παίρνουμε ότι

$$\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(θυμηθείτε ότι $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.)

Τώρα,

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\begin{cases} c_{11} = \frac{1}{3}\alpha \\ c_{21} = \frac{1}{3}\beta \\ c_{12} = \frac{1}{3}\gamma \\ c_{22} = \frac{1}{3}\delta \end{cases}$$

Άρα,

$$A = \begin{pmatrix} \delta/3 & -\beta/3 \\ -\gamma/3 & \alpha/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Έλεγχος :

$$AA^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \delta\alpha-\beta\gamma & \delta\beta-\beta\delta \\ -\gamma\alpha+\alpha\gamma & -\gamma\beta+\alpha\delta \end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 .$$

(*) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ και $\det(A^{-1}) = 3$, άρα

$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 3$ ή $\alpha\delta - \beta\gamma = 3$. □