ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 17

15/12/2020

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $A \in M_n(K)$. Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$ του A είναι

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1} (x-\lambda_2)^{m_2} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ του A είναι

$$m_A(x) = (x-\lambda_1)^{l_1} (x-\lambda_2)^{l_2} \cdots (x-\lambda_k)^{l_k}$$

όπου $1 \leq l_i \leq m_i$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, k$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από το γεγονός ότι το $m_A(x)$ διαιρεί το $\chi_A(x)$ έπεται ότι

$$m_A(x) = (x-\lambda_1)^{l_1} (x-\lambda_2)^{l_2} \cdots (x-\lambda_k)^{l_k}$$

όπου $0 \leq l_i \leq m_i$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, k$.

Από το γεγονός ότι τα $m_A(x)$ και $\chi_A(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες, έπεται ότι $l_i > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ ή ισοδύναμα $l_i \geq 1$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την απόδειξη. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $A \in M_n(K)$. Αν ο A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε είτε $m_A(x) = \chi_A(x)$ είτε $m_A(x) = -\chi_A(x)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι n διακεκριμένες ιδιοτιμές του A. Τότε

$$(*) \quad \chi_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n).$$

Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$(**) \quad m_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n).$$

Αν ο n είναι άρτιος, τότε από τις $(*)$ και $(**)$ παίρνουμε ότι $m_A(x) = \chi_A(x)$.

Αν ο n είναι περιττός, τότε από τις $(*)$ και $(**)$ παίρνουμε ότι $m_A(x) = -\chi_A(x)$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

ΛΥΣΗ Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(x) = (x-1)^2 (x-2)^2.$$

Από το προτελευταίο θεώρημα, το ελάχιστο πολυώνυμο του A πρέπει να είναι ένα από τα παρακάτω πολυώνυμα:

(α) $(x-1)(x-2)$,

(β) $(x-1)^2(x-2)$,

(γ) $(x-1)(x-2)^2$,

(δ) $(x-1)^2(x-2)^2$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο καθορίζεται τώρα εξετάζοντας κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

$$(A-I_4)(A-2I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Επομένως, το πολυώνυμο στο (α) δε μπορεί να είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A (θυμηθείτε ότι το $m_A(x)$ ικανοποιεί $m_A(A)=0$).

$$(A-I_4)^2(A-2I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= O.$$

Επομένως, το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το $(x-1)^2(x-2)$, διότι: Θυμηθείτε αρχικά ότι το $m_A(x)$ είναι το <u>μοναδικό</u> πολυώνυμο που ικανοποιεί:
(1) ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης του x είναι ίσος με 1 (2) $m_A(A) = 0$ (3) το $m_A(x)$ είναι του μικρότερου βαθμού ανάμεσα σε όλα τα πολυώνυμα τα οποία ικανοποιούν τις (1) και (2).

Το πολυώνυμο (δ) απορρίπτεται αφού ο βαθμός του είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του (β) (το οποίο ικανοποιεί τις (1), (2) — και το $m_A(x)$ πρέπει να ικανοποιεί και τη (3)).

Το πολυώνυμο (γ) απορρίπτεται διότι: το (γ) έχει τον ίδιο βαθμό με το (β), ικανοποιεί την (1), αλλά δε μπορεί να ικανοποιεί την (2) (δηλαδή, έχουμε ότι $(A-I_4)(A-2I_4)^2 \neq 0$) διότι αλλιώς, θα είχαμε ότι τα πολυώνυμα (β) και (γ) είναι δύο διαφορετικά πολυώνυμα τα οποία ικανοποιούν τις (1), (2) και (3). Αυτό όμως θα έρχονταν σε αντίφαση με το γεγονός ότι το $m_A(x)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο που ικανοποιεί τις (1), (2), (3). Άρα, το πολυώνυμο στο (β) είναι το $m_A(x)$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ (για τον αναγνώστη) Να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο για κάθε έναν από τους παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

ΑΣΚΗΣΗ (για τον αναγνώστη) Αν ένας πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)$, τότε να βρεθούν όλα τα δυνατά ελάχιστα πολυώνυμα του A. Να βρεθούν επίσης πίνακες A οι οποίοι έχουν αυτά το πολυώνυμα σαν ελάχιστα πολυώνυμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(α) Να εξετάσετε αν ο A είναι αντιστρέψιμος χρησιμοποιώντας τη θεωρία αυτού του κεφαλαίου.

(β) Να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

<u>ΛΥΣΗ</u> Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

$$\det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 4-x & 0 \\ 4 & 0 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (4-x)\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1 \to c_1 - c_2}{=} (4-x)\begin{vmatrix} -x & 1 \\ x & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (4-x)\,x\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (4-x)\,x\,(x-5).$$

Συνεπώς, ο A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές, τις $0, 4, 5$.

(α) Εφόσον το 0 είναι ιδιοτιμή του A, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(β) Εφόσον ο 3×3 πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές, έπεται ότι $m_A(x) = -\chi_A(x) = (x-4)x(x-5)$. $\square$

2) Έστω $A, B \in M_n(K)$. Αν ο B είναι όμοιος προς τον A, τότε οι A, B έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

<u>ΛΥΣΗ</u> Από την υπόθεση της άσκησης, υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$B = P^{-1} A P$$

Με επαγωγή, είναι εύκολο να αποδειχθεί (άσκηση για τον αναγνώστη) ότι

$$B^k = P^{-1} A^k P \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Επομένως, αν $q(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, τότε

$$\begin{aligned} q(B) &= \alpha_m B^m + \dots + \alpha_1 B + \alpha_0 I_n \\ &= \alpha_m P^{-1} A^m P + \dots + \alpha_1 P^{-1} A P + \alpha_0 P^{-1} P \\ &= P^{-1} (\alpha_m A^m + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n) P \\ &= P^{-1} q(A) P. \end{aligned}$$

Άρα, $q(A) = O$ αν και μόνο αν $q(B) = O$.

Από την τελευταία συνθήκη και το αποτέλεσμα της θεωρίας "Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_X(x)$ ενός πίνακα $X \in M_n(K)$ διαιρεί κάθε πολυώνυμο $p(x)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $p(X) = O$" έπεται ότι το $m_A(x)$ διαιρεί το $m_B(x)$ και το $m_B(x)$ διαιρεί το $m_A(x)$ (διότι: $m_B(B) = O$, οπότε από τη παραπάνω σχέση, $m_B(A) = O$. Από το αποτέλεσμα της θεωρίας, το $m_A(x)$ διαιρεί το $m_B(x)$. Παρόμοια, το $m_B(x)$ διαιρεί το $m_A(x)$).

Άρα, $m_A(x) = m_B(x)$. □

3) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ όπου $a_{ij} = 1$ για όλα τα $i = 1, \dots, n$ και $j = 1, \dots, n$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

$$\det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1 \to c_1 + c_2 + \dots + c_n}{=} \begin{vmatrix} n-x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n-x & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-x & 1 & 1 & \dots & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (n-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=2,\dots,n}{\overset{r_i \to r_i - r_1}{=}} (n-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & -x & 0 & \dots & 0 \\ & & -x & \dots & 0 \\ & O & & \ddots & \vdots \\ & & & & -x \end{vmatrix}$$

$$= (n-x)(-1)^{n-1} x^{n-1}.$$

Επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι ένα πολυώνυμο από τα $(x-n)x^k$, $k=1,\dots,n-1$.

Για $k=1$, $(A-nI_n)A = O_n$. Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το $m_A(x) = (x-n)x$. $\square$

4) Να βρεθούν τα $m_A(x)$ και $m_B(x)$ των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

και να εξετασθεί αν οι A, B είναι όμοιοι.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε $\chi_A(x) = (2-x)^3 = \chi_B(x)$.

Άρα τα $m_A(x)$ και $m_B(x)$ είναι ένα από τα παρακάτω πολυώνυμα:

(i) $x-2$ (ii) $(x-2)^2$ (iii) $(x-2)^3$.

Δουλεύοντας όπως στο Παράδειγμα της σελίδας 2 εύκολα βρίσκουμε ότι $m_A(x) = (x-2)^2$ και $m_B(x) = (x-2)^3$. Εφόσον $m_A(x) \neq m_B(x)$, από την άσκηση 2 έπεται ότι οι A, B δεν είναι όμοιοι. □

5) Ισχύει ότι

$$\boxed{\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x) \quad \text{για κάθε } A, B \in M_n(K).}$$

Ισχύει ότι $m_{AB}(x) = m_{BA}(x)$ για κάθε $A, B \in M_n(K)$;

ΛΥΣΗ Δεν ισχύει. Πράγματι, έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

και

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$\chi_{AB}(x) = x^2$, οπότε $m_{AB}(x) = x$ ή $m_{AB}(x) = x^2$.

$AB = O_2$, άρα $m_{AB}(x) = x$.

$\chi_{BA}(x) = x^2$, οπότε $m_{BA}(x) = x$ ή $m_{BA}(x) = x^2$.

$BA = A \neq O$. Άρα, $m_{BA}(x) = x^2$.

Συνεπώς $m_{AB}(x) \neq m_{BA}(x)$. $\square$

6) (για τον αναγνώστη) Να βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

7) Έστω $A \in M_5(K)$ τέτοιος ώστε $A^9 = \Theta$.

Να αποδείξετε ότι $A^5 = \Theta$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = x^9$.

Από την υπόθεση της άσκησης έχουμε ότι $p(A) = O$.

Από το αποτέλεσμα της θεωρίας "Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_X(x)$ ενός πίνακα $X \in M_n(K)$ διαιρεί κάθε πολυώνυμο $p(x)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $p(X) = O$" έχουμε ότι το $m_A(x)$ διαιρεί το παραπάνω πολυώνυμο $p(x)$.

Εφόσον ο A είναι 5×5, έπεται ότι $m_A(x) = x^k$ για κάποιο k με $1 \leq k \leq 5$. Αφού $m_A(A) = O$, δηλαδή $A^k = O$, έπεται ότι $A^5 = O$. □