"Λύσεις"

1] Αληθεύει ότι το $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&-5\\1&1&-5&1\\1&-5&1&1\\-5&1&1&1\end{pmatrix}$$; Αληθεύει ότι το 6 είναι ιδιοτιμή του A;

Λύση

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-5\\1&1&-5&1\\1&-5&1&1\\-5&1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Επειδή $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ έπεται ότι το $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A.

Για να είναι το 6 ιδιοτιμή του A θα πρέπει να ισχύει $\det(A-6I_n)=0$

Έχουμε: $$\det(A-6I_n)=\begin{vmatrix}-5&1&1&-5\\1&-5&-5&1\\1&-5&-5&1\\-5&1&1&-5\end{vmatrix}=0$$ {αφού η 1η και η 4η στήλη είναι ίσες}.

Άρα, 6 είναι ιδιοτιμή του A

2] Γνωρίζουμε ότι για κάθε $A\in M_n(K)$, οι πίνακες A και A^t έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (αποδείχθηκε στο μάθημα 14, στις 7/12/2020, στην άσκηση 2, σελίδα 13). Δώστε ένα παράδειγμα ενός $A\in M_n(K)$ που έχει ένα ιδιοδιάνυσμα το οποίο δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A^t

Λύση Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ και βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του

$$\chi_A(x)=\det(A-xI_2)=\begin{vmatrix}1-x & 1\\ 0 & 1-x\end{vmatrix}=(1-x)^2$$

Άρα, 1 είναι η ιδιοτιμή του A με πολλαπλότητα 2.

Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1.
Αυτά είναι οι μη-μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(A-(1)I_2)\cdot X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1-1 & 1\\ 0 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}0x_1+1x_2=0 \Leftrightarrow x_2=0\\ 0x_1+0x_2=0\end{cases}$$

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1 είναι τα διανύσματα $(x,0)$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$. Ένα συγκεκριμένο ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην 1 είναι το $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.

Τώρα, $A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Επίσης, $A^t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\neq\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα το $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A^t.

3] Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Δίνεται ότι οι πίνακες $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ είναι όμοιοι, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν τα a, b. (Υπενθυμίζουμε ότι δύο πίνακες $A, B \in M_n(K)$ λέγονται όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(K)$ τ.ω. $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$)

Λύση: Στο μάθημα 14, στις 7/12/2020, στην άσκηση 3, στη σελίδα 14, έχει αποδειχθεί ότι αν δύο πίνακες είναι όμοιοι, τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο (άρα και τις ίδιες ιδιοτιμές).
Επομένως αφού A και B όμοιοι, θα ισχύει $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & a & 1 \\ a & 1-x & b \\ 1 & b & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{ως προς την πρώτη στήλη}}{\overset{\text{πολυγραμμικότητα}}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1-x & b \\ 1 & b & 1-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & a & 1 \\ 0 & 1-x & b \\ 0 & b & 1-x \end{vmatrix} =$$

εφαρμόστηκαν οι γραμμοπράξεις $\gamma_2 \to \gamma_2 - a\gamma_1$ και $\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-x-a^2 & b-a \\ 0 & b-a & -x \end{vmatrix} + \underbrace{(-x)\left[(1-x)^2 - b^2\right]}_{\text{ανάπτυγμα ορίζουσας ως προς την πρώτη στήλη}} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-x-a^2 & b-a \\ b-a & -x \end{vmatrix} +$$

$$+ (-x)(1+x^2-2x-b^2) = -x + x^2 + a^2x - (b-a)^2 - x - x^3 + 2x^2 + xb^2 =$$

$$= -x^3 + 3x^2 + (b^2 + a^2 - 2)x - (b-a)^2.$$

$$\chi_B(x) = \det(B - xI_3) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = \underbrace{(-x)\cdot(1-x)\cdot(2-x)}_{\text{ο } B \text{ είναι τριγωνικός}} =$$

$$= (-x + x^2)(2-x) = -2x + x^2 + 2x^2 - x^3 = -x^3 + 3x^2 - 2x$$

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) \Rightarrow \begin{cases} b^2 + a^2 - 2 = -2 & (1) \\ -(b-a)^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Από την (2) έχουμε $|b-a| = 0$ οπότε $b = a$. Συνεπώς, από την (1) έχουμε $2a^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow a = 0$. Οπότε $a = b = 0$.

4] Έστω $A \in M_n(K)$ και έστω $\lambda \neq \mu$ δύο ιδιοτιμές του A. Δείξτε ότι $\nexists$ ιδιοδιάνυσμα του A που να αντιστοιχεί και στην λ και στην μ.

Λύση. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει ένα τέτοιο ιδιοδιάνυσμα u του A. Τότε $Au = \lambda u$ και $Au = \mu u$.

Άρα, $\lambda u = \mu u$, συνεπώς $(\lambda - \mu)u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Επειδή $u \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (αφού u ιδιοδιάνυσμα) έπεται ότι $\lambda - \mu = 0$, οπότε $\lambda = \mu$. Άτοπο.

5] Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Λύση/ • Για τις ιδιοτιμές θα έχουμε:

$$\chi_A(x)=\det(A-xI_3)=\begin{vmatrix}1-x & -2 & 2\\ 0 & -3-x & 4\\ 0 & -2 & 3-x\end{vmatrix}=(1-x)\begin{vmatrix}-3-x & 4\\ -2 & 3-x\end{vmatrix}=$$

$$=(1-x)\cdot(-9+\cancel{3x}-\cancel{3x}+x^2+8)=(1-x)(x^2-1)=-(x-1)(x+1)(x-1)=$$

$$=-(x-1)^2(x+1).$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda=1$, με πολλαπλότητα 2

και $\lambda=-1$ με πολλαπλότητα 1.

• Βρίσκουμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1. Αυτά είναι οι μη-μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(A-I_3)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-2x_2+2x_3=0\\ -4x_2+4x_3=0\\ -2x_2+2x_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow x_2=x_3.$$ Η γενική μορφή των λύσεων του τελευταίου συστήματος είναι:

$$(x_1, x_2, x_2)_{x_1\in\mathbb{R}-\{0\} \text{ ή } x_2\in\mathbb{R}-\{0\}}.$$

• Βρίσκουμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -1. Αυτά είναι οι μη-μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος $(A-(-1)I_3)\cdot X=0$. Επομένως θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 & (1) \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 & (2) \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Από (2) και (3) $x_2 = 2x_3$. Θέτοντας στην (1) όπου $x_2 = 2x_3$ προκύπτει ότι $x_1 = x_3$.

Άρα η γενική μορφή λύσεων του τελευταίου συστήματος θα είναι:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, 2x, x), \; x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$