ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 16

14/12/2020

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $A \in M_3(\mathbb{R})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(x) = -x^3 - x^2 + x + 1.$$

Να γράψετε κάθε έναν από τους πίνακες A^{-4} και A^8 ως γραμμικό συνδυασμό των πινάκων I_3, A, A^2 (δηλαδή, για $X \in \{A^{-4}, A^8\}$, $X = \lambda_1 I_3 + \lambda_2 A + \lambda_3 A^2$ για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$), και να βρείτε τις ιδιοτιμές τους.

ΛΥΣΗ Καταρχήν παρατηρούμε ότι ο A^{-1} υπάρχει διότι ο σταθερός όρος του $\chi_A(x)$ είναι 1, και συνεπώς είναι διάφορος του μηδενός.

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$\chi_A(A) = O_3 \Rightarrow -A^3 - A^2 + A + I_3 = O_3$$

$$\Rightarrow (-A^2 - A + I_3)\cdot A = -I_3$$

$$\Rightarrow -A^2 - A + I_3 = -A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A^2 + A - I_3 \qquad (*)$$

Χρησιμοποιώντας την $(*)$ έχουμε:

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 \overset{(*)}{=} A^{-1}(A^2 + A - I_3) = A + I_3 - A^{-1}$$

$$\overset{(*)}{=} -A^2 + 2I_3.$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = A^{-2}A^{-1} = (-A^2+2I_3)A^{-1}$$
$$= -A + 2A^{-1}$$
$$\overset{(*)}{=} 2A^2 + A - 2I_3$$

$$A^{-4} = (A^{-3})(A^{-1}) = (2A^2 + A - 2I_3)A^{-1}$$
$$= 2A + I_3 - 2A^{-1}$$
$$\overset{(*)}{=} -2A^2 + 3I_3$$

Άρα, $A^{-4} = 3I_3 - 2A^2$ και συνεπώς ο A^{-4} γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των I_3, A, A^2.

Για τις ιδιοτιμές του A^{-4}, βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του A. Είναι εύκολο να ελέγξετε ότι οι ρίζες του $\chi_A(x)$ είναι οι $\lambda = 1$ με πολλαπλότητα 1 και $\lambda = -1$ με πολλαπλότητα 2.

Από τα αποτελέσματα: "Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα A, τότε ο λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}" και "Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A, τότε ο λ^k είναι ιδιοτιμή του A^k, για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$", παίρνουμε ότι οι ιδιοτιμές του A^{-4} $(= (A^{-1})^4)$ είναι: $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 3.

Χρησιμοποιώντας το δεύτερο από τα παραπάνω δύο αποτελέσματα, παίρνουμε επίσης ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A^8 είναι: $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 3.

Τώρα,

$$x^8 = \chi_A(x)\left(-x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3\right) + \left(4x^2 - 3\right)$$

Επομένως, από το θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$\begin{aligned} A^8 &= \chi_A(A)\left(-A^5 + A^4 - 2A^3 + 2A^2 - 3A + 3I_3\right) + \left(4A^2 - 3I_3\right) \\ &= O_3 + 4A^2 - 3I_3 \\ &= 4A^2 - 3I_3 . \end{aligned}$$

Επομένως, ο A^8 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των I_3, A, A^2. $\square$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Με εφαρμογή του θεωρήματος των Cayley-Hamilton να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

και να γράψετε τον A^4 ως γραμμικό συνδυασμό των πινάκων I_3, A, A^2.

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $A \in M_2(K)$ με $\chi_A(x) = x^2 - x$. Να αποδείξετε ότι $A^n = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΛΥΣΗ Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton παίρνουμε ότι $A^2 - A = O_2$ ή ισοδύναμα $A^2 = A$. Χρησιμοποιώντας τη τελευταία σχέση, δείξτε το ζητούμενο με επαγωγή στο n. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι το πλήθος πίνακες $A \in M_2(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $A^2 - 5A + 6I_2 = O_2$.

ΛΥΣΗ Κάθε πίνακας της μορφής

$$(*) \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\chi_A(x) = x^2 - 5x + 6$. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε ότι $A^2 - 5A + 6I_2 = O_2$. Από την $(*)$ και τα παραπάνω, το πλήθος των A με την ιδιότητα $A^2 - 5A + 6I_2 = O_2$ είναι άπειρο. $\square$

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω $A \in M_n(K)$ $(K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C})$.

Γνωρίζουμε ότι

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

για κάποια $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ στο K. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = (-1)^n \chi_A(x)$. Τότε

$p(x) = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, όπου $b_i = (-1)^n \alpha_i$ $(i = 0, \dots, n-1)$. Στο $p(x)$ ο συντελεστής του x^n (δηλαδή, ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης του x στο $p(x)$) είναι ίσος με 1, και από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε:

$$p(A) = (-1)^n \chi_A(A) = 0$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε:

(1) Ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης του x είναι ίσος με 1 (οπότε $p(x) \neq 0$),

(2) $p(A) = 0$.

Επομένως, το σύνολο

$S = \{ k \in \mathbb{N} :$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού k το οποίο ικανοποιεί τις (1) και (2)$\}$

είναι μη κενό, αφού $n \in S$. Από την Αρχή της Καλής Διάταξης (δηλαδή, από την πρόταση "κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο", βλ. Παράρτημα στο τέλος και Απειροστικό Λογισμό I) έπεται ότι το σύνολο S έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω

$$k_0 = \min(S).$$

Έχουμε ότι $k_0 \leq n$ (αφού $n \in S$). Εφόσον $k_0 \in S$, από τον ορισμό του συνόλου S έπεται ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο $p^*(x)$ βαθμού k_0, το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες (1) και (2).

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το πολυώνυμο $p^*(x)$ είναι το μόνο πολυώνυμο βαθμού k_0 που ικανοποιεί τις (1) και (2).

Έστω ότι

$$p^*(x) = x^{k_0} + \lambda_{k_0-1} x^{k_0-1} + \dots + \lambda_1 x + \lambda_0$$

για κάποια $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k_0-1}$ στο $\mathbb{K}$, και έστω

$$q_1(x) = x^{k_0} + \mu_{k_0-1} x^{k_0-1} + \dots + \mu_1 x + \mu_0$$

για κάποια $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{k_0-1}$ στο $\mathbb{K}$, ένα πολυώνυμο βαθμού k_0 που ικανοποιεί τις (1) και (2).

Θα αποδείξουμε ότι $p^*(x) = q(x)$ ή ισοδύναμα ότι $\lambda_i = \mu_i$ για όλα τα $i = 0, 1, \ldots, k_0 - 1$.

Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή υποθέτουμε ότι $\lambda_i \neq \mu_i$ για κάποιο $i \in \{0, 1, \ldots, k_0 - 1\}$. Τότε το πολυώνυμο

$$r(x) = p^*(x) - q(x) = (\lambda_{k_0-1} - \mu_{k_0-1})x^{k_0-1} + \cdots + (\lambda_1 - \mu_1)x + (\lambda_0 - \mu_0)$$

είναι μη-μηδενικό και ο βαθμός του $r(x)$, έστω d, ικανοποιεί $0 \leq d \leq k_0 - 1 < k_0$. Επίσης,

$$r(A) = p^*(A) - q(A) = 0 - 0 = 0.$$

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $d \geq 1$. Διότι, αν $d = 0$ τότε το πολυώνυμο $r(x)$ είναι σταθερό, και έστω $r(x) = c$ για κάποιο $c \neq 0$. Τότε όμως $r(A) = c \cdot I_n \neq 0$ (διότι $c \neq 0$), το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $d \geq 1$. Έστω v_d ο συντελεστής του x^d στο $r(x)$. (Τότε $v_d \neq 0$.) Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$s(x) = \frac{1}{v_d} r(x).$$

Τότε, ο βαθμός του $s(x)$ είναι ίσος με d, ο συντελεστής του x^d στο $s(x)$ είναι ίσος με 1 και $s(A) = \frac{1}{v_d} r(A) = 0$.

Άρα, το $s(x)$ ικανοποιεί τις (1) και (2), οπότε $d \in S$. όμως, $d \leq k_0 - 1 < k_0 = \min(S)$ (συνεπώς $d < \min(S)$), οπότε καταλήξαμε σε άτοπο.

Άρα, $\lambda_i = \mu_i$ για όλα τα $i = 0, 1, \ldots, k_0 - 1$, οπότε $p^*(x) = q(x)$.

Με βάση τα παραπάνω επιχειρήματα, το πολυώνυμο $p^*(x)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο που ικανοποιεί:

(1) ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης του x είναι ίσος με 1,

(2) $p^*(A) = 0$,

(3) το $p^*(x)$ είναι του μικρότερου βαθμού ανάμεσα σε όλα τα πολυώνυμα $q(x)$ τα οποία ικανοποιούν τις (1) και (2) (δηλαδή, ικανοποιούν τις (1) και $q(A)=0$).

Το πολυώνυμο $p^*(x)$ λέγεται ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A και συμβολίζεται με $m_A(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $A \in M_n(K)$. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ του A διαιρεί κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο $p(x)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $p(A)=0$. Ιδιαίτερα, το $m_A(x)$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$ του A.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $p(x)$ ένα μη μηδενικό πολυώνυμο τέτοιο ώστε $p(A)=0$. Έστω

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ όπου } a_k \neq 0.$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$r(x) = \frac{1}{a_k} p(x).$$

Τότε ο βαθμός του $r(x)$ είναι k, ο συντελεστής του x^k στο $r(x)$ είναι ίσος με 1 και $r(A) = \frac{1}{a_k} p(A) = 0$. Άρα, το $r(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες (1) και (2) (βλ. τις συνθήκες πριν από το Θεώρημα), οπότε
$\text{βαθμός}(m_A(x)) \leq \text{βαθμός}(r(x)) = \text{βαθμός}(p(x))$
(βλ. ιδιότητα (3) του $m_A(x)$ πριν από το Θεώρημα).

Επομένως, από τον αλγόριθμο διαίρεσης πολυωνύμων υπάρχουν πολυώνυμα $\pi(x)$ και $v(x)$ τέτοια ώστε

$$p(x) = m_A(x)\pi(x) + v(x)$$

όπου $v(x) = 0$ ή $0 \leq \text{βαθμός}(v(x)) < \text{βαθμός}(m_A(x))$.

Έχουμε ότι

$$v(A) = p(A) - m_A(A)\pi(A) = 0 - 0\pi(A) = 0.$$

Αν $\text{βαθμός}(v(x)) = 0$, τότε $v(x) = c$ για κάποιο $c \neq 0$, οπότε $v(A) = cI_n \neq 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Αν $\text{βαθμός}(v(x)) \geq 1$, τότε έστω $\text{βαθμός}(v(x)) = d$ για κάποιο $d \geq 1$ και έστω v_d ο συντελεστής του x^d στο $v(x)$.

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$t(x) = \frac{1}{v_d} v(x).$$

Τότε $\text{βαθμός}(t(x)) = d = \text{βαθμός}(v(x))$, ο συντελεστής του

x^d στο $t(x)$ είναι ίσος με 1 και $t(A) = \frac{1}{v_d} u(A) = 0$.

Συνεπώς, το $t(x)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (1) και (2).

Όμως, βαθμός$(t(x)) <$ βαθμός$(m_A(x))$ και το $m_A(x)$ είναι του μικρότερου βαθμού ανάμεσα σε όλα τα πολυώνυμα που ικανοποιούν τις (1) και (2) (βλ. τις συνθήκες (1), (2) και (3) πριν από το Θεώρημα).

Επομένως, καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα $u(x) = 0$, οπότε το $m_A(x)$ διαιρεί το $p(x)$.

Ο δεύτερος ισχυρισμός του Θεωρήματος (δηλαδή ότι το $m_A(x)$ διαιρεί το $\chi_A(x)$) έπεται από τον πρώτο ισχυρισμό και το γεγονός ότι $\chi_A(A) = 0$ (από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton). $\square$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Έστω $A \in M_n(K)$. Τότε τα πολυώνυμα $m_A(x)$ και $\chi_A(x)$ έχουν τις ίδιες ρίζες.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Από το προηγούμενο Θεώρημα ("το $m_A(x)$ διαιρεί το $\chi_A(x)$") έπεται ότι κάθε ρίζα του $m_A(x)$ είναι επίσης ρίζα του $\chi_A(x)$. Άρα μένει να αποδείξουμε ότι κάθε ρίζα του $\chi_A(x)$ είναι επίσης ρίζα του $m_A(x)$.

Θα δώσουμε δύο τρόπους απόδειξης για να αποκομίσουμε ιδέες στη περιοχή αυτή.

<u>Α' τρόπος</u> Έστω λ μια ρίζα του $\chi_A(x)$. Τότε λ είναι ιδιοτιμή του A, οπότε έστω u ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στη λ. Έχουμε ότι $Au = \lambda u$.

Έστω ότι

$$m_A(x) = x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Έχουμε $m_A(A) = 0$, οπότε

$$\begin{aligned} 0 &= m_A(A)u \\ &= (A^k + \alpha_{k-1}A^{k-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n)u \\ &= A^k u + \alpha_{k-1}A^{k-1}u + \dots + \alpha_1 A u + \alpha_0 u \\ &= \lambda^k u + \alpha_{k-1}\lambda^{k-1}u + \dots + \alpha_1 \lambda u + \alpha_0 u \\ &= (\lambda^k + \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0)u \end{aligned}$$

Άρα, $(\lambda^k + \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0)u = 0$ και επειδή $u \neq 0$ (διότι το u είναι ιδιοδιάνυσμα του A) έπεται ότι $\lambda^k + \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$ ή $m_A(\lambda) = 0$.

Άρα το λ είναι ρίζα του $m_A(x)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

<u>Β' τρόπος</u> Έστω λ μια ρίζα του $\chi_A(x)$. Τότε $\det(A-\lambda I_n)=0$.

Επειδή $m_A(A)=0$ έπεται ότι $\text{βαθμός}(m_A(x))\geq 1$, οπότε από τον αλγόριθμο της διαίρεσης υπάρχει ένα πολυώνυμο $\pi(x)$ και ένας αριθμός $\upsilon\in K$ έτσι ώστε

$$m_A(x)=(x-\lambda)\pi(x)+\upsilon.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\upsilon=0$. Αν όχι, δηλαδή αν $\upsilon\neq 0$, τότε έχουμε:

$$0=m_A(A)=(A-\lambda I_n)\pi(A)+\upsilon I_n$$

$$\Rightarrow (A-\lambda I_n)\pi(A)=-\upsilon I_n$$

$$\overset{\upsilon\neq 0}{\Rightarrow} (A-\lambda I_n)\left(-\frac{1}{\upsilon}\pi(A)\right)=I_n$$

$\Rightarrow$ $A-\lambda I_n$ είναι αντιστρέψιμος

$$\Rightarrow \det(A-\lambda I_n)\neq 0.$$

Επομένως καταλήξαμε σε άτοπο (διότι είχαμε υποθέσει ότι λ ρίζα του $\chi_A(x)$). Άρα, $\upsilon=0$ και συνεπώς το $x-\lambda$ διαιρεί το $m_A(x)$. Επομένως το λ είναι ρίζα του $m_A(x)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. $\square$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Η Αρχή της Καλής Διάταξης είναι η εξής πρόταση: "Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο" (ως προς τη διάταξη $\leq$ του $\mathbb{R}$ την οποία κληρονομεί το $\mathbb{N}$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}$).

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης γίνεται με μαθηματική επαγωγή (ιδιαίτερα, σημειώνουμε ότι η Αρχή της Καλής Διάταξης είναι ισοδύναμη με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής).

Πράγματι, έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι το A έχει ελάχιστο στοιχείο. Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Ορίζουμε το παρακάτω σύνολο:

$$B = \{n \in \mathbb{N} : 1, 2, \ldots, n \notin A\}.$$

Με επαγωγή θα αποδείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $n \in B$. Οπότε θα πάρουμε ότι $B = \mathbb{N}$, το οποίο (από τον ορισμό του B) δίνει ότι $A = \emptyset$, και έτσι θα έχουμε καταλήξει σε άτοπο (διότι ξεκινήσαμε με την υπόθεση ότι $A \neq \emptyset$).

Καταρχήν, $1 \in B$ διότι εφόσον το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και δεν έχει ελάχιστο στοιχείο έπεται ότι $1 \notin A$. Υποθέτουμε τώρα ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $n \in B$ και θα αποδείξουμε ότι $n+1 \in B$.

Αφού $n \in B$, από τον ορισμό του B έπεται ότι $1, 2, \ldots, n \notin A$, και αφού $A \subseteq \mathbb{N}$ και το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, έπεται ότι $n+1 \notin A$. Άρα, $1, 2, \ldots, n+1 \notin A$ και συνεπώς $n+1 \in B$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Άρα, $B = \mathbb{N}$ και συνεπώς $A = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης "Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο". $\square$

Από την Αρχή της Καλής Διάταξης έπεται ότι το μη κενό υποσύνολο S του $\mathbb{N}$ στο τέλος της σελίδας 5 αυτής της διάλεξης, δηλαδή το σύνολο

$$S = \{ k \in \mathbb{N} : \text{υπάρχει πολυώνυμο } p(x) \text{ βαθμού } k \text{ το οποίο ικανοποιεί τις (1) και (2)} \},$$

έχει ελάχιστο στοιχείο.