ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 15

8/12/2020

(Συνεχίζουμε με μερικές ασκήσεις.)

8) Έστω $A, B \in M_n(K)$. Τότε οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

ΛΥΣΗ Υποθέτουμε ότι το $\lambda \in K$ είναι μια ιδιοτιμή του AB. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το λ:

(α) $\lambda = 0$. Τότε $\det(AB) = \det(AB - 0I_n) = 0$ (αφού υποθέσαμε ότι το $\lambda = 0$ είναι μια ιδιοτιμή του AB).

Επίσης, $$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA).$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε ότι $\det(BA) = 0$ ή ισοδύναμα $\det(BA - 0I_n) = 0$. Συνεπώς το 0 είναι ιδιοτιμή του BA.

(β) $\lambda \neq 0$. Έστω u ένα ιδιοδιάνυσμα του AB που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Οπότε

$$(*) \qquad (AB)u = \lambda u$$

Θέτουμε

$$w = Bu$$

(Παρατηρείστε ότι το w είναι διάνυσμα στήλη, συγκεκριμένα $w \in M_{n \times 1}(K)$.)

Έχουμε ότι $w \neq 0$. Αν όχι (δηλαδή, αν $w = 0$), τότε από την (*) έχουμε:

$$(AB)u = \lambda u \Rightarrow A(Bu) = \lambda u \Rightarrow Aw = \lambda u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A\cdot 0 = \lambda u \Rightarrow \lambda u = 0 \overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} u = 0.$$

Όμως, $u \neq 0$ γιατί το u είναι ιδιοδιάνυσμα του AB. Συνεπώς καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα, $w \neq 0$.

Τώρα έχουμε:

$$\begin{aligned}(BA)w &= (BA)(Bu)\\ &= B(A(Bu))\\ &= B((AB)u)\\ &= B(\lambda u) \qquad (\text{από την } (*))\\ &= \lambda(Bu)\\ &= \lambda w.\end{aligned}$$

Άρα $(BA)w = \lambda w$, και αφού $w \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι το λ είναι μια ιδιοτιμή του BA (και το w είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του BA που αντιστοιχεί στη λ).

Εντελώς παρόμοια αποδεικνύεται ότι "λ ιδιοτιμή του BA $\Rightarrow$ λ ιδιοτιμή του AB". Άρα, οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. $\square$

9) Έστω $A, B \in M_n(K)$ και έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

<u>ΛΥΣΗ</u> Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος, ο πίνακας BA γράφεται ως

$$BA = A^{-1}(AB)A$$

Άρα, ο BA είναι όμοιος προς τον AB. Από την άσκηση 3, 7/12/2020 σελίδα 14, παίρνουμε ότι οι AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, όπως το θέλαμε. $\square$

10) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^2 = -I_n$. Να βρείτε τις ιδιοτιμές του A και να δείξετε ότι ο n είναι άρτιος αριθμός.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

$$\det(A^2 - xI_n) = \det(-I_n - xI_n) = \det(-(1+x)I_n) = (-1)^n(x+1)^n.$$

Άρα, η ιδιοτιμή του A^2 είναι το -1 με πολλαπλότητα ίση με n. Από την άσκηση 7, 7/12/2020 σελίδα 17, γνωρίζουμε ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A, τότε το λ^2 είναι ιδιοτιμή του A^2. Άρα, $\lambda^2 = -1$, οπότε $\lambda = \pm i$.

Επομένως, ο πίνακας A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές και άρα ο βαθμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A, δηλαδή το n, δεν μπορεί να είναι περιττός αριθμός· το τελευταίο προκύπτει από το ακόλουθο θεώρημα: "Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα" — για μια απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος, βλ. για παράδειγμα Απειροστικό Λογισμό Ι, εφαρμογές των βασικών θεωρημάτων στη συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων.

Επομένως, ο n είναι άρτιος. $\square$

ii) Να βρείτε έναν πίνακα A με $\chi_A(x) = -x^3 - 2x^2 + 7x - 4$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Αφού ο βαθμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι 3, αναζητούμε έναν 3×3 πίνακα με το παραπάνω χαρ. πολυώνυμο. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$\chi_A(x) = -(x-1)^2(x+4).$$

Άρα, οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda = 1$ με πολλαπλότητα 2 και $\lambda = -4$ με πολλαπλότητα 1.

Έτσι, ένας πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το παραπάνω είναι ο 3×3 διαγώνιος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(βλ. επίσης άσκηση 1, 7/12/2020, σελίδα 12) $\square$

12) Σωστό ή Λάθος;

(α) Κάθε πίνακας στο $M_n(\mathbb{R})$ έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

(β) Κάθε πίνακας στο $M_n(\mathbb{R})$ έχει n διακεκριμένες και πιθανόν μιγαδικές ιδιοτιμές.

(γ) Κάθε πίνακας στο $M_n(\mathbb{R})$ έχει n όχι αναγκαστικά διακεκριμένες και πιθανόν μιγαδικές ιδιοτιμές.

(δ) Αν το u είναι ιδιοδιάνυσμα του A, τότε το u είναι ιδιοδιάνυσμα του $A+cI_n$, για οποιοδήποτε $c\in\mathbb{R}$.

(ε) Αν το λ είναι μια ιδιοτιμή του A, τότε το λ είναι μια ιδιοτιμή του $A+cI_n$, για οποιοδήποτε $c\in\mathbb{R}$.

(στ) Αν το u είναι ιδιοδιάνυσμα του αντιστρέψιμου πίνακα A, τότε το cu είναι ιδιοδιάνυσμα του A^{-1} για οποιοδήποτε $c\in\mathbb{R}-\{0\}$.

<u>ΛΥΣΗ</u> (α) Λάθος. Βλ. παρατήρηση 4, 7/12/2020, σελ. 6.

(β) Λάθος. Για παράδειγμα, θεωρούμε τον ταυτοτικό πίνακα

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

ο οποίος σαφώς δεν έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές.

(γ). Σωστό. Βλ. παρατήρηση 5, 7/12/2020, σελίδα 7.

(δ) Σωστό. Έστω ότι το u είναι ιδιοδιάνυσμα του A και έστω $c \in \mathbb{R}$. Έστω λ μια ιδιοτιμή του A που αντιστοιχεί στο u. Έχουμε:

$$\begin{aligned}(A + cI_n)u &= Au + cu \\ &= \lambda u + cu \\ &= (\lambda + c)u\end{aligned}$$

Άρα, το u είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $A + cI_n$ (με αντίστοιχη ιδιοτιμή τον αριθμό $\lambda + c$).

(ε) Λάθος. Θεωρούμε τον ταυτοτικό πίνακα I_2 και $c = 1$. Οι ιδιοτιμές του I_2 είναι $\lambda = 1$ με πολλαπλότητα 2. Οι ιδιοτιμές του $I_2 + cI_2 = 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ είναι $\lambda = 2$ με πολλαπλότητα 2. Επομένως, το 1 δεν είναι ιδιοτιμή του $2I_2$ ($= I_2 + cI_2$ για $c = 1$).

(στ) Σωστό. Έστω $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Έστω λ μια ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα A που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα u του A. (Οπότε $\lambda \neq 0$, βλ. άσκηση 4, 7/12/2020, σελ. 15.)

Έχουμε: $Au = \lambda u$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow c(Au) = c(\lambda u) \\ &\Rightarrow A(cu) = \lambda(cu) \\ &\Rightarrow cu = A^{-1}[\lambda(cu)] \\ &\Rightarrow cu = \lambda[A^{-1}\cdot(cu)] \overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} A^{-1}\cdot(cu) = \frac{1}{\lambda}(cu).\end{aligned}$$

Επειδή $u \neq 0$ (ως ιδιοδιάνυσμα του A) και $c \neq 0$ (εξ' υποθέσεως), έχουμε ότι $cu \neq 0$. Οπότε η ισότητα $A^{-1}(cu) = \frac{1}{\lambda}(cu)$ μας δίνει ότι το cu είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A^{-1}. □

13) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^3 = A$. Να αποδείξετε ότι αν ο λ είναι μια ιδιοτιμή του A τότε $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έστω λ μια ιδιοτιμή του A και έστω u ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& Au = \lambda u \\
\Rightarrow\ & A^3 u = \lambda^3 u \quad (\#7, 7/12/2020, \text{σελ. } 17) \\
\Rightarrow\ & Au = \lambda^3 u \quad (A^3 = A, \text{ υπόθεση}) \\
\Rightarrow\ & \lambda u = \lambda^3 u \\
\Rightarrow\ & \lambda^3 u - \lambda u = 0 \\
\Rightarrow\ & \lambda(\lambda^2 - 1) u = 0 \\
\Rightarrow\ & \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \quad (\text{διότι } u \neq 0 \text{ ως ιδιοδιάνυσμα}) \\
\Rightarrow\ & \lambda \in \{-1, 0, 1\}.
\end{aligned}
$$

□

14) Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n > 1$, ένας μηδενοδύναμος πίνακας (δηλαδή, $A^k = O_n$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$). Να αποδείξετε ότι ο A έχει μόνο το 0 ως ιδιοτιμή με πολλαπλότητα r για κάποιο $1 < r \leq n$.

(Λύνεται παρόμοια με την άσκηση 13, οπότε αφήνεται στον αναγνώστη.)

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Έστω $A \in M_n(K)$. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ είναι οι ιδιοτιμές του A (όχι απαραίτητα όλες διαφορετικές μεταξύ τους), τότε

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

= σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ του A.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Εφόσον $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A, έχουμε ότι

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

$$\Rightarrow \chi_A(0) = (-1)^n (0-\lambda_1)(0-\lambda_2)\cdots(0-\lambda_n)$$

$$= (-1)^n (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Άρα,

$$\chi_A(0) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \qquad (1)$$

Επίσης, $\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$. Άρα,

$$\chi_A(0) = \det(A - 0 I_n) = \det(A) \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

για κάποια $\alpha_i \in K$ $(i = 0, \dots, n-1)$. Άρα,

$$\chi_A(0) = (-1)^n 0^n + \alpha_{n-1} 0^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_0$$
$$= \alpha_0 \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) παίρνουμε ότι

$$\det(A) = \alpha_0 .$$

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u> Έστω $A \in M_n(K)$. Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A είναι διάφορος του μηδενός.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $B = A^3 - 4A^2 + 2I_2$ χωρίς να βρείτε τον B.

<u>ΛΥΣΗ</u> Θα βρούμε πρώτα τις ιδιοτιμές του A.

$$\det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 2-x & -2 \\ -2 & 5-x \end{vmatrix} = (x-1)(x-6)$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 6$.

Εφόσον $B = A^3 - 4A^2 + 2I_2$ έχουμε ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A τότε $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2$ είναι ιδιοτιμή του B. Πράγματι, αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A και u είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στη λ, τότε από την άσκηση 7 (7/12/20, σελ. 17) έχουμε:

$$\begin{aligned} Bu &= (A^3 - 4A^2 + 2I_2)u \\ &= A^3u - 4A^2u + 2u \\ &= \lambda^3 u - 4\lambda^2 u + 2u \\ &= (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2)u \end{aligned}$$

Εφόσον $u \neq 0$, η σχέση $Bu = (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2)u$ δίνει ότι $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2$ είναι μια ιδιοτιμή του B.

Επομένως, για $\lambda = 1$ έχουμε ότι $\mu_1 = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 = -1$ είναι ιδιοτιμή του B.

Επίσης, για $\lambda = 6$ έχουμε ότι $\mu_2 = 6^3 - 4 \cdot 6^3 + 2 = 74$ είναι ιδιοτιμή του B.

Αφού ο B είναι 2×2 πίνακας, οι αριθμοί μ_1 και μ_2 είναι όλες οι ιδιοτιμές του B. Άρα, από το προηγούμενο Θεώρημα, $\det(B) = \mu_1 \mu_2 = -74$. $\square$

Παράδειγμα (α) Έστω $A \in M_3(\mathbb{C})$ με $\chi_A(x) = -x^3+3x^2-2x$. Είναι ο A αντιστρέψιμος;

(β) Σωστό ή λάθος: "Αν οι ιδιοτιμές του A είναι οι $-1, 1, 2$ τότε $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}$."

ΛΥΣΗ (α) Ο A δεν είναι αντιστρέψιμος διότι ο σταθερός όρος του $\chi_A(x)$ είναι ίσος με μηδέν (βλ. προηγούμενο Πόρισμα).

(β) Λάθος (από τη διατύπωση της πρότασης δε μπορούμε να συμπεράνουμε ποιές είναι οι τιμές των πολλαπλοτήτων των ιδιοτιμών $-1, 1, 2$ ούτως ώστε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$ και κατ' επέκταση τον τύπο $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$). Πράγματι, ας θεωρήσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του διαγωνίου πίνακα A είναι οι $\lambda = -1$ με πολλαπλότητα 2, $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$ με πολλαπλότητα 1 η καθεμία. Ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$\det(A) = \underbrace{(-1)(-1)\cdot 1\cdot 2}_{\substack{\text{το γινόμενο των} \\ \text{ιδιοτιμών του } A}} = 2.$$

Άρα, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \dfrac{1}{2} \neq -\dfrac{1}{2}$. $\square$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ CAYLEY-HAMILTON

Έστω $A \in M_n(K)$ και έστω

$$p(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

ένα πολυώνυμο βαθμού m με συντελεστές από το K. Επειδή όλες οι δυνάμεις του A ορίζονται (διότι ο A είναι $n\times n$ πίνακας), μπορεί να οριστεί ο πίνακας

$$p(A) = \alpha_m A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n .$$

Ο $n\times n$ πίνακας $p(A)$ λέγεται πολυωνυμικός πίνακας του A.

π.χ. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ και $p(x) = 2x^2 - 3x + 7$, τότε

$$p(A) = 2A^2 - 3A + 7I_2 = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}.$$

Αν $A \in M_n(K)$ και $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το K, τότε λέμε ότι ο A είναι ρίζα του $p(x)$ αν $p(A) = O_n$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Cayley - Hamilton) Έστω $A \in M_n(K)$. Τότε
$$\chi_A(A) = O_n.$$

Δηλαδή, ο πίνακας A είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θέτουμε $B = adj(A - xI_n)$.
Γνωρίζουμε ότι για κάθε $W \in M_n(K)$ ισχύει ότι
$$W \cdot adj(W) = adj(W) \cdot W = det(W) \cdot I_n.$$
Άρα για $W = A - xI_n$ παίρνουμε ότι
$$\begin{aligned}(A - xI_n)B &= det(A - xI_n) I_n \\ &= \chi_A(x) I_n \\ &= \left((-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right) I_n \quad (*)\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του προσαρτημένου πίνακα έπεται ότι τα στοιχεία του πίνακα B είναι πολυώνυμα με μεταβλητή το x βαθμού το πολύ $n-1$. Άρα, ο πίνακας B γράφεται ως
$$B = B_{n-1}x^{n-1} + \dots + B_1 x + B_0 \qquad (**)$$
όπου τα B_i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ είναι $n \times n$ πίνακες αριθμών και συνεπώς είναι ανεξάρτητοι του x.

Από τις (*) και (**) παίρνουμε το ακόλουθο:

$$(A - x I_n)(B_{n-1}x^{n-1} + \dots + B_1 x + B_0) = \left((-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right) I_n$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -B_{n-1} = (-1)^n I_n \\ AB_{n-1} - B_{n-2} = a_{n-1} I_n \\ AB_{n-2} - B_{n-3} = a_{n-2} I_n \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ AB_1 - B_0 = a_1 I_n \\ AB_0 = a_0 I_n \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά τις παραπάνω εξισώσεις πινάκων με $-A^n, -A^{n-1}, \dots, -A, -I_n$, αντίστοιχα, και παίρνουμε ότι

$$A^n B_{n-1} = -(-1)^n A^n$$

$$-A^n B_{n-1} + A^{n-1} B_{n-2} = -a_{n-1} A^{n-1}$$

$$-A^{n-1} B_{n-2} + A^{n-2} B_{n-3} = -a_{n-2} A^{n-2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$-A^2 B_1 + AB_0 = -a_1 A$$

$$-AB_0 = -a_0 I_n$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες παίρνουμε ότι

$$\Theta_n = -\left[(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n\right]$$

$$\Rightarrow (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = O_n$$

$$\Rightarrow \chi_A(A) = O_n . \qquad \square$$

<u>Εφαρμογή του Θεωρήματος Cayley - Hamilton:</u>
<u>Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα</u>

Έστω $A \in M_n(K)$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Γνωρίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$ του A είναι της μορφής

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 .$$

Από το Θεώρημα Cayley - Hamilton έχουμε

$$\chi_A(A) = O_n$$

$$\Rightarrow (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = O_n$$

$$\Rightarrow (-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1 I_n + a_0 A^{-1} = O_n$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \left(-\frac{1}{a_0}\right)\left[(-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1 I_n\right]$$

Θυμηθείτε ότι $a_0 \neq 0$ διότι ο A είναι αντιστρέψιμος, βλ. Πόρισμα στη σελίδα 9.

ΑΣΚΗΣΗ Να εξετάσετε αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος, και αν είναι, βρείτε τον A^{-1} με χρήση του Θεωρήματος Cayley – Hamilton.

($\chi_A(x) = -x^3 + 7x^2 - 15x + 9$ (αποδείξτε το), οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος διότι ο σταθερός όρος του $\chi_A(x)$ είναι ίσος με 9 και άρα διάφορος του μηδενός. Στη συνέχεια, εργαστείτε όπως στην εφαρμογή για να βρείτε τον A^{-1}.)

ΑΣΚΗΣΗ Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -13 & -5 \end{pmatrix}$$

Να αποδείξετε ότι

$$A^{2008} + A^{2006} + A^{2004} = I_2$$

ΛΥΣΗ Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 5-x & 2 \\ -13 & -5-x \end{vmatrix} = x^2 + 1.$$

Από το Θεώρημα Cayley - Hamilton έχουμε ότι

$A^2 + I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 = -I_2.$

Άρα,

$$A^{2008}+A^{2006}+A^{2004} = (A^2)^{1004}+(A^2)^{1003}+(A^2)^{1002}$$
$$= (-I_2)^{1004}+(-I_2)^{1003}+(-I_2)^{1002}$$
$$= I_2 - I_2 + I_2$$
$$= I_2. \qquad \square$$

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $A \in M_n(K)$. Να εντοπίσετε το λάθος στην ακόλουθη "απόδειξη" του θεωρήματος των Cayley–Hamilton: Έστω $\chi_A(x)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Τότε $\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$. Επομένως,

$$\chi_A(A) = \det(A - A\cdot I_n) = \det(O_n) = 0.$$

ΛΥΣΗ Το $\chi_A(A)$ είναι $n\times n$ πίνακας ενώ η ορίζουσα ενός πίνακα είναι αριθμός! Επομένως, δεν μπορούμε να εξισώσουμε το $\chi_A(A)$ με το $\det(A - A\cdot I_n)$ (εκτός αν $n=1$).

[Παρατηρείστε επίσης ότι αν αντικαταστήσουμε το x στην έκφραση
$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$
της $\det(A - xI_n)$ με A τότε παίρνουμε την έκφραση

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-A & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-A & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-A \end{vmatrix}$$

μέσα στην οποία ο "πίνακας" που εμφανίζεται δεν έχει κανένα απολύτως νόημα, λόγω των "$\alpha_{11}-A$", "$\alpha_{22}-A$", ... "$\alpha_{nn}-A$" τα οποία δεν είναι έγκυρα.] $\square$