Ασκήσεις

1] Να επιλυθεί για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ το σύστημα:

$$\begin{aligned} x-y+z&=3\\ x+y+az&=1\\ x+ay+z&=a. \end{aligned}$$

Λύση

Με A_a συμβολίζουμε τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων x, y και z, του δοθέντος 3×3 συστήματος. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών έχουμε ότι:

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 \to c_3 - c_1]{c_2 \to c_2 + c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a-1 \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a-1 \\ a+1 & 0 \end{vmatrix} = -(a+1)(a-1).$$

Επίσης:

$$|(A_a)_x| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 \to c_2 + c_3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & a+1 & a \\ a & a+1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1-a & 0 & a-1 \\ a & a+1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(a+1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1-a & a-1 \end{vmatrix} = -(a+1)(a-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4(a-1)(a+1).$$

$$|(A_a)_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & a-1 \\ 0 & a-3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & a-1 \\ a-3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(a-3)(a-1).$$

$$|(A_a)_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & a+1 & a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ a+1 & a-3 \end{vmatrix} = 2(a-3)-(a+1)(-2) =$$

$$= 4(a-1).$$

(i) Αν $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, τότε $|A_a| \neq 0$, οπότε το σύστημα δέχεται μοναδική λύση, η οποία από τη μέθοδο Cramer είναι η διατεταγμένη τριάδα

$$\left(\frac{|(A_a)_x|}{|A_a|}, \frac{|(A_a)_y|}{|A_a|}, \frac{|(A_a)_z|}{|A_a|}\right) = \left(4, \frac{a-3}{a+1}, -\frac{4}{a+1}\right).$$

(ii) Αν $a=-1$, τότε $|A_a|=0$ και $|(A_a)_y| = |(A_a)_z| = -8 \neq 0$. Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

(iii) Αν $a=1$, τότε $|A_a| = |(A_a)_x| = |(A_a)_y| = |(A_a)_z| = 0$, οπότε το σύστημα είναι είτε αδύνατο είτε έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Για $a=1$, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα του επαυξημένου πίνακα του συστήματος:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - 2r_2]{r_1 \to r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\ell \mid S).$$

Οπότε έχουμε άπειρο πλήθος λύσεων και η γενική μορφή των λύσεων είναι:

$$(2-z, -1, z), \ z \in \mathbb{R}.$$

2] Να αποδείξετε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $adj(A)$ είναι αντιστρέψιμος και $(adj(A))^{-1} = adj(A^{-1})$.

Λύση

Στην άσκηση 3, σελίδα 12, μάθημα 13ο (1/12/2020) έχει βρεθεί ότι $det(adj(A)) = (det(A))^{n-1}$.

Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος, έχουμε ότι $det(A) \neq 0$ και συνεπώς, από την παραπάνω σχέση, $det(adj(A)) \neq 0$. Άρα ο $adj(A)$ είναι αντιστρέψιμος. Για να αποδείξουμε ότι $(adj(A))^{-1} = adj(A^{-1})$, αρκεί να αποδείξουμε ότι: $adj(A) \cdot adj(A^{-1}) = I_n$.

Από τη θεωρία έχουμε ότι $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A) \overset{\text{πολ/ζουμε από δεξιά επί } A}{\Leftrightarrow} adj(A) \cdot A = det(A) \cdot I_n$.

Βάζουμε όπου A τον A^{-1} και θα πάρουμε: $\underbrace{adj(A^{-1}) \cdot A^{-1} = det(A^{-1}) \cdot I_n}_{\text{πολλαπλασιάζουμε από δεξιά επί } A} \Rightarrow$

$\Rightarrow adj(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} \cdot A$.

Επίσης ισχύει: $A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow$
$\Rightarrow det(AA^{-1}) = det(I_n) \Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Τώρα,

$$adj(A) \cdot adj(A^{-1}) = adj(A) \cdot \left[\frac{1}{det(A)} \cdot A\right] = \frac{1}{det(A)} \cdot \left[adj(A) \cdot A\right] =$$

$$= \frac{1}{det(A)} \cdot \left[det(A) \cdot I_n\right] = I_n$$

3) Σωστό ή Λάθος;

(α) Το γινόμενο ενός πίνακα επί τον adjoint του είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Λάθος: Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = det(A) \cdot I_n$$

(β) Ο ανάστροφος του $adj(A)$, όπου $A \in M_n(\mathbb{R})$, είναι ο πίνακας των συμπαραγόντων του A.

Σωστό: Ο $adj(A)$ είναι ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα των συμπαραγόντων στοιχείων του A, δηλαδή είναι $adj(A) = (c_{ij})^t$, όπου c_{ij} ο συμπαράγοντας του (i,j) στοιχείου του A.

Άρα, $[adj(A)]^t = [(c_{ij})^t]^t = (c_{ij})$.

(γ) Αν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ και $det(A) = det(B)$, τότε $det(A+B) = 2\, det(A)$

Λάθος: Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ και $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.

Τότε $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ και $det(A) = 1 = det(B)$.

$A + B = 0_{2\times 2} \Rightarrow det(A+B) = 0$ και $2 \cdot det(A) = 2\, det(I_2) = 2 \neq 0 =$
$= det(A+B)$.

(δ) Αν ο A έχει μια γραμμή από μηδενικά, τότε και ο $adj(A)$ έχει μια γραμμή από μηδενικά.

Λάθος: Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det(A_{11}) = 0$, $c_{12} = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = 0$,

$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det(A_{21}) = -1$, $c_{22} = (-1)^{2+2} \det(A_{22}) = 1$.

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ και ο $\operatorname{adj}(A)$

δεν έχει μηδενική γραμμή (αναγκαστικά όμως έχει μηδενική στήλη).

4] Να λυθεί η εξίσωση $D(x) = 0$, όπου

$$D(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x - 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2\cos x - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\cos x - 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2\cos x - 1 \end{vmatrix}$$

<u>Λύση</u>. Προσθέτουμε όλες τις στήλες στην πρώτη, οπότε:

$$D(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x + 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2\cos x + 2 & 2\cos x - 1 & 1 & 1 \\ 2\cos x + 2 & 1 & 2\cos x - 1 & 1 \\ 2\cos x + 2 & 1 & 1 & 2\cos x - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2\cos x + 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2\cos x - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\cos x - 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2\cos x - 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 \to c_3 - c_1 \\ c_4 \to c_4 - c_1}]{c_2 \to c_2 - c_1}$$

$$(2\cos x+2)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2\cos x-2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\cos x-2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\cos x-2\end{vmatrix}=(2\cos x+2)\cdot(2\cos x-2)^3=$$

$$=2(\cos x+1)\cdot 2^3(\cos x-1)^3=16(\cos x+1)\cdot(\cos x-1)^3.$$

$D(x)=0 \Leftrightarrow \cos x=-1$ şi $\cos x=1$

$\Leftrightarrow \cos x=2k\pi+\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ şi $x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.