ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 14

7/12/2020

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ – ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

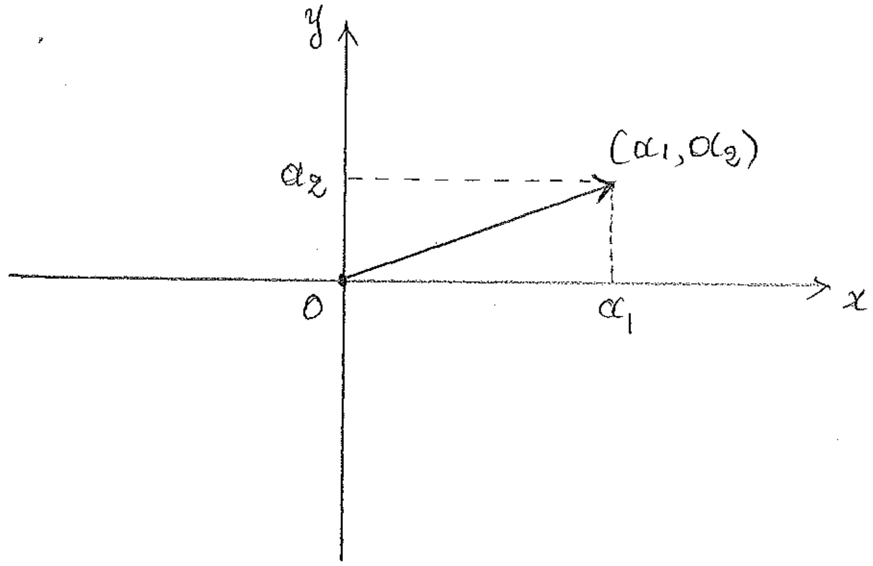
Για $n \in \mathbb{N}$ και $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, συμβολίζουμε με K^n το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων στοιχείων του K.

Δηλαδή,

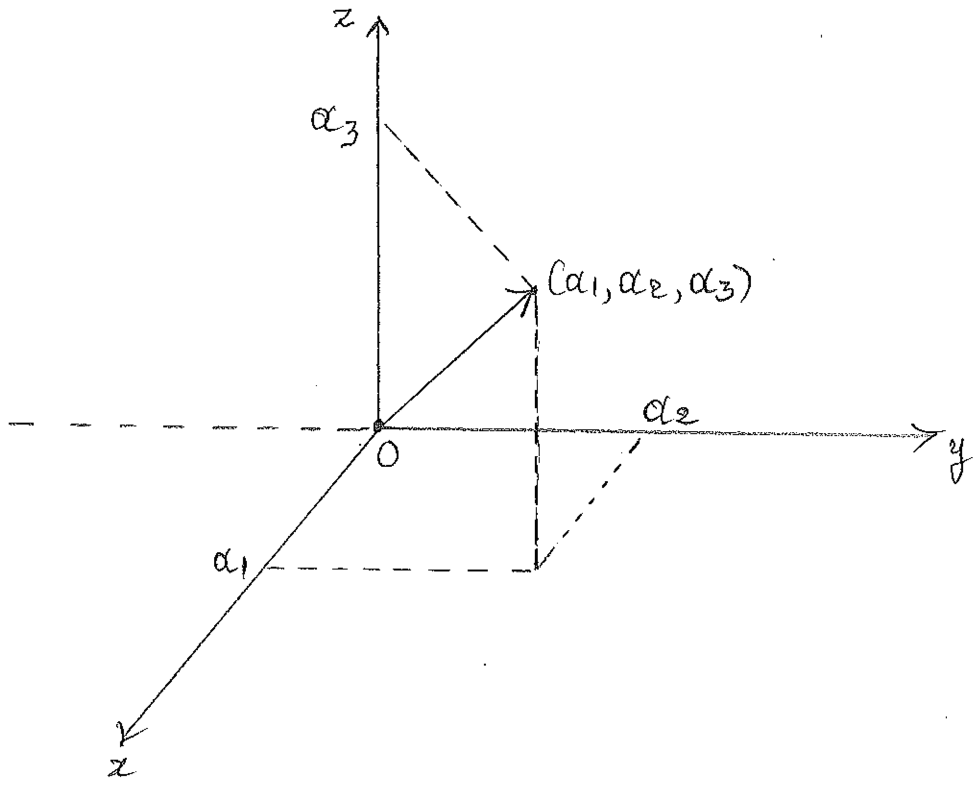
$$K^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in K \text{ για όλα τα } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Τα στοιχεία του K^n ονομάζονται <u>διανύσματα</u>.

<u>π.χ.</u> $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Θεωρώντας το ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy στο επίπεδο, τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ αναπαρίστανται από βέλη με αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων $(0,0)$ και τελικό σημείο κάποιο ζεύγος (a_1, a_2) πραγματικών αριθμών.



$\mathbb{R}^3 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$. Θεωρώντας το τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων $xOyz$ στο χώρο, τα στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ αναπαρίστανται από βέλη με αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων $(0,0,0)$ και τελικό σημείο κάποια τριάδα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ πραγματικών αριθμών.



<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $A \in M_n(K)$. Ένας αριθμός $\lambda \in K$ λέγεται <u>ιδιοτιμή</u> (ή <u>χαρακτηριστική τιμή</u>) του πίνακα A αν υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $u \in K^n$ (σε μορφή πίνακα στήλη) τέτοιο ώστε

$$Au = \lambda u$$

Στη περίπτωση αυτή το διάνυσμα u λέγεται <u>ιδιοδιάνυσμα</u> (ή <u>χαρακτηριστικό διάνυσμα</u>) του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Το σύνολο

$$V(\lambda) = \{u \in K^n : Au = \lambda u\}$$

$$= \{0\} \cup \{u \in K^n : u \text{ είναι ιδιοδιάνυσμα του } A \text{ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή } \lambda\}$$

(όπου 0 το μηδενικό διάνυσμα $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ του K^n) λέγεται

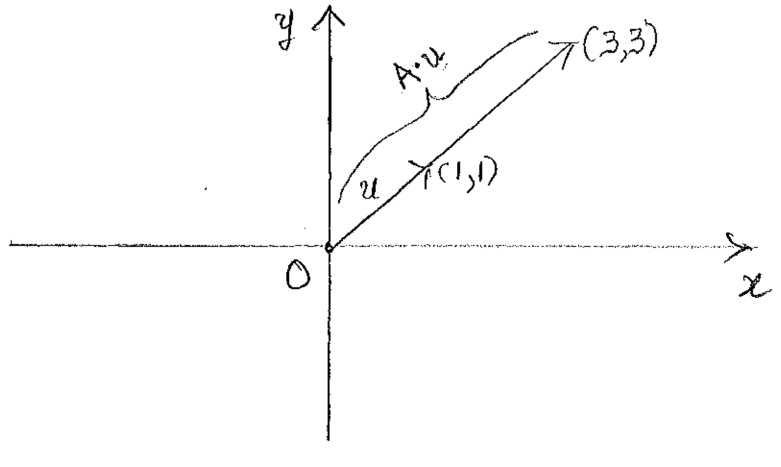
<u>ιδιοχώρος</u> του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο αριθμός 3 είναι μια ιδιοτιμή του A και το διάνυσμα $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3, αφού

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3u.$$



□

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $A \in M_n(K)$ και $\lambda \in K$. Τότε το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\det(A-\lambda I_n)=0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έχουμε:

λ είναι ιδιοτιμή του A $\Leftrightarrow$ $Au=\lambda u$ για κάποιο μη-μηδενικό διάνυσμα $u \in K^n$

$\Leftrightarrow$ $Au-\lambda u=0$ για κάποιο μη-μηδενικό διάνυσμα $u \in K^n$.

$\Leftrightarrow$ $(A-\lambda I_n)u=0$ για κάποιο μη-μηδενικό διάνυσμα $u \in K^n$

$\Leftrightarrow$ το ομογενές σύστημα $(A-\lambda I_n)X=0$ έχει τουλάχιστον μια μη-μηδενική λύση

$\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda I_n)=0$. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in M_n(K)$.

1) Από το θεώρημα βλέπουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι ακριβώς οι λύσεις της εξίσωσης $\det(A-xI_n)=0$, η οποία λέγεται <u>χαρακτηριστική εξίσωση</u>, ή ισοδύναμα της εξίσωσης

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-x & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-x \end{vmatrix} = 0 .$$

2) Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A, τότε από την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βλέπουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ είναι ακριβώς οι μη-μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος $(A-\lambda I_n)X=0$, δηλαδή του συστήματος

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(το σύστημα αυτό έχει μη μηδενικές λύσεις διότι $\det(A-\lambda I_n)=0$, αφού το λ είναι ιδιοτιμή του A).

3) Η ορίζουσα $\det(A-x I_n)$ είναι ένα πολυώνυμο μιας μεταβλητής, της x, βαθμού n (με συντελεστές από το K). Το πολυώνυμο αυτό λέγεται <u>χαρακτηριστικό πολυώνυμο</u> του πίνακα A και συμβολίζεται με $\chi_A(x)$. (Επομένως $\chi_A(x)=\det(A-xI_n)$.)

Η μορφή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ είναι η εξής:

$$\chi_A(x)=(-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0 .$$

(Παρατηρείστε ότι ο συντελεστής του x^n στην έκφραση του $\chi_A(x)$ είναι 1 ή -1.)

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι ακριβώς οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ του A.

4) Είναι δυνατόν ένας πίνακας στο $M_n(\mathbb{R})$ να μην έχει ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον 2×2 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1.$$

Η εξίσωση $x^2+1=0$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Ωστόσο, η εξίσωση $x^2+1=0$ έχει (ακριβώς) δύο λύσεις στο $\mathbb{C}$, τους φανταστικούς αριθμούς i και $-i$.

Επομένως, ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Ωστόσο, θεωρώντας τον A ως στοιχείο του $M_n(\mathbb{C})$ (θυμηθείτε ότι $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$), από τα παραπάνω βλέπουμε ότι, ο A έχει δύο μιγαδικές ιδιοτιμές. Επιπλέον, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$ του A παραγοντοποιείται στο $\mathbb{C}$ ως $\chi_A(x) = (x+i)(x-i)$ (αλλά δεν παραγοντοποιείται στο $\mathbb{R}$).

5) Ένας πίνακας $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) έχει πάντοτε ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}$. Αυτό προκύπτει από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας που λέει ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n με συντελεστές μιγαδικούς αριθμούς έχει ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$ (όχι απαραίτητα όλες διάφορες ανά δύο). Έτσι, ένας πίνακας $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) έχει ακριβώς n ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}$ (και συνεπώς το πολύ n διακεκριμένες (δηλαδή, διάφορες ανά δύο) ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}$). Επιπλέον, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$ του A παραγοντοποιείται στο $\mathbb{C}$ ως

$$(*) \qquad \chi_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ οι ρίζες του $\chi_A(x)$ (δηλαδή, οι ιδιοτιμές του A) — όχι απαραίτητα όλες διάφορες ανά δύο.

Αν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A, δηλαδή $\mu_i \neq \mu_j$ για $i \neq j$ (οπότε $k \leq n$), τότε

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x-\mu_1)^{n_1} (x-\mu_2)^{n_2} \cdots (x-\mu_k)^{n_k}$$

όπου για $i=1,\ldots,k$, ο αριθμός n_i είναι το πλήθος των φορών που εμφανίζεται ο παράγοντας $(x-\mu_i)$ στην έκφραση $(*)$ του $\chi_A(x)$. (Προφανώς, $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$.)

Για $i=1,2,\ldots,k$, ο αριθμός n_i λέγεται <u>αλγεβρική πολλαπλότητα</u> (ή <u>πολλαπλότητα</u>) της ιδιοτιμής μ_i.

Αν $n_i = 1$, τότε η ιδιοτιμή μ_i λέγεται <u>απλή ιδιοτιμή</u>.

Αν $n_i > 1$, τότε η ιδιοτιμή μ_i λέγεται <u>πολλαπλή ιδιοτιμή</u>.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u> 1) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A. Πρώτα, θα βρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 3 & -5-x & 3 \\ 6 & -6 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1 \to c_1 + c_2}{=} \begin{vmatrix} -2-x & -3 & 3 \\ -2-x & -5-x & 3 \\ 0 & -6 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= -(2+x) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & -5-x & 3 \\ 0 & -6 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \to r_2 - r_1}{=} -(2+x) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2-x & 0 \\ 0 & -6 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= -(2+x) \begin{vmatrix} -2-x & 0 \\ -6 & 4-x \end{vmatrix} = -(x+2)^2(x-4).$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda = -2$ με πολλαπλότητα 2, και $\lambda = 4$ με πολλαπλότητα 1.

Βρίσκουμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -2. Αυτά είναι οι μη-μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος $(A-(-2)I_3)X=0$

ή
$$\begin{pmatrix} 1-(-2) & -3 & 3 \\ 3 & -5-(-2) & 3 \\ 6 & -6 & 4-(-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ή
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Η γενική μορφή των λύσεων του τελευταίου συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -2 είναι όλα τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

με $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένα από τα x_2, x_3 διάφορο του μηδενός.

Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 4. Αυτά είναι οι μη-μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος $(A-4I_3)X=0$

ή $$\begin{pmatrix} 1-4 & -3 & 3 \\ 3 & -5-4 & 3 \\ 6 & -6 & 4-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ή $$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \end{cases}$$ ή $$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 2x_1 \end{cases}$$

Η γενική μορφή των λύσεων του συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Άρα, τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 4 είναι όλα τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \text{ με } \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}.$$ □

2) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & b \\ 1 & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $\alpha, b, c, d \in \mathbb{R}$. Αν τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιανύσματα του A, τότε να βρείτε τις τιμές των α, b, c, d.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έστω λ και μ ιδιοτιμές του A που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, αντίστοιχα.

Τότε

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

και

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ -\mu \end{pmatrix}$$

Η πρώτη σχέση μας δίνει

$$\begin{cases} 1+\alpha+b = \lambda \\ 1+c+d = \lambda \\ \lambda = 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \alpha+b = 2 \\ c+d = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases},$$

και η δεύτερη σχέση μας δίνει

$$\begin{cases} 1 - b = \mu \\ 1 - d = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} b = 1 \\ d = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Από όλα τα παραπάνω έχουμε $a = b = c = d = 1$. □

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $A, B \in M_n(K)$. Αν οι A και B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τότε οι A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Έπεται άμεσα από το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. □

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1) Έστω $A \in M_n(K)$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Τότε οι ιδιοτιμές του A είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ & \bigcirc & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του A (δηλαδή οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\det(A-xI_3)$) είναι οι a_{ii}, $i=1,2,\ldots,n$. □

2) Έστω $A \in M_n(K)$. Τότε οι πίνακες A και A^t έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

$$\begin{aligned} \det(A - xI_n) &= \det(A - xI_n)^t \\ &= \det(A^t - (xI_n)^t) \\ &= \det(A^t - xI_n^t) \\ &= \det(A^t - xI_n). \end{aligned}$$ □

3) Έστω $A, B \in M_n(K)$. Λέμε ότι ο πίνακας B είναι <u>όμοιος προς τον A</u> αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(K)$ τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$.

Να αποδείξετε ότι αν $A, B \in M_n(K)$ και ο B είναι όμοιος προς τον A, τότε οι πίνακες A και B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές.

<u>ΛΥΣΗ</u> Υποθέτοντας ότι ο B είναι όμοιος προς τον A, έχουμε ότι $B = P^{-1}AP$ για κάποιο αντιστρέψιμο πίνακα $P \in M_n(K)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\det(B - xI_n) &= \det(P^{-1}AP - xI_n) \\
&= \det(P^{-1}AP - x(P^{-1}P)) \\
&= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(xP)) \\
&= \det(P^{-1}(AP - xP)) \\
&= \det(P^{-1}(A - xI_n)P) \\
&= \det(P^{-1})\det(A - xI_n)\det(P) \\
&= \det(P^{-1})\det(P)\det(A - xI_n) \\
&= \det(P^{-1}P)\det(A - xI_n) \\
&= \det(I_n)\det(A - xI_n) = \det(A - xI_n). \quad \square
\end{aligned}$$

4) Έστω $A \in M_n(K)$. Να αποδείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

ο A είναι αντιστρέψιμος ανν $\det(A) \neq 0$

ανν $\det(A - 0 \cdot I_n) \neq 0$

ανν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A. □

5) Έστω $A \in M_n(K)$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A τότε να αποδείξετε ότι ο λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}. (Παρατηρείστε ότι από την άσκηση 4 έχουμε ότι $\lambda \neq 0$.)

<u>ΛΥΣΗ</u> Έστω u ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Τότε $Au = \lambda u$. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
Au = \lambda u &\Rightarrow A^{-1}(Au) = A^{-1}(\lambda u) \\
&\Rightarrow (A^{-1}A)u = \lambda(A^{-1}u) \\
&\Rightarrow u = \lambda(A^{-1}u) \\
&\overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} A^{-1}u = \lambda^{-1}u \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Από την $(*)$ και το γεγονός ότι $u \neq 0$ (αφού το u είναι ιδιοδιάνυσμα του A) παίρνουμε ότι ο λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A. □

Από την άσκηση 5 βλέπουμε ότι αν $A \in M_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος και αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του A, τότε $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του A^{-1}.

Επίσης, από τη λύση της άσκησης 5 έχουμε ότι αν $A \in M_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος και $\lambda \in K$ είναι ιδιοτιμή του A, τότε

$$V_A(\lambda) = V_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$$

όπου $V_A(\lambda)$ και $V_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$ είναι αντίστοιχα οι ιδιοχώροι των A και A^{-1} που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ και λ^{-1}.

6) Να αποδείξετε ότι κάθε πίνακας στο $M_n(K)$ γράφεται ως άθροισμα δύο αντιστρέψιμων πινάκων.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έστω $A \in M_n(K)$. Αφού ο A έχει το πολύ n διακεκριμένες ιδιοτιμές και $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, υπάρχει $\lambda \in K$ με $\lambda \neq 0$ το οποίο δεν είναι ιδιοτιμή του A. Οπότε, $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ και άρα ο $A - \lambda I_n$ είναι αντιστρέψιμος.

Τώρα,

$$A = (A - \lambda I_n) + \lambda I_n.$$

$\det(\lambda I_n) = \lambda^n \neq 0$, διότι $\lambda \neq 0$. Άρα, ο λI_n είναι αντιστρέψιμος. Από τα παραπάνω έχουμε ότι ο A γράφεται ως άθροισμα δύο αντιστρέψιμων πινάκων. $\square$

7) Έστω $A \in M_n(K)$. Να αποδείξετε ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A και αν u είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στη λ, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το λ^k είναι μια ιδιοτιμή του A^k και το u είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A^k που αντιστοιχεί στη λ^k.

<u>ΛΥΣΗ</u> Αποδεικνύουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο k.

Για $k=1$, το συμπέρασμα έπεται αμέσως από την υπόθεση της άσκησης.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ το λ^k είναι μια ιδιοτιμή του A^k και το u είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A^k που αντιστοιχεί στη λ^k (συνεπώς $A^k u = \lambda^k u$).

Θα αποδείξουμε ότι το λ^{k+1} είναι μια ιδιοτιμή του A^{k+1} και ότι το u είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A^{k+1} που αντιστοιχεί στη λ^{k+1}, δηλ. θα αποδείξουμε ότι $A^{k+1}u = \lambda^{k+1}u$.

$$A^{k+1}u = (A^k A)u = A^k(Au) \overset{\text{Υπόθεση άσκησης}}{=} A^k(\lambda u) = \lambda(A^k u)$$

$$\underset{\substack{\text{Υπόθεση}\\ \text{επαγωγής}}}{=} \lambda(\lambda^k u) = \lambda^{k+1}u.$$

Άρα, $A^{k+1}u = \lambda^{k+1}u$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και τη λύση της άσκησης. $\square$

Από την άσκηση 7 συμπεραίνουμε ότι αν $A \in M_n(K)$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του A, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οι $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του A^k.