# * Ασκήσεις *

**1] Σωστό ή λάθος;**

α) $\det(kA) = k\cdot\det(A)$, $k\in\mathbb{R}$, $A\in M_n(\mathbb{R})$.

Λάθος: Έστω $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $k=-1$

$$(-1)\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \det[(-1)\cdot A] = (-1)(-2)-(-1)(-1) = 2-1 = 1$$

$$(-1)\det(A) = (-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = (-1)\cdot(1\cdot 2 - 1\cdot 1) = -1 \neq 1 = \det[(-1)\cdot A]$$

β) $\det(k\cdot A) = k^n\cdot\det(A)$, $k\in\mathbb{R}$, $A\in M_n(\mathbb{R})$

Σωστό: Ο $k\cdot A$ προκύπτει από τον $A$ πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο του $A$ επί $k$. Άρα, $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$, ($i$-γραμμή του $kA$) $=$ $k\cdot$ ($i$-γραμμή του $A$). Το αποτέλεσμα προκύπτει εφαρμόζοντας $n$-φορές την ιδιότητα: "Αν πολλαπλασιάσουμε κάποια γραμμή (ή στήλη) του $n\times n$ πίνακα $A$ επί $k\in\mathbb{R}$, τότε η ορίζουσα του προκύπτοντος πίνακα ισούται με $k\cdot\det(A)$".

$$\det(k\cdot A) = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & k\cdot a_{nn}\end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ ka_{n1} & ka_{n2} & & k\cdot a_{nn}\end{vmatrix} =$$

$$= k^2\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn}\end{vmatrix} = \cdots = k^n\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\end{vmatrix} = k^n\cdot\det(A)$$

γ) $\det(AB) = \det(BA)$ (Θυμηθείτε ότι εν γένει $AB \neq BA$)

Σωστό: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(BA)$

δ) $\det(AA^t) = [\det(A)]^2$

Σωστό: $\det(A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A^t) = \det(A) \cdot \det(A) =$
$= [\det(A)]^2$.

(ε) Αν $\det(A) = 2$, $\det(B) = 3$, τότε $\det(A+B) = 5$.

Λάθος: Εν γένει δεν ισχύει ότι $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

Ένα αντιπαράδειγμα για το (ε):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε $\det(A) = 2$, $\det(B) = 3$.

Επίσης, $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, οπότε $\det(A+B) = 10 \neq 5 = \det(A) + \det(B)$

(ζ) Αν $\det(A) = 2$, $\det(B) = 3$, τότε $\det(AB) = 6$

Σωστό: Στη θεωρία αποδείχθηκε ότι
$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(η) Αν σε ένα $A \in M_n(\mathbb{R})$ εναλλαχθούν δύο γραμμές και δύο στήλες, τότε η ορίζουσα του $A$ αλλάζει πρόσημο (δηλ., η ορίζουσα του προκύπτοντος πίνακα ισούται με $-\det(A)$).

Λάθος: Έχουν γίνει δύο ενέργειες εναλλαγής θέσεων. Σε κάθε μια από τις ενέργειες, το πρόσημο άλλαξε, οπότε στο τέλος πήραμε $-(-\det(A)) = \det(A)$.

9] Έστω $A = \begin{pmatrix} a+bx+cx^2 & a+by+cy^2 & a+bz+cz^2 \\ c+ax+bx^2 & c+ay+by^2 & c+az+bz^2 \\ b+cx+ax^2 & b+cy+ay^2 & b+cz+az^2 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$$

(a) Να βρεθεί πίνακας $C$ έτσι ώστε $A = C \cdot B$

(β) Ν.Δ.Ο. $\det(A) = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ ax+cy+bz & bx+ay+cz & cx+by+az \\ ax^2+cy^2+bz^2 & bx^2+ay^2+cz^2 & cx^2+by^2+az^2 \end{vmatrix}$

Λύση (a)

$$A = \begin{pmatrix} a\cdot 1+b\cdot x+c\cdot x^2 & a\cdot 1+by+cy^2 & a\cdot 1+b\cdot z+c\cdot z^2 \\ c\cdot 1+a\cdot x+b\cdot x^2 & c\cdot 1+a\cdot y+b\cdot y^2 & c\cdot 1+a\cdot z+b\cdot z^2 \\ b\cdot 1+c\cdot x+a\cdot x^2 & b\cdot 1+c\cdot y+a\cdot y^2 & b\cdot 1+c\cdot z+a\cdot z^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}}_{B} = C \cdot B$$

(β) $\det(A) = \det(C\cdot B) = \det(C)\cdot\det(B) = \det(B)\cdot\det(C) =$
$= \det(BC)$

$$B\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ ax+cy+bz & bx+ay+cz & cx+by+az \\ ax^2+cy^2+bz^2 & bx^2+ay^2+cz^2 & cx^2+by^2+az^2 \end{pmatrix}$$

---

3] Ν.δ.ο. η παρακάτω ορίζουσα:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2+1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a^{n-2}+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a^{n-1}+1 \end{vmatrix} = \sqrt{a^{(n-1)n}}$$

, όπου $a>0$.

<u>Λύση</u>

$$D \underset{\substack{C_3\to C_3-C_1 \\ \vdots \\ C_n\to C_n-C_1}}{\overset{C_2\to C_2-C_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a^{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{n-1} \end{vmatrix} = 1\cdot a\cdot a^2\cdots a^{n-2}\cdot a^{n-1} =$$

$$= a^{1+2+\cdots(n-2)+(n-1)} =$$

$$= a^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}} = \sqrt{a^{(n-1)\cdot n}}$$

---

4] Χωρίς να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες να αποδειχθεί ότι:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1+ta_1 & c_1+rb_1+sa_1 \\ a_2 & b_2+ta_2 & c_2+rb_2+sa_2 \\ a_3 & b_3+ta_3 & c_3+rb_3+sa_3 \end{vmatrix}}_{D} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Λύση

$$D \xrightarrow{C_2 \to C_2 - tC_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+rb_1+sa_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+rb_2+sa_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+rb_3+sa_3 \end{vmatrix} \overset{(*)}{\underset{\text{ως προς στήλες}}{\overline{\overline{\text{γραμμικότητα της det}}}}}$$

$$\cancel{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & rb_1 \\ a_2 & b_2 & rb_2 \\ a_3 & b_3 & rb_3 \end{vmatrix}}^{\,0} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+sa_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+sa_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+sa_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - sC_1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^t \right| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(*) Εναλλακτικά, από το σημείο αυτό (δεύτερη λύση):

$$\xrightarrow{C_3 \to C_3 - sC_1 - rC_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^t \right| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

5] Αν το άθροισμα της δεύτερης και τέταρτης γραμμής ενός $6\times 6$ πίνακα $A$ ισούται με την τελευταία γραμμή, τότε $\det(A)=0$.

Λύση Έστω $r_1, r_2, \dots, r_6$ οι γραμμές του $6\times 6$ πίνακα $A$.
Από την υπόθεσή μας, την γραμμικότητα της ορίζουσας ως προς τις γραμμές και την ιδιότητα ότι η ορίζουσα ενός πίνακα ισούται με μηδέν αν ο πίνακας έχει δύο ίσες γραμμές, έχουμε:

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4\\ r_5\\ r_6\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4\\ r_5\\ r_2+r_4\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} r_1\\ \mathbf{r_2}\\ r_3\\ r_4\\ r_5\\ \mathbf{r_2}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ \mathbf{r_4}\\ r_5\\ \mathbf{r_4}\end{pmatrix}=0+0=0$$

6] Να αποδειχθεί ότι η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2\\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2\\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2\end{vmatrix}$$

είναι ανεξάρτητη της τιμής του $x$.

Λύση Συμβολίζουμε τη δοθείσα ορίζουσα με $D(x)$. Τότε

$$D(x)=\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2\\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2\\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2\end{vmatrix}\xrightarrow{C_3\to C_3-C_2}\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & \overset{*}{2x+3}\\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & 2x+5\\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & 2x+7\end{vmatrix}=$$

$*$ $(x+2)^2-(x+1)^2=(x+2+x+1)(\cancel{x}+2-\cancel{x}-1)=2x+3$. Βασίζομαι στην

$$\xrightarrow{c_2\to c_2-c_1}\begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3\to c_3-c_2} \begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\to r_2-r_1]{r_3\to r_3-r_1}\begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 \\ 2x+1 & 2 & 0 \\ 4x+4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2x+1 & 2 \\ 4x+4 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\left(\cancel{8x}+4-\cancel{8x}-8\right) = -8$$

Άρα, $D(x) = -8$ για όλα τα $x\in\mathbb{R}$, ανεξάρτητη της τιμής του $x$.