Ασκήσεις

1] Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Να εξεταστεί αν ο A είναι αντιστρέψιμος. Στην περίπτωση που ο A είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο A^{-1} και να γραφεί ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Λύση

$$\left(A \mid I_3\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to \left(-\frac{1}{3}\right) r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 + 2r_2]{r_1 \to r_1 + 2r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to 3r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \to r_2 + \frac{4}{3} r_3]{r_1 \to r_1 + \frac{2}{3} r_3}$$

$$\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{R_A = I_3} \;\middle|\; \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{array}}_{A^{-1}}\right)$$

Εφόσον $R_A = I_3$, ο A είναι αντιστρέψιμος και από τη θεωρία

έχουμε ότι

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι ο A^{-1} προκύπτει από τον I_n εφαρμόζοντας τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών που χρησιμοποιήθηκαν για να πάρουμε τον $I_n = R_A$ από τον A).

Έστω

$$E_1 = e_1(I_3) = [v_2 \to (-\tfrac{1}{3})v_2](I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = e_2(I_3) = [v_1 \to v_1 + 2v_2](I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = e_3(I_3) = [v_3 \to v_3 + 2v_2](I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = e_4(I_3) = [v_3 \to 3v_3](I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_5 = e_5(I_3) = [v_1 \to v_1 + \tfrac{2}{3}v_3](I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_6 = e_6(I_3) = [v_2 \to v_2 + \tfrac{4}{3}v_3](I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

οι στοιχειώδεις πίνακες που αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς γραμμών $r_2 \to \left(-\frac{1}{3}\right) r_2, \dots, r_2 \to r_2 + \frac{4}{3} r_3$.

Τότε $A^{-1} = E_6 \cdot E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I_3$

$$I_3 = E_6 \cdot E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$$

και $A = (E_6 \cdot E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1)^{-1} I_3 = (E_1)^{-1} \cdot (E_2)^{-1} (E_3)^{-1} (E_4)^{-1} (E_5)^{-1} (E_6)^{-1} \cdot I_3$,

όπου $(E_1)^{-1} = e_1^{-1}(I_3) = [r_2 \to (-3) r_2](I_3)$

$$(E_2)^{-1} = e_2^{-1}(I_3) = [r_1 \to r_1 - 2r_2](I_3)$$

$$(E_3)^{-1} = e_3^{-1}(I_3) = [r_3 \to r_3 - 2r_2](I_3)$$

$$(E_4)^{-1} = e_4^{-1}(I_3) = [r_3 \to \tfrac{1}{3} r_3](I_3)$$

$$(E_5)^{-1} = e_5^{-1}(I_3) = [r_1 \to r_1 - \tfrac{2}{3} r_3](I_3)$$

$$(E_6)^{-1} = e_6^{-1}(I_3) = [r_2 \to r_2 - \tfrac{4}{3} r_3](I_3).$$

2] Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω ότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι $AB^{-1} = B^{-1}A$ αν και μόνο αν $AB = BA$.

Απόδειξη. $(\Longrightarrow)$ Υποθέτουμε ότι $AB^{-1} = B^{-1}A$.

Τότε $(AB^{-1})B = (B^{-1}A) \cdot B$

$\Rightarrow A(B^{-1}B) = B^{-1}(AB)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

$\Rightarrow A = B^{-1}(AB)$

Επομένως, $BA = B\cdot\left[B^{-1}\cdot(AB)\right] \overset{\text{προσεταιριστική}}{=} (BB^{-1})\,(AB) = AB.$

$(\Leftarrow)$ Υποθέτουμε ότι $AB = BA$. Τότε

$$(AB)\,B^{-1} = (BA)\,B^{-1}$$

$$\Rightarrow A(BB^{-1}) = (BA)\,B^{-1}$$

$$\Rightarrow A = (BA)\cdot B^{-1}.$$

Άρα, $B^{-1}A = B^{-1}\left[(BA)\cdot B^{-1}\right] = B^{-1}\left[B\,(AB^{-1})\right] = (B^{-1}B)\,(AB^{-1}) =$
$= AB^{-1}$

3] Να βρεθούν όλα τα $w\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & w & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ να είναι αντιστρέψιμος.

Λύση

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & w & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{2} r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & w & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & w-2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

Από τον U βλέπουμε ότι $\nexists\, w\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε ο δοθέντος πίνακας να είναι αντιστρέψιμος (αφού ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του δοθέντος πίνακα δεν μπορεί να ισούται με τον I_3).

4] Σωστό ή λάθος; Αν $A \cdot B = \Gamma$ και δύο από τους πίνακες δεν είναι αντιστρέψιμοι, τότε και ο τρίτος είναι μη αντιστρέψιμος.

Λύση λάθος. Έστω $A = \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε $A \cdot B = \Gamma$, οι A και Γ είναι μη αντιστρέψιμοι, αλλά ο B είναι αντιστρέψιμος.

(Αν αλλάξουμε την πρόταση σε "Αν $A \cdot B = \Gamma$ και δύο από τους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, τότε και ο τρίτος είναι αντιστρέψιμος", τότε η πρόταση αυτή είναι σωστή.

- Έστω A και B αντιστρέψιμοι, τότε και ο Γ είναι αντιστρέψιμος πίνακας σα γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων.
- Έστω A και Γ αντιστρέψιμοι, τότε $B = A^{-1} \cdot \Gamma$, οπότε και ο B είναι αντιστρέψιμος σα γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων.
- Έστω B και Γ αντιστρέψιμοι, τότε $A = \Gamma \cdot B^{-1}$, οπότε ομοίως με πριν ο A είναι αντιστρέψιμος).

5] Να βρεθεί ο αντίστροφος (αν υπάρχει) του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πίνακες.

Λύση

Ο πίνακας A είναι στοιχειώδης διότι προκύπτει από τον I_3 εφαρμόζοντας έναν στοιχειώδη γραμμικό μετασχηματισμό.

Συγκεκριμένα, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος, άρα ο A είναι αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφός του A^{-1} είναι ο στοιχειώδης πίνακας που προκύπτει από τον I_3 εφαρμόζοντας τον αντίστροφο στοιχειώδη μετασχηματισμό του $r_2 \to r_2 - 3r_3$, δηλαδή εφαρμόζοντας τον $r_2 \to r_2 + 3r_3$.

Άρα,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

6] • Δείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος και αν $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, τότε $(k \cdot A)^n = k^n \cdot A^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

<u>Λύση</u> Καταρχήν, με επαγωγή αποδεικνύουμε ότι $(kA)^n = k^n A^n \ \forall n \in \mathbb{N}$. (αυτό ισχύει για κάθε τετραγωνικό πίνακα A, όχι απαραίτητα αντιστρέψιμο)

Για $n = 1$, το συμπέρασμα είναι προφανές (αφού $k^1 \cdot A^1 = kA = (kA)^1$).

Υποθέτουμε ότι $(kA)^n = k^n \cdot A^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και θα δείξουμε ότι $(kA)^{n+1} = k^{n+1} \cdot A^{n+1}$.

$$\begin{aligned} (kA)^{n+1} &= (kA)^n \cdot (kA) \\ &= (k^n \cdot A^n)(kA) \quad (\text{Υπόθεση Επαγωγής}) \end{aligned}$$

$= k^n [A^n (kA)]$ (Χρήση της ιδιότητας $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, όπου $k \in \mathbb{R}$)

$= k^n \cdot [k(A^n A)]$

$= k^n (k \cdot A^{n+1})$

$= k^{n+1} \cdot A^{n+1}$ (Χρήση της ιδιότητας $k(\lambda A) = (k\lambda) \cdot A$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{R}$ και A πίνακας)

Άρα, $(kA)^{n+1} = k^{n+1} \cdot A^{n+1}$

Τώρα, για οποιαδήποτε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$(kA)^{-n} \underset{\substack{\text{βλ. 27/10/2020} \\ \text{σελ. 26}}}{=} ((kA)^{-1})^n \underset{\substack{\text{βλ. 27/10/2020} \\ \text{σελ. 30}}}{=} (k^{-1} \cdot A^{-1})^n \underset{\text{από το πρώτο μέρος της λύσης}}{=} (k^{-1})^n \cdot (A^{-1})^n = k^{-n} \cdot A^{-n}.$$

Άρα, $(kA)^{-n} = k^{-n} \cdot A^{-n}$.

Από τα παραπάνω δείξαμε λοιπόν ότι

$$(k \cdot A)^n = k^n \cdot A^n \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$