ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 11

24/11/2020

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο θεώρημα (δηλαδή, ότι η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει αν θεωρήσουμε το ανάπτυγμα ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του πίνακα), θα αποδείξουμε αρκετές ιδιότητες των οριζουσών οι οποίες θα μας βοηθήσουν πάρα πολύ στον υπολογισμό τους.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 1 $\det(A) = \det(A^t)$ για κάθε $A \in M_n(\mathbb{R})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Με επαγωγή στο n.

Όπως έχουμε δει, είναι τετριμμένο ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει για 1×1 και 2×2 πίνακες. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n>2$, και υποθέτουμε ότι η ιδιότητα ισχύει για τετραγωνικούς πίνακες μεγέθους μικρότερου του $n\times n$.

Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Θα αποδείξουμε ότι $\det(A) = \det(A^t)$. Έστω $A^t = (\beta_{ij})$ (τότε $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$ για όλα τα $i=1,\dots,n$ και $j=1,\dots,n$).

Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$\det(A) = \alpha_{11}\det(A_{11}) - \alpha_{12}\det(A_{12}) + \dots + \alpha_{1n}(-1)^{1+n}\det(A_{1n})$$
(ανάπτυγμα ως προς την $1^{η}$ γραμμή του A)

Από τον ορισμό της ορίζουσας έχουμε:

$$\det(A^t) = \beta_{11}\det((A^t)_{11}) - \beta_{21}\det((A^t)_{21}) + \dots + \beta_{n1}(-1)^{n+1}\det((A^t)_{n1})$$
(ανάπτυγμα ως προς την $1^{η}$ στήλη του A^t)

$$= \alpha_{11}\det((A^t)_{11}) - \alpha_{12}\det((A^t)_{21}) + \dots + \alpha_{1n}(-1)^{1+n}\det((A^t)_{n1})$$

Τώρα (λόγω του ορισμού του A^t), είναι άμεσο ότι

$(A^t)_{k1} = (A_{1k})^t$ για όλα τα $k = 1, 2, \dots, n$.

Επειδή οι πίνακες A_{1k} $(k = 1, \dots, n)$ είναι $(n-1)\times(n-1)$,

από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι

$\det(A_{1k}) = \det((A_{1k})^t)$ για όλα τα $k = 1, \dots, n$.

Συνεπώς $\det((A^t)_{k1}) = \det(A_{1k})$ για όλα τα $k = 1, \dots, n$.

Άρα,

$$\det(A^t) = \alpha_{11}\det(A_{11}) - \alpha_{12}\det(A_{12}) + \dots + \alpha_{1n}(-1)^{1+n}\det(A_{1n})$$
$$= \det(A).$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη. □

Σημειώνουμε ότι, στις παρακάτω ιδιότητες, οι ισχυρισμοί για τις στήλες προκύπτουν από τους αντίστοιχους ισχυρισμούς για τις γραμμές και την ιδιότητα 1.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 2 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Αν εναλλάξουμε δύο γραμμές (ή δύο στήλες) του A, τότε η ορίζουσα του προκύπτοντος πίνακα είναι ίση με $-\det(A)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Με επαγωγή στο n.

Έχουμε δει ότι η ιδιότητα ισχύει για τη περίπτωση $n=2$.
Υποθέτουμε ότι $n>2$ και ότι η ιδιότητα ισχύει για πίνακες μεγέθους μικρότερου του $n \times n$.
Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω $B=(\beta_{ij})$ ο $n\times n$ πίνακας που προκύπτει από τον A εναλλάσσοντας τις γραμμές r_u και r_v $(u \neq v)$ του A. Οι πίνακες A και B διαφέρουν μόνο στις γραμμές u και v.

Επειδή $n>2$, μπορούμε να επιλέξουμε μια γραμμή του B διαφορετική από τις γραμμές u και v του B. Έστω ότι επιλέγουμε την k-γραμμή του B, $k \neq u, v$.

Θεωρούμε το ανάπτυγμα της $\det(B)$ ως προς την k-γραμμή του B. Έχουμε:

$$\det(B) = \beta_{k1}(-1)^{k+1}|B_{k1}| + \beta_{k2}(-1)^{k+2}|B_{k2}| + \dots + \beta_{kn}(-1)^{k+n}|B_{kn}|$$

$$= \alpha_{k1}(-1)^{k+1}|B_{k1}| + \alpha_{k2}(-1)^{k+2}|B_{k2}| + \dots + \alpha_{kn}(-1)^{k+n}|B_{kn}|.$$

($\beta_{kj}=\alpha_{kj}$ για όλα τα $j=1,\dots,n$, διότι k-γραμμή B = k-γραμμή A).

Επειδή, για $j=1,\ldots,n$ ο ελάσσων B_{kj} προκύπτει από τον B διαγράφοντας την k-γραμμή του B και j-στήλη του B, $k\neq u,v$, και οι A και B διαφέρουν μόνο στις γραμμές u και v, έπεται ότι ο B_{ki} $(i=1,\ldots,n)$ προκύπτει από τον A_{ki} εναλλάσσοντας δύο γραμμές του A_{ki}.

Εφόσον ο A_{ki} είναι $(n-1)\times(n-1)$, από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι $|B_{ki}|=-|A_{ki}|$ για όλα τα $i=1,\ldots,n$. Άρα

$$\det(B)=\alpha_{k1}(-1)^{k+1}(-|A_{k1}|)+\alpha_{k2}(-1)^{k+2}(-|A_{k2}|)+\ldots+\alpha_{kn}(-1)^{k+n}(-|A_{kn}|)$$

$$=-\left[\alpha_{k1}(-1)^{k+1}|A_{k1}|+\alpha_{k2}(-1)^{k+2}|A_{k2}|+\ldots+\alpha_{kn}(-1)^{k+n}|A_{kn}|\right]$$

$$=-\det(A).$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 3 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Αν δύο γραμμές (ή στήλες) του A είναι ίσες, τότε $\det(A) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι οι γραμμές u και v του A, για κάποια u, v με $u \neq v$, είναι ίσες. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A εναλλάσσοντας τις γραμμές u και v του A. Από την ιδιότητα 2 έχουμε ότι $\det(B) = -\det(A)$. Όμως, $B = A$ (αφού οι γραμμές u και v είναι ίσες και τις εναλλάσσουμε), οπότε $\det(B) = \det(A)$. Άρα, $\det(A) = 0$. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 4 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Αν πολλαπλασιάσουμε κάποια γραμμή (ή στήλη) του A με κάποιο $k \in \mathbb{R}$, τότε η ορίζουσα του προκύπτοντος πίνακα είναι ίση με $k\det(A)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Έστω $k \in \mathbb{R}$ και έστω $B = (\beta_{ij})$ ο πίνακας που προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας την u-γραμμή του A, $(\alpha_{u1}, \alpha_{u2}, \ldots, \alpha_{un})$, από την $(k\alpha_{u1}, k\alpha_{u2}, \ldots, k\alpha_{un})$.

Εφόσον οι γραμμές του B είναι ίσες με αυτές του A εκτός ίσως από την u-γραμμή, έπεται ότι $B_{ui} = A_{ui}$ για όλα τα $i = 1, \ldots, n$. Άρα, $c^B_{ui} = c^A_{ui}$ για όλα τα

$i=1,\dots,n$, όπου C^B_{ui}, C^A_{ui} είναι οι συμπαράγοντες των β_{ui} και α_{ui}, αντίστοιχα. Θεωρούμε το ανάπτυγμα της $\det(B)$ ως προς την u-γραμμή του B και έχουμε:

$$\det(B) = \beta_{u1}C^B_{u1} + \beta_{u2}C^B_{u2} + \dots + \beta_{un}C^B_{un}$$

$$= k\alpha_{u1}C^A_{u1} + k\alpha_{u2}C^A_{u2} + \dots + k\alpha_{un}C^A_{un}$$

$$= k\left(\alpha_{u1}C^A_{u1} + \alpha_{u2}C^A_{u2} + \dots + \alpha_{un}C^A_{un}\right)$$

$$= k\cdot\det(A).$$

Άρα, $\det(B) = k\det(A)$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5</u> Έστω $A\in M_n(\mathbb{R})$. Αν σε κάποια γραμμή (ή στήλη) του A προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής (αντίστοιχα, στήλης) του A, τότε η ορίζουσα του προκύπτοντος πίνακα είναι ίση με $\det(A)$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Έστω $A=(\alpha_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$. Έστω $B=(\beta_{ij})$ ο πίνακας που προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $r_u \to r_u + k r_v$ για κάποια u, v με $u\neq v$ και $k\in\mathbb{R}$ στον A.

Τότε οι γραμμές του B είναι ίσες με αυτές του A εκτός ίσως από την u-γραμμή, η οποία είναι η

$(\alpha_{u1}+k\alpha_{v1}, \alpha_{u2}+k\alpha_{v2}, \ldots, \alpha_{un}+k\alpha_{vn})$.

Άρα, $B_{ui} = A_{ui}$ για όλα τα $i=1,\ldots,n$, και συνεπώς $c^B_{ui} = c^A_{ui}$ για όλα τα $i=1,\ldots,n$, όπου c^B_{ui} και c^A_{ui} οι συμπαράγοντες των β_{ui} και α_{ui}, αντίστοιχα.

Θεωρούμε το ανάπτυγμα της $\det(B)$ ως προς την u-γραμμή του B. Έχουμε:

$$\det(B) = \beta_{u1}c^B_{u1} + \beta_{u2}c^B_{u2} + \ldots + \beta_{un}c^B_{un}$$

$$= (\alpha_{u1}+k\alpha_{v1})c^A_{u1} + (\alpha_{u2}+k\alpha_{v2})c^A_{u2} + \ldots + (\alpha_{un}+k\alpha_{vn})c^A_{un}$$

$$= (\alpha_{u1}c^A_{u1} + \alpha_{u2}c^A_{u2} + \ldots + \alpha_{un}c^A_{un}) + k(\alpha_{v1}c^A_{u1} + \alpha_{v2}c^A_{u2} + \ldots + \alpha_{vn}c^A_{un})$$

$$(*) \qquad = \det(A) + k(\alpha_{v1}c^A_{u1} + \alpha_{v2}c^A_{u2} + \ldots + \alpha_{vn}c^A_{un}).$$

Έστω $\Gamma = (\gamma_{ij})$ ο $n\times n$ πίνακας που προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας την u-γραμμή του A από την v-γραμμή του A.

Οι πίνακες A και Γ διαφέρουν μόνον στη u-γραμμή.

Άρα, $\Gamma_{ui} = A_{ui}$ για κάθε $i=1,\ldots,n$ και συνεπώς

$c^{\Gamma}_{ui} = c^{A}_{ui}$ για κάθε $i=1,\ldots,n$.

Επίσης, οι γραμμές u και v του Γ είναι ίσες,

οπότε από την ιδιότητα 3, $\det(\Gamma)=0$.

Επομένως, έχουμε

$$0 = \det(\Gamma) = \gamma_{u1} c^{\Gamma}_{u1} + \gamma_{u2} c^{\Gamma}_{u2} + \ldots + \gamma_{un} c^{\Gamma}_{un}$$

(ανάπτυγμα ως προς την u-γραμμή του Γ
η οποία είναι η n-άδα $(\alpha_{v1}, \alpha_{v2}, \ldots, \alpha_{vn})$)

$$= \alpha_{v1} c^{A}_{u1} + \alpha_{v2} c^{A}_{u2} + \ldots + \alpha_{vn} c^{A}_{un}.$$

Άρα, $\alpha_{v1} c^{A}_{u1} + \alpha_{v2} c^{A}_{u2} + \ldots + \alpha_{vn} c^{A}_{un} = 0$.

Επομένως, από τη τελευταία ισότητα και την $(*)$

παίρνουμε ότι $\det(B) = \det(A)$. $\square$

<u>Η ιδιότητα 5 θα μας βοηθήσει πάρα πολύ στους υπολογισμούς των οριζουσών. Διότι, με αυτή την ιδιότητα, θα μπορούμε να δημιουργούμε μηδενικά σε γραμμές ή στήλες χωρίς να αλλάζει η τιμή της ορίζουσας, οπότε μετά θα εφαρμόζουμε το θεώρημα που μας επιτρέπει να παίρνουμε το ανάπτυγμα οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης, και άρα να παίρνουμε το ανάπτυγμα της γραμμής ή στήλης με τα περισσότερα μηδενικά.</u>

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 6 Η ορίζουσα είναι:

(α) γραμμική ως προς τις γραμμές $n\times n$ πινάκων, δηλαδή, για $i=1,\ldots,n$, ισχύει

$$\det\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ u_i+v_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

και

$$\det\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ ku_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = k\cdot\det\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix},$$

όπου u_i και v_i είναι διατεταγμένες n-άδες και $k\in\mathbb{R}$.

(β) γραμμική ως προς τις στήλες $n\times n$ πινάκων, δηλαδή, για $j=1,\ldots,n$, ισχύει

$$\det(c_1\, c_2 \ldots u_j+v_j \ldots c_n) = \det(c_1\, c_2 \ldots u_j \ldots c_n) + \det(c_1\, c_2 \ldots v_j \ldots c_n)$$

και

$$\det(c_1\, c_2 \ldots ku_j \ldots c_n) = k\det(c_1\, c_2 \ldots u_j \ldots c_n),$$

όπου u_j, v_j διατεταγμένες n-άδες σε μορφή στήλης και $k\in\mathbb{R}$.
Η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 7 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Αν μια γραμμή (ή στήλη) του A είναι μηδενική, τότε $\det(A)=0$.

(Έστω ότι η i-γραμμή του A είναι μηδενική, για κάποιο $i \in \{1,\dots,n\}$. Τότε $\det(A) = 0\cdot c_{i1} + 0\cdot c_{i2} + \dots + 0\cdot c_{in} = 0$.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $\det(I_n)=1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΛΥΣΗ Έπεται άμεσα από προηγούμενη άσκηση ότι η ορίζουσα ενός άνω ή κάτω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων και το γεγονός ότι κάθε στοιχείο της κύριας διαγωνίου του I_n είναι ίσο με 1. $\square$

2) Αν μια γραμμή (ή στήλη) ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι ίση με ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής (αντίστοιχα, στήλης) του A, τότε $\det(A)=0$.

ΛΥΣΗ Έστω ότι $r_j = k r_i$ για κάποια i,j με $i \neq j$ και $k \in \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι $i<j$ (το επιχείρημα είναι εντελώς παρόμοιο αν $j<i$). Έχουμε:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ k r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \underset{\text{I4 ή I6α}}{=} k \det\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{I3}}{=} k \cdot 0 = 0.$$

Ο ισχυρισμός για τις στήλες προκύπτει από το παραπάνω και την ιδιότητα 1. □

3) Να υπολογιστεί η ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

<u>ΛΥΣΗ</u> Θα εκμεταλλευτούμε την ιδιότητα 5 δημιουργώντας μηδενικά σε γραμμές ή στήλες χωρίς να αλλάζει η τιμή της ορίζουσας, και θα αναπτύσσουμε ως προς τις προκύπτουσες γραμμές ή στήλες με τα περισσότερα μηδενικά (λόγω του θεωρήματος που μας επιτρέπει να παίρνουμε το

ανάπτυγμα ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη).
Έτσι θα κάνουμε πολύ λιγότερους, και απλούστερους, υπολογισμούς από ότι αν εφαρμόζαμε τον ορισμό.
Έχουμε:

$$D \underset{\substack{r_1 \to r_1 - 2r_2 \\ r_3 \to r_3 - 3r_2 \\ r_4 \to r_4 - r_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{ανάπτυγμα ως προς } 1^{η} \text{ στήλη}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -5 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{c_1 \to c_1 + c_3}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ -1 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{ανάπτυγμα ως προς } 1^{η} \text{ γραμμή}}{=} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -\big(0\cdot(-4) - (-1)(-1)\big) = 1.$$

□

4) Να αποδειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{vmatrix} = 0$$

για οποιαδήποτε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Για $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1+C_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \alpha-\gamma & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \gamma-\beta & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1 \to C_1+C_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ 0 & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ 0 & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{vmatrix}$$

$$=\!=\!= 0. \qquad \square$$

5) Για $x \in \mathbb{R}$, έστω

$$D_x = \begin{vmatrix} x & -x & x \\ 1 & 2x-4 & -1 \\ -1 & 2 & 3x-5 \end{vmatrix}$$

Να λυθεί η εξίσωση $D_x = 0$.

ΛΥΣΗ Υπολογίζουμε πρώτα την ορίζουσα D_x.

Έχουμε:

$$D_x \overset{C_2 \to C_2 + C_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} x & 0 & -x \\ 1 & 2x-3 & -1 \\ -1 & 1 & 3x-5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_3 \to C_3 + C_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2x-3 & 0 \\ -1 & 1 & 3x-6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } 1^{\eta} \text{ γραμμή}}{=\!=\!=} x \cdot \begin{vmatrix} 2x-3 & 0 \\ 1 & 3x-6 \end{vmatrix}$$

$$= x(2x-3)(3x-6).$$

Άρα, $D_x = 0 \Leftrightarrow x(2x-3)(3x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{3}{2}$ ή $x = 2$. $\square$

6) Να υπολογιστεί η ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (b+c)^2 & bc \\ b^2 & (c+a)^2 & ca \\ c^2 & (a+b)^2 & ab \end{vmatrix}$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2+2bc & bc \\ b^2 & c^2+a^2+2ca & ca \\ c^2 & a^2+b^2+2ab & ab \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Ιδιότητα 6β}}{=} \begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ b^2 & c^2+a^2 & ca \\ c^2 & a^2+b^2 & ab \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a^2 & 2bc & bc \\ b^2 & 2ca & ca \\ c^2 & 2ab & ab \end{vmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ (από άσκηση 2)}}}$$

$$\stackrel{c_1 \to c_1+c_2}{=} \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & b^2+c^2 & bc \\ b^2+c^2+a^2 & c^2+a^2 & ca \\ c^2+a^2+b^2 & a^2+b^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & b^2+c^2 & bc \\ 1 & c^2+a^2 & ca \\ 1 & a^2+b^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1}}{=} (a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} 1 & b^2+c^2 & bc \\ 0 & (a-b)(a+b) & c(a-b) \\ 0 & (a-c)(a+c) & b(a-c) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{ανάπτυγμα} \\ \text{ως προς 1η στήλη}}}{=} (a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} (a-b)(a+b) & c(a-b) \\ (a-c)(a+c) & b(a-c) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότητα 4}}{=} (a^2+b^2+c^2)(a-b)(a-c)\begin{vmatrix} a+b & c \\ a+c & b \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1 \to c_1 + c_2}{=} (a^2+b^2+c^2)(a-b)(a-c)\begin{vmatrix} a+b+c & c \\ a+c+b & b \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότητα 4}}{=} (a^2+b^2+c^2)(a-b)(a-c)(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & b \end{vmatrix}$$

$$= (a^2+b^2+c^2)(a-b)(a-c)(a+b+c)(b-c). \qquad \square$$

7) Χωρίς να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες, να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta\gamma & \alpha & \alpha^2 \\ \gamma\alpha & \beta & \beta^2 \\ \alpha\beta & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix},$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \beta\gamma & \alpha & \alpha^2 \\ \gamma\alpha & \beta & \beta^2 \\ \alpha\beta & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\alpha,\beta,\gamma\neq 0]{\text{Ιδιότητα } 4} \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \begin{vmatrix} \alpha\beta\gamma & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha\beta\gamma & \beta^2 & \beta^3 \\ \alpha\beta\gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix}. \qquad \square$$

8) Να αποδείξετε ότι η ορίζουσα

$$D_x = \begin{vmatrix} \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 3x & \cos 4x & \cos 5x \\ \cos 5x & \cos 6x & \cos 7x \end{vmatrix}$$

είναι ανεξάρτητη της τιμής του x.

<u>ΛΥΣΗ</u> Θα χρησιμοποιήσουμε τον τριγωνομετρικό τύπο:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Έχουμε:

$$D_x \overset{c_1 \to c_1 + c_3}{=\!=} \begin{vmatrix} 2\cos 2x \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ 2\cos 4x \cos x & \cos 4x & \cos 5x \\ 2\cos 6x \cos x & \cos 6x & \cos 7x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότητα 4}}{=\!=} 2\cos x \begin{vmatrix} \cos 2x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 4x & \cos 4x & \cos 5x \\ \cos 6x & \cos 6x & \cos 7x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Ιδιότητα 3} \\ (c_1 = c_2)}}{=\!=} 2\cos x \cdot 0 = 0.$$

Άρα, η D_x είναι ανεξάρτητη της τιμής του x. □

9) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) του επιπέδου είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>ΛΥΣΗ</u> Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

Υπολογίζουμε τώρα την παραπάνω ορίζουσα.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3 \to r_3 - r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \to r_2 - r_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 - x & y_1 - y & 0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{ανάπτυγμα ως προς } 3^{\eta} \text{ στήλη}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 - x)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_1 - y).$$

Επομένως,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff (x_1 - x)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_1 - y) = 0$$

$$\iff (x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1).$$

$\square$

10) Να δείξετε ότι για κάθε $A \in M_n(\mathbb{R})$ και κάθε $k \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\det(kA) = k^n \det(A).$$

<u>ΛΥΣΗ</u> Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\det(kA) = \begin{vmatrix} k\alpha_{11} & k\alpha_{12} & \dots & k\alpha_{1n} \\ k\alpha_{21} & k\alpha_{22} & \dots & k\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\alpha_{n1} & k\alpha_{n2} & \dots & k\alpha_{nn} \end{vmatrix} \overset{I4}{=} k \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ k\alpha_{21} & k\alpha_{22} & \dots & k\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\alpha_{n1} & k\alpha_{n2} & \dots & k\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{I4}{=} k^2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\alpha_{n1} & k\alpha_{n2} & \dots & k\alpha_{nn} \end{vmatrix} = \dots = k^n \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k^n \det(A).$$

$\square$