ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 10

23/11/2020

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

(Determinants)

Θα ορίσουμε τις ορίζουσες $n \times n$ πινάκων ($n \in \mathbb{N}$) με επαγωγή στο n, με το οποίο εννοούμε ότι η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα δοσμένης τάξης θα οριστεί με βάση τις ορίζουσες τετραγωνικών πινάκων της επόμενης χαμηλότερης τάξης.

Για να ξεκινήσουμε τη διαδικασία, ορίζουμε την ορίζουσα ενός 1×1 πίνακα (α_{11}) ως

$$\det(\alpha_{11}) = \alpha_{11} \qquad (1)$$

Ορίζουμε την ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

ως

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας την (1), η (2) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \det(\alpha_{11})\det(\alpha_{22}) - \det(\alpha_{21})\det(\alpha_{12}).$$

Η εξίσωση (1) ορίζει μια <u>ορίζουσα πρώτης τάξης</u> η οποία σχετίζεται με έναν 1×1 πίνακα.

Η εξίσωση (2) ορίζει μια <u>ορίζουσα δεύτερης τάξης</u> η οποία σχετίζεται με έναν 2×2 πίνακα.

Πολλές φορές συμβολίζουμε την ορίζουσα

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix} \quad \text{ως} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}.$$

Πριν προχωρήσουμε με τον επαγωγικό ορισμό των οριζουσών, ας δούμε ιδιότητες που έχουν οι ορίζουσες δεύτερης τάξης. Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια της ενότητας, αντίστοιχες ιδιότητες ικανοποιούνται από τις ορίζουσες οποιασδήποτε τάξης και θα είναι πολύ χρήσιμες στον υπολογισμό των οριζουσών μεγάλης τάξης.

1) $\det(A) = \det(A^t)$ για κάθε $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Πράγματι, έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Τότε $A^t = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$. Έχουμε:

$\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$ και
$\det(A^t) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$. Άρα, $\det(A) = \det(A^t)$.

2) Έστω $A \in M_2(\mathbb{R})$. Αν οι δύο γραμμές (ή στήλες) του A είναι ίσες, τότε $\det(A) = 0$.

Πράγματι, έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Τότε έχουμε ότι

$\det(A) = \alpha\beta - \alpha\beta = 0$. Παρόμοια, $\det(A) = 0$ αν οι δύο στήλες του A είναι ίσες. Παρατηρούμε επίσης το εξής:

- <u>Ο ισχυρισμός για τις στήλες τόσο στη 2) όσο και στις επόμενες ιδιότητες προκύπτει αμέσως από την 1) και τον αντίστ. ισχυρισμό για γραμμές</u>

3) Έστω $A \in M_2(\mathbb{R})$. Αν ο $B \in M_2(\mathbb{R})$ προκύπτει από τον A πολλαπλασιάζοντας κάποια γραμμή (ή στήλη) του A επί κάποιο $k \in \mathbb{R}$, τότε $\det(B) = k\det(A)$.

Πράγματι, έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$

και έστω $B = \begin{pmatrix} k\alpha_{11} & k\alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Έχουμε:

$$\det(B) = k\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}k\alpha_{12} = k(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) = k\det(A).$$

Παρόμοια $\det(B) = k\det(A)$ αν $B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ k\alpha_{21} & k\alpha_{22} \end{pmatrix}$.

4) Έστω $A \in M_2(\mathbb{R})$. Έστω $B \in M_2(\mathbb{R})$ ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον A προσθέτοντας σε κάποια γραμμή (ή στήλη) του A ένα πολλαπλάσιο της άλλης γραμμής (αντίστοιχα, στήλης) του A. Τότε $\det(B) = \det(A)$.

Πράγματι, έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ και

έστω $B = \begin{pmatrix} a_{11} + k a_{21} & a_{12} + k a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ για κάποιο

$k \in \mathbb{R}$. (Δηλαδή, ο B προέκυψε από τον A εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $r_1 \to r_1 + k r_2$ στον A.)

Έχουμε:

$$\det(B) = (a_{11} + k a_{21}) a_{22} - a_{21}(a_{12} + k a_{22})$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} + k a_{21} a_{22} - k a_{21} a_{22}$$

$$= \det(A).$$

Παρόμοια $\det(B) = \det(A)$ αν ο B προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $r_2 \to r_2 + k r_1$ στον A.

5) Έστω $A \in M_2(\mathbb{R})$. Αν ο $B \in M_2(\mathbb{R})$ προκύπτει από τον A εναλλάσσοντας τις δύο γραμμές (ή στήλες) του A, τότε $\det(B) = -\det(A)$.

Πράγματι, έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Αν $B = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{pmatrix}$, τότε

$$\begin{aligned}\det(B) &= \alpha_{21}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{22} \\ &= -(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) \\ &= -\det(A).\end{aligned}$$

6) Η ορίζουσα δεύτερης τάξης είναι :

(α) γραμμική ως προς τις γραμμές 2×2 πινάκων.

Αυτό σημαίνει ότι :

$$\det\begin{pmatrix} u+v \\ w \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} u \\ v+w \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} ku \\ v \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} u \\ kv \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

όπου u, v, w είναι διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών και $k \in \mathbb{R}$. (Σημειώστε ότι η τρίτη και η τέταρτη ιδότητα έχουν διατυπωθεί στην ιδιότητα 3.)

Ας αποδείξουμε τη πρώτη από τις παραπάνω τέσσερις ιδότητες. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+\alpha' & \beta+\beta' \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

(Θυμηθείτε ότι $(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha+\alpha', \beta+\beta')$.)

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (\alpha+\alpha')\delta - \gamma(\beta+\beta') \\ &= \alpha\delta + \alpha'\delta - \gamma\beta - \gamma\beta' \\ &= \alpha\delta - \gamma\beta + \alpha'\delta - \gamma\beta' \\ &= \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Άρα

$$\det\begin{pmatrix} \alpha+\alpha' & \beta+\beta' \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

(β) γραμμική ως προς τις στήλες 2×2 πινάκων.

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\det(u+v \mid w) = \det(u \mid w) + \det(v \mid w),$$

$$\det(u \mid v+w) = \det(u \mid v) + \det(u \mid w),$$

$$\det(ku \mid v) = k\det(u \mid v),$$

$$\det(u \mid kv) = k\det(u \mid v),$$

όπου u, v, w είναι διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών σε μορφή πίνακα στήλη και $k \in \mathbb{R}$.

(Σημειώστε ότι η τρίτη και η τέταρτη ισότητα έχουν διατυπωθεί στην ιδιότητα 3.)

Οι αποδείξεις των παραπάνω τεσσάρων ισοτήτων προκύπτουν από το (α) και την ιδιότητα 1).

7) Αν μια γραμμή (ή στήλη) ενός 2×2 πίνακα A είναι μηδενική, τότε $\det(A) = 0$.

8) $\det(I_2) = 1$.

Ασκήσεις

1) Να υπολογισεί η ορίζουσα $\begin{vmatrix} x+x^2 & y+y^2 \\ x & y \end{vmatrix}$

χρησιμοποιώντας ιδιότητες των οριζουσών $2^{ης}$ τάξης.

ΛΥΣΗ Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} x+x^2 & y+y^2 \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x & y \end{vmatrix} \quad \text{(ιδιότητα (6α))}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x & y \end{vmatrix} \quad \text{(ιδιότητα 2)}$$

$$= x \begin{vmatrix} x & y^2 \\ 1 & y \end{vmatrix} \quad \text{(ιδιότητα 3 ή 6β)}$$

$$= xy \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(ιδιότητα 3 ή 6β)}$$

$$= xy(x-y).$$ □

2) Να αποδείξετε ότι

$$\det(kA) = k^2 \det(A)$$

για κάθε $A \in M_2(\mathbb{R})$ και κάθε $k \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

και έστω $k \in \mathbb{R}$.

$$\det(kA) = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix}$$

$$= k^2 a_{11}a_{22} - k^2 a_{21}a_{12}$$

$$= k^2 (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

$$= k^2 \det(A).$$

□

Η ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΕΝΟΣ $n \times n$ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Υποθέτουμε ότι οι ορίζουσες $k \times k$ πινάκων με $k < n$ έχουν οριστεί.
Για τον ορισμό της ορίζουσας $n \times n$ πίνακα, θα χρειαστούμε τη παρακάτω ορολογία.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Για $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 1, 2, \dots, n$, συμβολίζουμε με A_{ij} τον $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα ο οποίος προκύπτει από τον A διαγράφοντας την i-γραμμή του A και τη j-στήλη του A.
Ο A_{ij} λέγεται ο <u>ελάσσονας πίνακας</u> του στοιχείου a_{ij}.

Η ορίζουσα $\det(A_{ij})$ του A_{ij} λέγεται η <u>ελάσσονα ορίζουσα</u> του στοιχείου α_{ij}.

Ο αριθμός $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ λέγεται <u>συμπαράγοντας</u> του στοιχείου α_{ij}.

Παρατηρείστε ότι η $\det(A_{ij})$ και το αντίστοιχο c_{ij} είναι είτε τα ίδια είτε το ένα είναι ο αντίθετος του άλλου και ότι τα σχετικά πρόσημα $(-1)^{i+j}$ είναι είτε $+1$ είτε -1 σύμφωνα με το παρακάτω σχέδιο

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Για παράδειγμα,

$$c_{11} = \det(A_{11}),\ c_{21} = -\det(A_{21}),\ c_{22} = \det(A_{22})$$

κ.ο.κ.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ο ελάσσονας του στοιχείου a_{11} είναι

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-4} \\ \cancel{2} & 5 & 6 \\ \cancel{1} & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Η ελάσσονα ορίζουσα του a_{11} είναι

$$\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16.$$

Ο συμπαράγοντας του a_{11} είναι

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = \det(A_{11}) = 16.$$

Παρόμοια, ο ελάσσονας του στοιχείου a_{32} είναι

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 3 & \cancel{1} & -4 \\ 2 & \cancel{5} & 6 \\ \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Η ελάσσονα ορίζουσα του a_{32} είναι

$$\det(A_{32}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26.$$

Ο συμπαράγοντας του a_{32} είναι

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \det(A_{32}) = -\det(A_{32}) = -26. \quad \square$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Η <u>ορίζουσα</u> ενός 1×1 πίνακα είναι το μοναδικό στοιχείο του· είναι μια ορίζουσα <u>πρώτης τάξης</u>.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n > 1$. Υποθέτουμε ότι οι ορίζουσες τάξης μικρότερης του n έχουν οριστεί.

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Η <u>ορίζουσα</u> του A είναι

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} c_{11} + a_{21} c_{21} + \dots + a_{n1} c_{n1}$$

(όπου για $i = 1, 2, \dots, n$, c_{i1} είναι ο συμπαράγοντας του a_{i1})

και είναι μια <u>n-τάξης</u> ορίζουσα.

Το άθροισμα $a_{11} c_{11} + a_{21} c_{21} + \dots + a_{n1} c_{n1}$ λέγεται <u>ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τη 1^{η} στήλη του A</u>.

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι

$$\det(A) = \alpha_{11}\det(A_{11}) - \alpha_{21}\det(A_{21}) + \dots + \alpha_{n1}(-1)^{n+1}\det(A_{n1}).$$

<u>Παράδειγμα</u> Ορίζουσα 2×2 πίνακα. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} \cancel{\alpha_{11}} & \cancel{\alpha_{12}} \\ \cancel{\alpha_{21}} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{22}$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\det(A_{21}) = -\begin{vmatrix} \cancel{\alpha_{11}} & \alpha_{12} \\ \cancel{\alpha_{21}} & \cancel{\alpha_{22}} \end{vmatrix} = -\alpha_{12}$$

Άρα, $\det(A) = \alpha_{11}c_{11} + \alpha_{21}c_{21} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$ και

συνεπώς $\det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$, όπως είχαμε δει

στην αρχή της ενότητας αυτής. $\square$

<u>Παράδειγμα:</u> Ορίζουσα 3×3 πίνακα. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= \alpha_{11}c_{11} + \alpha_{21}c_{21} + \alpha_{31}c_{31} \\ &= \alpha_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11}) + \alpha_{21}(-1)^{2+1}\det(A_{21}) + \alpha_{31}(-1)^{3+1}\det(A_{31})\end{aligned}$$

$$= \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{21}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{31}\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13}$$

$$+ \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} \, .$$

□

<u>Παρατήρηση</u> <u>Μόνον</u> για τις ορίζουσες $3^{ης}$ τάξης υπάρχει και ο <u>κανόνας του Sarrus</u> για τον υπολογισμό τους.

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \left|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix}\right. & & & \left|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{matrix}\right. & = \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}$$

$$- \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12} \, .$$

Ο υπολογισμός οριζουσών πινάκων ακόμα και μέτριου μεγέθους χρησιμοποιώντας τον ορισμό είναι τρομερά επίπονος! (Για παράδειγμα, για μια ορίζουσα $4^{ης}$ τάξης, το ανάπτυγμα ως προς τη $1^η$ στήλη (με βάση τον ορισμό) θα έδινε 4 ορίζουσες $3^{ης}$ τάξης, για κάθε μια από τις οποίες το ανάπτυγμα ως προς τη $1^η$ στήλη θα έδινε 3 ορίζουσες $2^{ης}$ τάξης.)

Γι' αυτό είναι επιθυμητό να έχουμε έναν αποτελεσματικό τρόπο για να υπολογίσουμε μια ορίζουσα. Παρακάτω θα αναπτύξουμε ιδιότητες των οριζουσών (όπως αυτές που είδαμε για ορίζουσες $2^{ης}$ τάξης) οι οποίες θα μας επιτρέψουν να βρούμε μια καλή μέθοδο υπολογισμού τους. Πριν ξεκινήσουμε αυτή τη προσπάθεια, δίνουμε παρακάτω ένα πολύ βοηθητικό θεώρημα χωρίς απόδειξη (η απόδειξη γίνεται με μαθηματική επαγωγή).

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε η τιμή της ορίζουσας $\det(A)$ του A δεν αλλάζει αν θεωρήσουμε το ανάπτυγμα ως προς οποιαδήποτε στήλη ή γραμμή του A. Δηλαδή,

$$\det(A) = \alpha_{1j}c_{1j} + \alpha_{2j}c_{2j} + \dots + \alpha_{nj}c_{nj} \text{ για κάθε } j=1,\dots,n$$

(ανάπτυγμα ως προς τη j-στήλη)

και

$$\det(A) = \alpha_{i1}c_{i1} + \alpha_{i2}c_{i2} + \dots + \alpha_{in}c_{in} \text{ για κάθε } i=1,\dots,n$$

(ανάπτυγμα ως προς την i-γραμμή)

<u>Παράδειγμα</u> (Έξυπνη επιλογή γραμμής ή στήλης)

Θεωρούμε τον παρακάτω 5×5 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την $\det(A)$. Με βάση το προηγούμενο Θεώρημα, μπορούμε να αναπτύξουμε ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του A. Κοιτώντας προσεκτικά τον πίνακα A, μας συμφέρει να επιλέξουμε εκείνη τη γραμμή ή στήλη η οποία έχει τα περισσότερα μηδενικά.

Επομένως,

$$\det(A) = 2(-1)^{5+5} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$ (ανάπτυγμα ως προς τη 5^{η} γραμμή)

$$= 2\cdot 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$ (ανάπτυγμα ως προς τη $3^η$ στήλη)

$$= -2\left(3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$ ανάπτυγμα ως προς τη $1^η$ στήλη

$$= -2\left(3(1-2) - 1\cdot(2+1)\right) = -2(-3-3) = 12. \quad \square$$

<u>Παράδειγμα</u> Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός άνω ή κάτω τριγωνικού πίνακα είναι το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του πίνακα.

<u>ΛΥΣΗ</u> Εργαζόμαστε με έναν άνω τριγωνικό πίνακα, η άλλη περίπτωση είναι ανάλογη. Αν

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & O & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας, τότε αναπτύσσοντας ως προς τις πρώτες στήλες κάθε φορά, έχουμε

$$\det(U) = u_{11}\begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22}\begin{vmatrix} u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ 0 & \cdots & u_{4n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}. \quad \square$$