ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

#1. Να επιλυθούν τα παρακάτω συστήματα:

(i) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 5x + 7y &= 3 \end{aligned}$, (ii) $\begin{aligned} 4x - 2y &= 5 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned}$

(iii) $\begin{aligned} 2x + 4y &= 10 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned}$,

---

#2. Να επιλυθούν τα συστήματα:

(α) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$, (β) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= -4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$.

(γ) $\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 1 \end{aligned}$, (δ) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 - 6x_4 &= 0 \end{aligned}$

#3. Να λυθούν τα συστήματα με τους παρακάτω επαυξημένους πίνακες:

(α) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$, (β) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

(γ) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right)$

#4 Να βρεθούν όλες οι λύσεις των παρακάτω ομογενών συστημάτων:

(α)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 11x_2 + 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

, (β)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 0 \\ 9x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 + x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

#5. Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες τα παρακάτω συστήματα έχουν: (i) Μοναδική λύση, (ii) καμία λύση, (iii) άπειρο πλήθος λύσεων.

(α)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + kx_3 &= 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 8x_3 &= 3 \end{aligned}$$

, (β)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + kx_3 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= k \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(γ)
$$\begin{aligned} x_1 \quad - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 &= 1 \end{aligned}$$

, (δ)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + kx_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= k \\ kx_1 + x_2 + kx_3 &= 3 \end{aligned}$$

,6 Για ποιές τιμές των k, λ έχει το σύστημα

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$4x_1 + 7x_2 + kx_3 = \lambda$$

(i) Μοναδική λύση, (ii) Καμία λύση, (iii) άπειρο πλήθος λύσεων.

#7. Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα α, β, γ ώστε τα παρακάτω συστήματα να είναι συμβιβαστά.

(α)
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = \alpha$$
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = \beta$$
$$x_1 - 5x_2 + 8x_3 = \gamma$$

, (β)
$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = \alpha$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = \beta$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = \gamma.$$

#8. Να εξετασθεί αν τα παρακάτω ομογενή συστήματα έχουν μια μη-τετριμμένη λύση.

(α)
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1 - 8x_2 + 8x_3 = 0$$
$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$

, (β)
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$
$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$$

#9. Δίνεται το παρακάτω $n \times n$ σύστημα γρ. εξισώσεων:

$$(*) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

(n εξισώσεις – n άγνωστοι)

Αν το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, τότε να δείξετε ότι το σύστημα (*) έχει μοναδική λύση για κάθε επιλογή των σταθερών όρων $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Ε. ΤΑΧΤΣΗΣ

Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως "αληθής" ή "ψευδής" δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1) Κάθε $n \times n$ γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση.

2) Κάθε $n \times n$ γραμμικό σύστημα είναι συμβιβαστό.

3) Ένα $m \times n$ γραμμικό σύστημα όπου $m > n$ μπορεί να έχει άπειρο πλήθος λύσεων

4) Ένα $m \times n$ γραμμικό σύστημα όπου $m < n$ μπορεί να είναι αδύνατο

5) Κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με ένα μοναδικό κλιμακωτό πίνακα.

6) Κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με ένα μοναδικό ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

7) Αν $(A|B)$ και $(\Gamma|\Delta)$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες (όπου B & Δ είναι πίνακες στήλη) τότε τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες $(A|B)$ και $(\Gamma|\Delta)$, αντίστοιχα, είναι ισοδύναμα.

8) Ένα γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών ένα $n \times n$ A έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν, ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον I_n

9) Ένα γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών A έχει άπειρο πλήθος λύσεων, αν και μόνο αν, ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με ένα κλιμακωτό πίνακα που περιέχει στήλη χωρίς ηγετικό στοιχείο.

10) Ένα συμβιβαστό γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών A έχει άπειρο πλήθος λύσεων, αν και μόνο αν, ο A είναι γραμμοϊσοδύναμος με ένα κλιμακωτό πίνακα που περιέχει στήλη χωρίς ηγετικό στοιχείο.

Έστω

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned}$$

ένα $m \times n$ σύστημα το οποίο υποθέτουμε ότι έχει μοναδική λύση.

(α) Δείξτε ότι $m \geqslant n$.

(β) Αν $m = n$, είναι το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

συμβιβαστό για οποιαδήποτε επιλογή των $b_1, b_2, \dots, b_m$;

(γ) Να απαντήσετε το ερώτημα (β) στην περίπτωση που $m > n$.