ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 6

27/10/2020

ΠΡΟΣΟΧΗ! (1) $AB = O \not\Rightarrow A = O$ ή $B = O$

Πράγματι, ας θεωρήσουμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+1\cdot 1 \\ 1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

Άρα, $AB = O_2$. Όμως, $A \neq O_2$ και $B \neq O_2$.

(2) $AB = A\Gamma \not\Rightarrow B = \Gamma$

Πράγματι, έστω A και B οι πίνακες στο (1) παραπάνω.
Έστω $\Gamma = O_2$. Όπως είδαμε στο (1), $AB = O_2$.
Επίσης, $A\Gamma = A \cdot O_2 = O_2$. Άρα, $AB = A\Gamma$.
Όμως, $B \neq \Gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τους πίνακες AB και BA.

ΛΥΣΗ Εφόσον ο A είναι 3x2 και ο B είναι 2x3, το γινόμενο AB ορίζεται και είναι ένας 3x3 πίνακας. Για να βρούμε τη πρώτη γραμμή του AB, πολλαπλασιάζουμε τη πρώτη γραμμή του A με κάθε στήλη του B, αντίστοιχα:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad -1} \\ 1 \quad\ \ 0 \\ -3 \quad\ \ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -5 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & -4-4 & -10+0 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τη δεύτερη γραμμή του AB, πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή του A με κάθε στήλη του B, αντίστοιχα:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \boxed{1 \quad 0} \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-5\\0\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1+0 & -2+0 & -5+0 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ & & \end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τη τρίτη γραμμή του AB, πολλαπλασιάζουμε τη τρίτη γραμμή του A με κάθε στήλη του B, αντίστοιχα:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \boxed{-3 \quad 4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-5\\0\end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3+12 & 6+16 & 15+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

Άρα,

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}.$$

Τώρα, εφόσον ο B είναι 2×3 και ο A είναι 3×2, το γινόμενο BA ορίζεται και είναι ένας 2×2 πίνακας. Για να βρούμε τη πρώτη γραμμή του BA, πολλαπλασιάζουμε τη πρώτη γραμμή του B με κάθε στήλη του A, αντίστοιχα:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2+15 & -1+0-20 \\ & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ & \end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τη δεύτερη γραμμή του BA, πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή του B με κάθε στήλη του A, αντίστοιχα:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 6+4+0 & -3+0+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Άρα,

$$BA = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρείστε ότι $AB \neq BA$. Συγκεκριμένα, οι πίνακες AB και BA δεν έχουν ούτε το ίδιο μέγεθος. □

2) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Βρείτε τους πίνακες A^2 και A^3.

<u>ΛΥΣΗ</u> $A^2 = A \cdot A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) \\ 4\cdot 1 + (-3)\cdot 4 & 4\cdot 2 + (-3)\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\cdot 1 + (-4)\cdot 4 & 9\cdot 2 + (-4)\cdot(-3) \\ (-8)\cdot 1 + 17\cdot 4 & (-8)\cdot 2 + 17\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

3) Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται σε πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ είναι σωστές και ποιές είναι λάθος. Στη περίπτωση λάθους να δώσετε αντιπαράδειγμα.

(α) $(A+B)^2 = (A+B)(B+A)$.

(β) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(γ) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Η σχέση που δίνεται στο (α) ισχύει για όλους τους πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Πράγματι, έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Έχουμε:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$ (ορισμός k-δύναμης πίνακα, όπου $k \in \mathbb{N}$)

$$= (A+B)(B+A)$$ ($A+B = B+A$, διότι η πρόσθεση πινάκων ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα).

Άρα, η πρόταση στο (α) είναι σωστή.

Η πρόταση στο (β) δεν ισχύει γενικά για όλους τους πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Αν ίσχυε για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, τότε θα είχαμε:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$\Rightarrow (A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2$$

Επιμεριστική ιδιότητα

$$\Rightarrow (A+B)\cdot A + (A+B)B = A^2 + 2AB + B^2$$

Επιμεριστική ιδιότητα

$$\Rightarrow A\cdot A + BA + AB + BB = A^2 + 2AB + B^2$$

$$\Rightarrow A^2 + BA + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Νόμος Διαγραφής στη πρόσθεση

$$\Rightarrow BA + AB = 2AB$$

$$2AB = (1+1)AB = 1\cdot AB + 1\cdot AB = AB + AB$$

$$\Rightarrow BA + AB = AB + AB$$

Νόμος Διαγραφής στη πρόσθεση

$$\Rightarrow BA = AB.$$

Άρα, αν ισχύει $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, τότε $AB = BA$ για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Γνωρίζουμε όμως ότι η πρόταση "$AB = BA, \forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$" δεν ισχύει γενικά. Για ένα αντιπαράδειγμα, βλ. Μάθημα 5, σελίδα 22. Ως άσκηση, να δώσετε ένα διαφορετικό αντιπαράδειγμα.

Η πρόταση στο (γ) δεν ισχύει γενικά για όλους τους πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Αν ίσχυε για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, τότε θα είχαμε:

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

$$\Rightarrow A^2 - B^2 = (A-B)\cdot A + (A-B)B$$

$$\Rightarrow A^2 - B^2 = A\cdot A - B\cdot A + AB - BB$$

Επιμεριστική ιδιότητα

$$\Rightarrow A^2 - B^2 = A^2 - BA + AB - B^2$$

$$\Rightarrow O_n = -BA + AB$$

Νόμος Διαγραφής στη πρόσθεση

$$\Rightarrow BA + O_n = BA + (-BA + AB)$$

$$\Rightarrow BA = (BA + (-BA)) + AB$$

Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης πινάκων

$$\Rightarrow BA = O_n + AB$$

$$\Rightarrow BA = AB$$

Αν λοιπόν ίσχυε η πρόταση στο (γ) για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, τότε θα είχαμε ότι $AB = BA$ για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, το οποίο δεν ισχύει γενικά (βλ. Μάθημα 5).

Άρα, η πρόταση στο (γ) είναι λάθος. $\square$

4) Σωστό ή Λάθος;

(α) Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $A^2 = I_n$, τότε $A = I_n$ ή $A = -I_n$.

(β) Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $A^2 = I_n$, τότε $A^k = I_n$ για κάθε φυσικό αριθμό $k \geq 2$.

(γ) Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $A^2 = I_n$, τότε $A^k = I_n$ για όλους τους άρτιους φυσικούς αριθμούς k.

<u>ΛΥΣΗ</u> (α) Λάθος. Για ένα αντιπαράδειγμα, θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Άρα, $A^2 = I_2$. Όμως, $A \neq I_2$ και $A \neq -I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(β) Λάθος. Θεωρούμε τον πίνακα A στη λύση του (α).
Έχουμε: $A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A \neq I_2$.

(γ) Σωστό. Αποδεικνύουμε τη πρόταση με επαγωγή. Δηλαδή, με υπόθεση ότι $A^2 = I_n$, θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι $A^{2k} = I_n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Για $k = 1$, έχουμε $A^{2\cdot 1} = A^2 = I_n$ (η δεύτερη ισότητα είναι αληθής λόγω υπόθεσης).

Υποθέτουμε ότι $A^{2k} = I_n$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και θα αποδείξουμε ότι $A^{2(k+1)} = I_n$.

Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
A^{2(k+1)} &= A^{2k+2} \\
&= A^{2k+1} \cdot A \\
&= (A^{2k} \cdot A) \cdot A \\
&= A^{2k} \cdot (A \cdot A) \quad \text{] Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων} \\
&= A^{2k} \cdot A^2 \\
&= I_n \cdot A^2 \quad \text{] Υπόθεση Επαγωγής ότι } A^{2k} = I_n \\
&= A^2 \\
&= I_n \quad \text{] Υπόθεση άσκησης}
\end{aligned}
$$

Άρα, $A^{2(k+1)} = I_n$. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και τη λύση. $\square$

5) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $A^2 = A$ και $B^2 = B$. Να αποδείξετε ότι

$$(A+B)^2 = A+B \iff AB = BA = O_n .$$

<u>ΛΥΣΗ</u> ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $(A+B)^2 = A+B$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 = (A+B)(A+B) &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ &= A + AB + BA + B,\end{aligned}$$

διότι από την υπόθεση έχουμε $A^2 = A$ και $B^2 = B$.

Άρα,

$$\begin{aligned}(A+B)^2 = A+B &\Rightarrow A + AB + BA + B = A+B \\ &\Rightarrow AB + BA = O_n \qquad (1)\end{aligned}$$

Από την (1) έχουμε

$$A(AB+BA) = A \cdot O_n \quad \text{και} \quad (AB+BA)A = O_n \cdot A$$

$$\Rightarrow A^2B + ABA = O_n \quad \text{και} \quad ABA + BA^2 = O_n$$

$$\Rightarrow AB + ABA = O_n \quad \text{και} \quad ABA + BA = O_n$$

$$\Rightarrow \quad AB + ABA = ABA + BA$$

$$\Rightarrow \quad ABA + AB = ABA + BA$$

$$\Rightarrow \quad AB = BA \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε τα ακόλουθα:

$$AB + AB = O_n \quad \text{και} \quad BA + BA = O_n$$

$$\Rightarrow \quad 2AB = O_n \quad \text{και} \quad 2BA = O_n$$

$$\Rightarrow \quad AB = O_n \quad \text{και} \quad BA = O_n$$

$$\Rightarrow \quad AB = BA = O_n .$$

($\Leftarrow$) Αφήνεται ως απλή άσκηση για τον αναγνώστη. $\square$

6) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και έστω

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα A^n για $n \in \mathbb{N}$.

ΛΥΣΗ Έχουμε:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 \end{pmatrix}.$$

Από τις μορφές των πινάκων A^2 και A^3, ισχυριζόμαστε ότι

$$(*) \qquad A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας εργαζόμαστε με επαγωγή.

Για $n=1$, $\begin{pmatrix} \alpha^1 & 1\cdot\alpha^{1-1} \\ 0 & \alpha^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = A = A^1.$

Επίσης, είδαμε παραπάνω ότι η $(*)$ είναι αληθής για $n=2$ και $n=3$.

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για τον φυσικό $n+1$.

Δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^{n} \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} A^{n+1} &= A^{n} \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} a^{n} & n\cdot a^{n-1} \\ 0 & a^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{aligned}\right] \text{Υπόθεση Επαγωγής}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n}\cdot a + n a^{n-1}\cdot 0 & a^{n}\cdot 1 + n\cdot a^{n-1}\cdot a \\ 0\cdot a + a^{n}\cdot 0 & 0\cdot 1 + a^{n}\cdot a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^{n} \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Άρα, $A^{n} = \begin{pmatrix} a^{n} & n a^{n-1} \\ 0 & a^{n} \end{pmatrix}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

7) Έστω $A, B \in M_k(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $AB - BA = I_k$.

Να αποδείξετε ότι

$$A^{n+1}B - BA^{n+1} = (n+1)A^n \qquad (*)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Θα αποδείξουμε τη ζητούμενη σχέση με επαγωγή στο n. Για τη βάση της επαγωγής, δηλαδή για $n=1$, πρέπει να αποδείξουμε ότι $A^2B - BA^2 = 2A$. Έχουμε:

$$AB - BA = I_k \quad (\text{υπόθεση άσκησης})$$

$$\Rightarrow \quad A(AB - BA) = A \cdot I_k \text{ και } (AB - BA)A = I_k \cdot A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2B - ABA = A, \\ ABA - BA^2 = A. \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε $A^2B - BA^2 = 2A$, όπως απαιτούνταν.

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για τον φυσικό $n+1$.

Δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι

$$A^{n+2}B - BA^{n+2} = (n+2)A^{n+1}.$$

Έχουμε:

$$A^{n+1}B - BA^{n+1} = (n+1)A^{n} \quad \text{(υπόθεση επαγωγής)}$$

$$\Rightarrow A\left(A^{n+1}B - BA^{n+1}\right) = A\left[(n+1)A^{n}\right]$$

$$\Rightarrow A\left(A^{n+1}B\right) - A\left(BA^{n+1}\right) = (n+1)\left(A\cdot A^{n}\right)$$

$$\Rightarrow \left(A\cdot A^{n+1}\right)B - (AB)A^{n+1} = (n+1)A^{n+1}$$

$$\Rightarrow A^{n+2}B - (BA+I_k)A^{n+1} = (n+1)A^{n+1}$$

($AB = BA + I_k$ λόγω της υπόθεσης της άσκησης ότι $AB - BA = I_k$)

$$\Rightarrow A^{n+2}B - (BA)\cdot A^{n+1} - A^{n+1} = (n+1)A^{n+1}$$

$$\Rightarrow A^{n+2}B - BA^{n+2} = A^{n+1} + (n+1)A^{n+1}$$

$$\Rightarrow A^{n+2}B - BA^{n+2} = (n+2)A^{n+1}.$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και τη λύση. □

8) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(α) Να αποδείξετε ότι

$$A^{n+2} - A^{n} = A^{2} - I_3 \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(β) Να υπολογιστεί ο πίνακας A^{1000}.

ΛΥΣΗ (α) Θα αποδείξουμε τη ζητούμενη ισότητα με επαγωγή στο n. Για $n=1$, πρέπει να δείξουμε ότι $A^3 - A = A^2 - I_3$. Έχουμε:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι $A^3 - A = A^2 - I_3$, όπως το θέλαμε.

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι

$$A^{n+2} - A^n = A^2 - I_3$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και θα δείξουμε ότι

$$A^{(n+1)+2} - A^{n+1} = A^2 - I_3$$

ή

$$A^{n+3} - A^{n+1} = A^2 - I_3 .$$

Έχουμε:

$$A^{n+3} - A^{n+1} = A\left(\underbrace{A^{n+2} - A^n}\right) = A\left(\underbrace{A^2 - I_3}\right)$$

υπόθεση επαγωγής

$$= A^3 - A$$

$$= A^2 - I_3$$

βάση επαγωγής

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

(β) Από τη σχέση $A^{n+2} - A^{n} = A^{2} - I_3$ $(n \in \mathbb{N})$ έχουμε:

$$A^{1000} - A^{998} = A^{2} - I_3$$

$$A^{998} - A^{996} = A^{2} - I_3$$

$$A^{996} - A^{994} = A^{2} - I_3$$

$$\vdots$$

$$A^{6} - A^{4} = A^{2} - I_3$$

$$A^{4} - A^{2} = A^{2} - I_3$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$A^{1000} - A^{2} = 499\,(A^{2} - I_3)$$

$$\Rightarrow A^{1000} = A^{2} + 499\,(A^{2} - I_3)$$

$$\Rightarrow A^{1000} = 500A^{2} - 499I_3.$$

Άρα,

$$A^{1000} = 500\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 499\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -500 & 1 & 0 \\ 1500 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

9) Έστω $AX = B$ ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους επί του $\mathbb{R}$. Αν s είναι λύση του συστήματος $AX = B$ (το s είναι n-άδα στήλη και $A \cdot s = B$), τότε να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων του $AX = B$ είναι το σύνολο

$$T = \{ s + u : u \text{ είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος } AX = 0 \}.$$

Με βάση το παραπάνω, να αποδείξετε ότι αν ένα γραμμικό σύστημα επί του $\mathbb{R}$ έχει περισσότερο από μια λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

<u>ΛΥΣΗ</u> Για τον πρώτο ισχυρισμό της άσκησης, έστω s λύση του $AX = B$ και έστω Σ το σύνολο λύσεων του $AX = B$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\Sigma = T$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Sigma \subseteq T$ και $T \subseteq \Sigma$.

<u>Για το $\Sigma \subseteq T$</u>: Έστω $t \in \Sigma$ (δηλαδή, το t είναι λύση του $AX = B$). Τότε

$$A \cdot t = B.$$

Έχουμε ότι $t = s + (t - s)$ και ισχυριζόμαστε ότι το $t - s$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος $AX = 0$.

Πράγματι,

$$A(t-s) = A\cdot t - A\cdot s = B - B = 0$$

(• $At = B$, διότι επιλέξαμε το t μέσα από το σύνολο λύσεων Σ του $AX = B$.

• $As = B$, διότι s είναι, εξ' υποθέσεως, λύση του $AX=B$)

Άρα, $t-s$ είναι λύση του $AX=0$ και συνεπώς

$$t = s + (t-s) \in \{s+u : u \text{ λύση του ομογενούς συστήματος } AX=0\} = T.$$

Επομένως, $t \in T$, και συνεπώς $\Sigma \subseteq T$.

<u>Για το $T \subseteq \Sigma$:</u> Έστω $w \in T$. Τότε

$$w = s + u$$

για κάποια λύση u του ομογενούς συστήματος $AX=0$. Θα αποδείξουμε ότι $w \in \Sigma$. Προς τούτο, πρέπει να αποδείξουμε ότι $Aw = B$. Έχουμε:

$$A\cdot w = A\cdot(s+u) = \overbrace{A\cdot s + A\cdot u = B}^{s \text{ λύση του } AX=B} + 0 = B$$

u λύση του $AX=0$

Άρα, $Aw = B$. Συνεπώς $w \in \Sigma$, οπότε $T \subseteq \Sigma$.

Από τις σχέσεις $\Sigma \subseteq T$ και $T \subseteq \Sigma$ παίρνουμε $\Sigma = T$ που ήταν το ζητούμενο.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό της άσκησης, έστω $AX = B$ (όπου $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$) ένα γραμμικό σύστημα, το οποίο έχει τουλάχιστον δύο λύσεις, έστω s_1 και s_2, $s_1 \neq s_2$.

Από τον πρώτο ισχυρισμό της άσκησης έχουμε ότι

$$s_2 = s_1 + u$$

για κάποιο u το οποίο είναι λύση του ομογενούς συστήματος $AX = 0$. Εφόσον $s_1 \neq s_2$, έχουμε ότι

$$u \neq 0.$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$s_{k+1} = s_1 + k \cdot u$$

Ισχυριζόμαστε ότι το s_{k+1} είναι λύση του $AX = B$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Πράγματι, για $k \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A \cdot s_{k+1} = A \cdot (s_1 + k \cdot u) = A \cdot s_1 + A(k \cdot u) &= A \cdot s_1 + k(A \cdot u) \\ &= B + k \cdot 0 \\ &= B \end{aligned}$$

Άρα, $A \cdot s_{k+1} = B$ και συνεπώς το s_{k+1} είναι λύση του $AX = B$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$M = \{s_{k+1} : k \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{s_2, s_3, s_4, s_5, \ldots\}$$

$$= \{s_1 + u, s_1 + 2u, s_1 + 3u, s_1 + 4u, \ldots\}$$

Όπως δείξαμε παραπάνω, κάθε στοιχείο του M είναι λύση του συστήματος $AX = B$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του ισχυρισμού, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο M είναι άπειρο.

Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή υποθέτουμε ότι το M είναι πεπερασμένο. Τότε

$$M = \{s_1 + k_1 u, s_1 + k_2 u, \ldots, s_1 + k_\lambda \cdot u\}, \quad (*)$$

όπου $k_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \ldots, \lambda)$ και $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_\lambda$. Θεωρούμε τον φυσικό $k_\lambda + 1$. Τότε $k_\lambda < k_\lambda + 1$, οπότε

$$k_i < k_\lambda + 1, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, \lambda. \quad (**)$$

Το $s_{k_\lambda+2} = s_{(k_\lambda+1)+1} = s_1 + (k_\lambda + 1)u$ ανήκει στο M, άρα $s_{k_\lambda+2} = s_1 + k_i u$ για κάποιο i με $1 \leq i \leq \lambda$ (βλ. $(*)$).

Άρα,

$$s_1 + (k_\lambda + 1) \cdot u = s_1 + k_i \cdot u$$

$$\Rightarrow \left(k_\lambda + 1 - k_i\right) u = 0$$

$$\Rightarrow u = 0 \quad (\text{διότι λόγω της } (**),\ k_\lambda + 1 \neq k_i)$$

Η τελευταία σχέση όμως έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι $u \neq 0$. Άρα, το M είναι άπειρο σύνολο και συνεπώς το σύστημα $AX = B$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων. $\square$

ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ο πίνακας A λέγεται αντιστρέψιμος (ή μη ιδιάζων) αν υπάρχει πίνακας $B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Στη περίπτωση αυτή, ο πίνακας B καλείται αντίστροφος του A. Αν ο A δεν έχει αντίστροφο (δηλαδή, αν $\nexists B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $AB = BA = I_n$), τότε ο A λέγεται μη αντιστρέψιμος (ή ιδιάζων)

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Αν ο A έχει αντίστροφο, τότε αυτός είναι μοναδικός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $B, \Gamma \in M_n(\mathbb{R})$ αντίστροφοι του A. Θα αποδείξουμε ότι $B = \Gamma$. Εφόσον B, Γ είναι αντίστροφοι του A έχουμε ότι

$$AB = BA = I_n \qquad (1)$$

και

$$A\Gamma = \Gamma A = I_n \qquad (2)$$

Τώρα,

$$B = B \cdot I_n \overset{(2)}{=} B(A\Gamma) \overset{\text{προσεταιριστική}}{=} (BA)\Gamma \overset{(1)}{=} I_n \cdot \Gamma = \Gamma.$$

Άρα, $B = \Gamma$. $\square$

<u>Συμβολισμός</u> Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος, τότε συμβολίζουμε τον μοναδικό αντίστροφο του A με A^{-1}.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος πίνακας και έστω $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$A^{-k} = (A^{-1})^k$$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο I_n είναι αντιστρέψιμος και $(I_n)^{-1} = I_n$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> (α) Αφού ο A αντιστρέψιμος, ισχύει ότι

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Άρα, ο A^{-1} αντιστρέψιμος (βλ. Ορισμό) και ο A είναι αντίστροφος του A^{-1}. Από την μοναδικότητα του αντιστρόφου, έχουμε $(A^{-1})^{-1} = A$.

(β) Για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $I_n \cdot I_n = I_n$. Άρα, ο I_n είναι αντιστρέψιμος και ο I_n είναι αντίστροφος του I_n. Από τη μοναδικότητα του αντιστρόφου, έχουμε $(I_n)^{-1} = I_n$. $\square$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ δύο αντιστρέψιμοι πίνακες. Τότε το γινόμενο AB είναι αντιστρέψιμος πίνακας και

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Θα αποδείξουμε ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n.$$

Τότε θα έχουμε ότι ο AB είναι αντιστρέψιμος και ο $B^{-1}A^{-1}$ είναι αντίστροφος του AB. Οπότε από την μοναδικότητα του αντιστρόφου θα πάρουμε ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= [(AB)\cdot B^{-1}]\cdot A^{-1} \quad (\text{Προσεταιριστική})\\
&= [A(B\cdot B^{-1})]\cdot A^{-1} \quad (\text{Προσεταιριστική})\\
&= (A\cdot I_n)A^{-1}\\
&= AA^{-1}\\
&= I_n
\end{aligned}
$$

Παρόμοια, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(B^{-1}A^{-1})(AB) &= [(B^{-1}A^{-1})A]B \quad (\text{Προσεταιριστική})\\
&= [B^{-1}(A^{-1}A)]B \quad (\text{Προσεταιριστική})\\
&= (B^{-1}I_n)B\\
&= B^{-1}B\\
&= I_n.
\end{aligned}
$$

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την απόδειξη. □

ΠΟΡΙΣΜΑ Αν $A_1, A_2, \dots, A_k$ είναι $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες με στοιχεία στο $\mathbb{R}$, τότε το γινόμενο $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας και

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k)^{-1} = (A_k)^{-1} \cdot \dots \cdot (A_2)^{-1} \cdot (A_1)^{-1}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αποδεικνύουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο k. Για $k=1$, η πρόταση είναι προφανής.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για τον φυσικό k, δηλαδή αν οι πίνακες $A_1, A_2, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε το γινόμενο $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας και $(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k)^{-1} = (A_k)^{-1} \cdot \dots \cdot (A_2)^{-1} (A_1)^{-1}$.

Θα αποδείξουμε την πρόταση για τον $k+1$.

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1} \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμοι.

Έχουμε $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k \cdot A_{k+1} = (A_1 A_2 \dots A_k) A_{k+1}$.

Από την υπόθεση της επαγωγής, το γινόμενο $A_1 A_2 \dots A_k$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, και από την προηγούμενη πρόταση, το γινόμενο $(A_1 A_2 \dots A_k) A_{k+1}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Άρα, ο πίνακας $A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}$ είναι αντιστρέψιμος.

Επίσης, έχουμε:

$$\left(A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}\right)^{-1} = \left[(A_1 A_2 \dots A_k) A_{k+1}\right]^{-1}$$

(από τη προηγούμενη Πρόταση) $\longleftarrow \; = (A_{k+1})^{-1} (A_1 A_2 \dots A_k)^{-1}$

(από την υπόθεση της επαγωγής) $\longleftarrow \; = (A_{k+1})^{-1} (A_k)^{-1} \cdots (A_2)^{-1} (A_1)^{-1}$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη του πορίσματος. $\square$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος και έστω $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Τότε ο πίνακας kA είναι αντιστρέψιμος και

$$(kA)^{-1} = k^{-1} A^{-1}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Θα αποδείξουμε ότι

$$(kA)(k^{-1}A^{-1}) = (k^{-1}A^{-1})(kA) = I_n.$$

Οπότε θα έχουμε ότι ο kA είναι αντιστρέψιμος και ότι ο $k^{-1}A^{-1}$ είναι αντίστροφος του kA. Από την μοναδικότητα του αντιστρόφου θα πάρουμε ότι $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

Έχουμε (από τις ιδιότητες του πολ/σμού πινάκων και βαθμωτού πολ.):

$$(kA)(k^{-1}A^{-1}) = A\left[k(k^{-1}A^{-1})\right] = A\left[(kk^{-1})A^{-1}\right] = A(1 \cdot A^{-1})$$
$$= AA^{-1} = I_n.$$

Παρόμοια, $(k^{-1}A^{-1})(kA) = I_n$.

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την απόδειξη. $\square$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u> Αν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι το άθροισμα $A+B$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

Πράγματι, έστω

$$A = I_2 \quad \text{και} \quad B = -I_2 .$$

Από προηγούμενες προτάσεις έχουμε ότι οι A και B είναι αντιστρέψιμοι. Όμως, $A+B = O_2$ και ο πίνακας O_2 δεν είναι αντιστρέψιμος (αφού για οποιοδήποτε $Y \in M_2(\mathbb{R})$, $O_2 \cdot Y = O_2$).

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε

$$A^2 - A + I_n = O_n .$$

Να αποδείξετε ότι οι πίνακες A και $A - 2I_n$ είναι αντιστρέψιμοι.

ΛΥΣΗ Έχουμε:

$$A^2 - A + I_n = O_n$$

$$\Rightarrow A^2 - A = -I_n$$

$$\Rightarrow A - A^2 = I_n. \quad (*)$$

Εφόσον $A - A^2 = A(I_n - A)$ και $A - A^2 = (I_n - A)A$, από την (*) παίρνουμε ότι

$$A(I_n - A) = I_n = (I_n - A)A$$

Άρα, ο A είναι αντιστρέψιμος (και $A^{-1} = I_n - A$).

Για τον πίνακα $A - 2I_n$: Θέτουμε

$$B = A - 2I_n.$$

οπότε $A = B + 2I_n$. Έχουμε:

$$A^2 - A + I_n = O_n$$

$$\Rightarrow (B + 2I_n)^2 - (B + 2I_n) + I_n = O_n$$

$$\Rightarrow (B + 2I_n) - (B + 2I_n)^2 = I_n$$

$$\Rightarrow (B + 2I_n)\left[I_n - (B + 2I_n)\right] = I_n$$

$$\Rightarrow (B+2I_n)(-I_n-B) = I_n$$

$$\Rightarrow -B-B^2-2I_n-2B = I_n$$

$$\Rightarrow -B^2-3B = 3I_n$$

$$\Rightarrow -(B^2+3B) = 3I_n \qquad (**)$$

Επειδή $B^2+3B = B(B+3I_n)$ και

$B^2+3B = (B+3I_n)B$, από την $(**)$ έπεται ότι

$$-B(B+3I_n) = 3I_n \text{ και } -(B+3I_n)B = 3I_n$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}[B(B+3I_n)] = I_n \text{ και } -\frac{1}{3}[(B+3I_n)B] = I_n$$

$$\Rightarrow B\left[-\frac{1}{3}(B+3I_n)\right] = I_n \text{ και } \left[-\frac{1}{3}(B+3I_n)\right]B = I_n$$

Άρα, ο B είναι αντιστρέψιμος, και συνεπώς ο $A-2I_n$ είναι αντιστρέψιμος. □