ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ I

ΜΑΘΗΜΑ 3

19/10/2020

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Για απλότητα, υποθέτουμε ότι όλες οι εξισώσεις σε αυτό το κεφάλαιο είναι επί του $\mathbb{R}$. Τονίζουμε όμως ιδιαίτερα ότι τα αποτελέσματα και οι τεχνικές ισχύουν επίσης για εξισώσεις επί του συνόλου $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Κάθε έκφραση της μορφής

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = b \qquad (1)$$

όπου τα $\alpha_i, b \in \mathbb{R}$ και τα x_i είναι <u>άγνωστοι</u>, λέγεται <u>γραμμική εξίσωση επί του $\mathbb{R}$</u>.

Οι αριθμοί α_i λέγονται <u>συντελεστές</u> των x_i αντίστοιχα, και ο b λέγεται <u>σταθερός όρος</u> ή απλά <u>σταθερά</u> της εξίσωσης. Μια n-άδα πραγματικών αριθμών, $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, λέγεται <u>λύση της εξίσωσης (1)</u> αν η σχέση που προκύπτει από την (1) αντικαθιστώντας τα x_i από τα k_i (δηλ., θέτοντας $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots$)

$$\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \ldots + \alpha_n k_n = b$$

είναι αληθής.

Λέμε επίσης τότε η n-άδα $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ικανοποιεί (ή επαληθεύει) την εξίσωση.

Παράδειγμα Θεωρούμε την γραμμική εξίσωση

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 3.$$

Η 4-άδα $(3, 2, 1, 0)$ είναι μια λύση της εξίσωσης εφόσον

$$3 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 0 = 3 \quad \text{ή} \quad 3 = 3$$

είναι μια αληθής πρόταση.

Η 4-άδα $(1, 2, 4, 5)$ δεν είναι λύση της εξίσωσης εφόσον

$$1 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 5 = 3 \quad \text{ή} \quad -6 = 3$$

δεν είναι αληθής πρόταση. □

Είναι εύκολο να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης (1) (αν υπάρχουν). Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις.

<u>Περίπτωση (1)</u> : Κάποιος από τους συντελεστές στην (1) δεν είναι μηδέν, ας πούμε $\alpha_1 \neq 0$. Τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση ως εξής

$$\alpha_1 x_1 = b - \alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_n x_n \quad \text{ή} \quad x_1 = \alpha_1^{-1} b - \alpha_1^{-1} \alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_1^{-1} \alpha_n x_n$$

Δίνοντας αυθαίρετες τιμές στους αγνώστους $x_2, \dots, x_n$, παίρνουμε μια τιμή για το x_1. Οι τιμές αυτές σχηματίζουν μια λύση της εξίσωσης. Επιπλέον, κάθε λύση της εξίσωσης μπορεί να βρεθεί με αυτόν τον τρόπο. Σημειώστε ιδιαίτερα ότι η γραμμική εξίσωση με έναν άγνωστο,

$$\alpha x = b \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

έχει μοναδική λύση την $x = \alpha^{-1} b$.

<u>Παράδειγμα</u> Θεωρούμε την εξίσωση $2x_1 - 4x_2 + x_3 = 8$.

Ξαναγράφουμε την εξίσωση ως

$$2x_1 = 8 + 4x_2 - x_3 \quad \text{ή} \quad x_1 = 4 + 2x_2 - \tfrac{1}{2} x_3 .$$

Οποιαδήποτε τιμή για τα x_2 και x_3 παράγει μια τιμή για το x_1, και οι τρεις τιμές αποτελούν μια λύση της εξίσωσης. Για παράδειγμα, έστω $x_2 = 3$ και $x_3 = 2$, τότε $x_1 = 4 + 2 \cdot 3 - \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 9$.

Η 3-άδα $(9, 3, 2)$ είναι μια λύση της εξίσωσης.

Περίπτωση (2): όλοι οι συντελεστές στην (1) είναι μηδέν, αλλά ο σταθερός όρος δεν είναι μηδέν. Δηλαδή, η εξίσωση είναι της μορφής

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b, \text{ με } b \neq 0$$

Τότε η εξίσωση δεν έχει λύσεις.

Περίπτωση (3): όλοι οι συντελεστές στην (1) είναι μηδέν, και ο σταθερός όρος είναι επίσης μηδέν. Δηλαδή, η εξίσωση είναι της μορφής

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$$

Τότε κάθε n-άδα πραγματικών αριθμών είναι μια λύση της εξίσωσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια συλλογή m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

όπου $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ και $b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$, καλείται γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους επί του $\mathbb{R}$.

Ο $m \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

λέγεται πίνακας των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος.

Ο $n \times 1$ πίνακας

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

λέγεται <u>πίνακας των αγνώστων</u> του συστήματος.

Ο $m \times 1$ πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

λέγεται <u>πίνακας των σταθερών όρων του συστήματος.</u>

Ο $m \times (n+1)$ πίνακας

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

λέγεται <u>επαυξημένος πίνακας</u> του συστήματος.

Το σύστημα (∗) γράφεται σε συντετμημένη μορφή ως εξής:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

(1) Μια n-άδα πραγματικών αριθμών $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ η οποία ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις στο σύστημα (*) καλείται λύση του συστήματος.

(2) Το σύστημα (*) καλείται συμβιβαστό αν έχει τουλάχιστον μια λύση. Διαφορετικά (δηλαδή, αν το σύστημα δεν έχει λύση), το σύστημα καλείται αδύνατο.

(3) Το σύστημα (*) καλείται ομογενές αν οι σταθεροί όροι $b_1, b_2, \ldots, b_m$ είναι όλοι μηδέν.
Η n-άδα $(0, 0, \ldots, 0)$ είναι λύση ενός ομογενούς συστήματος (m εξισώσεων με n αγνώστους). Καλείται τετριμμένη λύση ενός ομογενούς συστήματος.

[Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι κάθε ομογενές σύστημα είναι συμβιβαστό.]

(4) Δύο γραμμικά συστήματα m εξισώσεων με n αγνώστους καλούνται ισοδύναμα αν κάθε λύση του ενός συστήματος είναι μια λύση του άλλου συστήματος και αντίστροφα (με άλλα λόγια, δύο γραμμικά συστήματα m εξισώσεων με n αγνώστους είναι ισοδύναμα αν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις).

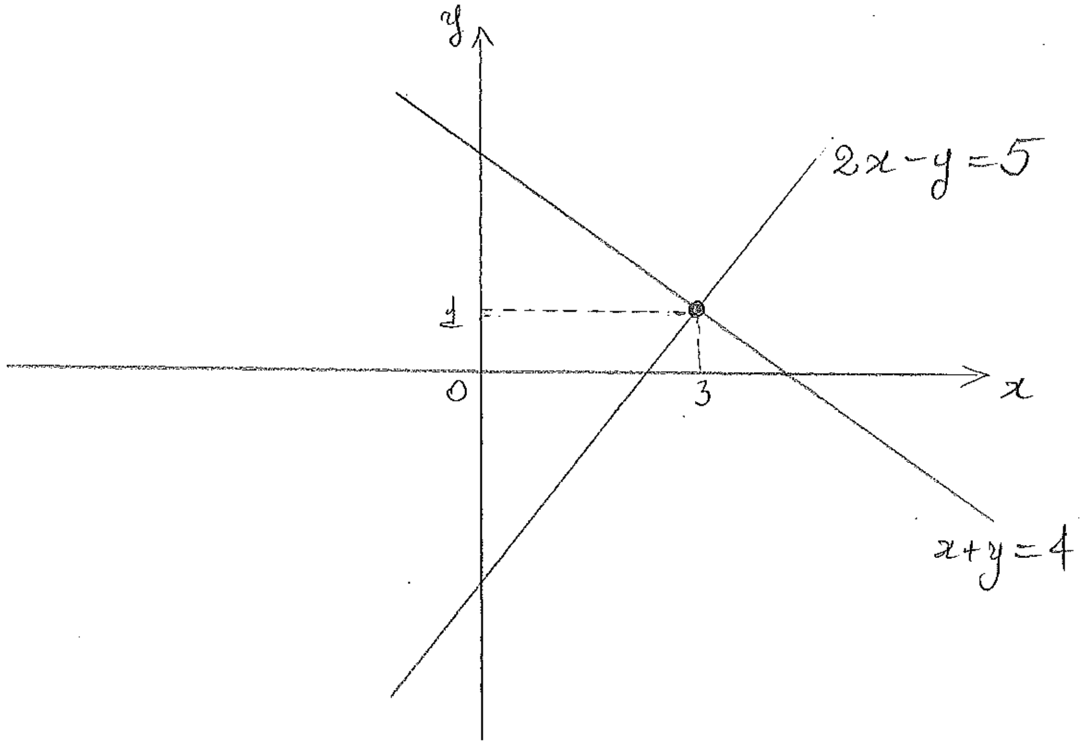
<u>Παράδειγμα</u> Οι παρακάτω δύο εξισώσεις αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα με δύο αγνώστους x και y.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, ο πίνακας των αγνώστων είναι ο $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ και ο πίνακας των σταθερών όρων είναι ο $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο $(A \mid B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$.

Το πρόβλημα της επίλυσης του παραπάνω συστήματος έχει μια γεωμετρική ερμηνεία. Κάθε μια από τις εξισώσεις του συστήματος ορίζει μια ευθεία στο επίπεδο. Επομένως, για να λύσουμε το σύστημα (δηλαδή, για να βρούμε όλα τα ζεύγη (s, r) πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν τις δύο εξισώσεις) πρέπει να βρούμε το σημείο τομής των δύο ευθειών (αν αυτές τέμνονται).
Οι δύο ευθείες δεν είναι ούτε παράλληλες ούτε ταυτόσημες, συνεπώς υπάρχει ένα μοναδικό σημείο τομής.

Είναι εύκολο να δούμε ότι το ζεύγος $(3, 1)$ είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών (για παράδειγμα, προσθέτοντας την $1^{η}$ εξίσωση στη $2^{η}$, εύκολα παίρνουμε ότι $x = 3$, και μετά αντικαθιστώντας αυτή τη τιμή του x στη $1^{η}$ εξίσωση βρίσκουμε ότι $y = 1$).



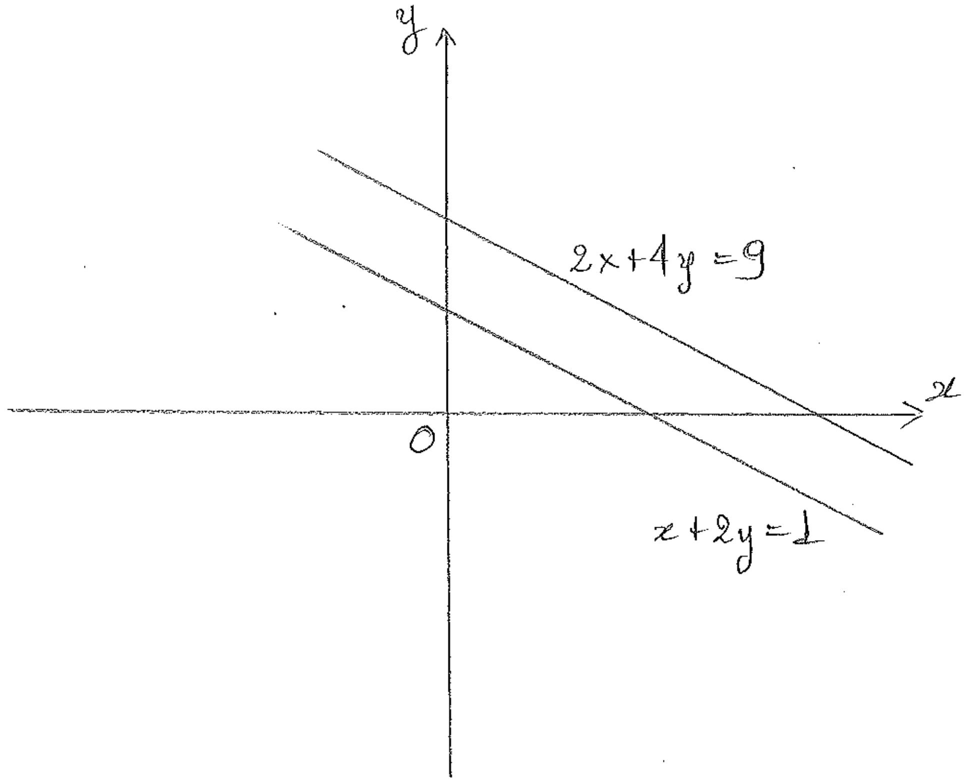
Ας θεωρήσουμε τώρα το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 4y = 9 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό είναι αδύνατο: Πολλαπλασιάζοντας τη $2^{η}$ εξίσωση επί 2, παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 4y = 9 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό, και είναι αδύνατο (δεν υπάρχουν x και y που να ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις, αφού $9 \neq 2$). Άρα, και το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.



Ας θεωρήσουμε τώρα το σύστημα

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+6y=9 \end{cases}$$

Οι δύο εξισώσεις είναι διαφορετικές, αλλά στην ουσία αναπαριστούν την ίδια ευθεία. Πράγματι, η 2η εξίσωση είναι ένα πολλαπλάσιο της πρώτης. Είναι σαφές ότι κάθε σημείο της ευθείας είναι λύση του συστήματος. Επομένως, το παραπάνω σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω δύο γραμμικά συστήματα m εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$ επί του $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

και

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \ldots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (**)$$

Αν ο επαυξημένος πίνακας $(A' \mid B') = (a'_{ij} \mid b'_i)$ του συστήματος $(**)$ προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα $(A \mid B) = (a_{ij} \mid b_i)$ του συστήματος $(*)$ εφαρμόζοντας έναν στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών, τότε τα συστήματα $(*)$ και $(**)$ είναι ισοδύναμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Με βάση την υπόθεση του θεωρήματος, ο πίνακας $(A' \mid B')$ προκύπτει από τον $(A \mid B)$ εφαρμόζοντας είτε (1) $r_i \to a \cdot r_i$ $(a \neq 0)$ είτε (2) $r_i \to r_i + a \cdot r_j$ είτε (3) $r_i \leftrightarrow r_j$.

Σε οποιαδήποτε από τις περιπτώσεις (1) και (2), ο $(A'|B')$ διαφέρει από τον $(A|B)$ μόνον στην i-γραμμή. Συνεπώς, σε οποιαδήποτε από τις περιπτώσεις (1) και (2), το σύστημα (**) διαφέρει από το (*) μόνον στην i-εξίσωση.

(1) Έστω $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ λύση του (*). Με βάση τη παραπάνω παρατήρηση, για να δείξουμε ότι η n-άδα $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ είναι λύση του (**), αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιεί την i-εξίσωση του (**), δηλαδή, την εξίσωση $\alpha \cdot a_{i1} x_1 + \alpha \cdot a_{i2} x_2 + \dots + \alpha \cdot a_{in} x_n = \alpha \cdot b_i$.

Έχουμε:

$$\alpha \cdot a_{i1} s_1 + \alpha \cdot a_{i2} s_2 + \dots + \alpha \cdot a_{in} s_n =$$

$$= \alpha \cdot (a_{i1} s_1 + a_{i2} s_2 + \dots + a_{in} s_n)$$

$$= \alpha \cdot b_i$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι εφόσον η n-άδα $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις του (*) (ως λύση του (*)), ικανοποιεί και την i-εξίσωση του (*), δηλαδή την $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i$. Οπότε, $a_{i1} s_1 + a_{i2} s_2 + \dots + a_{in} s_n = b_i$.

Αντίστροφα, έστω ότι $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ είναι λύση του (**) (και άρα ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις του (**)). Θα δείξουμε ότι $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ είναι λύση του (*). Όπως προηγουμένως, αρκεί να δείξουμε ότι η $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ικανοποιεί την i-εξίσωση του (*).

Έχουμε:

$$\alpha_{i1}s_1 + \alpha_{i2}s_2 + \dots + \alpha_{in}s_n =$$

$$\overset{\circledast}{=} \frac{1}{\alpha}\left(\alpha \cdot \alpha_{i1}s_1 + \alpha \cdot \alpha_{i2}s_2 + \dots + \alpha \cdot \alpha_{in}s_n\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\alpha \cdot b_i\right)$$

$$= b_i .$$

Η προτελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ικανοποιεί την i-εξίσωση του (**), δηλ. την $\alpha \cdot \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha \cdot \alpha_{in}x_n = b_i$, αφού είναι λύση του (**).

Από τα παραπάνω έπεται ότι τα συστήματα (*) και (**) είναι ισοδύναμα.

⊛ Θυμηθείτε ότι $\alpha \neq 0$.

(2) Έστω ότι η n-άδα $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ είναι λύση του $(*)$. Θα δείξουμε ότι η $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ικανοποιεί την i-εξίσωση του $(**)$, οπότε όπως παραπάνω θα έχουμε ότι η $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ είναι μια λύση του $(**)$. Η i-εξίσωση του $(**)$ είναι

$$(\alpha_{i1} + \alpha \cdot \alpha_{j1}) x_1 + (\alpha_{i2} + \alpha \cdot \alpha_{j2}) x_2 + \cdots + (\alpha_{in} + \alpha \cdot \alpha_{jn}) x_n = b_i + \alpha b_j$$

Έχουμε:

$$(\alpha_{i1} + \alpha \cdot \alpha_{j1}) s_1 + (\alpha_{i2} + \alpha \cdot \alpha_{j2}) s_2 + \cdots + (\alpha_{in} + \alpha \cdot \alpha_{jn}) s_n =$$

$$= (\alpha_{i1} s_1 + \alpha_{i2} s_2 + \cdots + \alpha_{in} s_n) + \alpha \cdot (\alpha_{j1} s_1 + \alpha_{j2} s_2 + \cdots + \alpha_{jn} s_n)$$

$$= b_i + \alpha \cdot b_j$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ικανοποιεί τις i- και j-εξισώσεις του $(*)$, δηλαδή τις εξισώσεις $\alpha_{i1} x_1 + \cdots + \alpha_{in} x_n = b_i$ και $\alpha_{j1} x_1 + \cdots + \alpha_{jn} x_n = b_j$, αφού υποθέσαμε ότι είναι λύση του $(*)$.

Αντίστροφα, έστω ότι η $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ είναι λύση του $(**)$. Θα δείξουμε ότι η $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ικανοποιεί την i-εξίσωση του $(*)$ (οπότε θα έχουμε ότι είναι λύση του $(*)$).

Έχουμε:

$$\alpha_{i1}s_1 + \alpha_{i2}s_2 + \dots + \alpha_{in}s_n =$$

$$= \left[(\alpha_{i1}+\alpha\cdot\alpha_{j1})s_1 + (\alpha_{i2}+\alpha\cdot\alpha_{j2})s_2 + \dots + (\alpha_{in}+\alpha\cdot\alpha_{jn})s_n\right] -$$

$$- \alpha\cdot(\alpha_{j1}s_1 + \alpha_{j2}s_2 + \dots + \alpha_{jn}s_n)$$

$$= (b_i + \alpha\cdot b_j) - \alpha\cdot b_j$$

$$= b_i$$

Η προτελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ικανοποιεί τις i- και j-εξισώσεις του $(**)$, ως λύση του $(**)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα συστήματα $(*)$ και $(**)$ είναι ισοδύναμα.

(3) Στη περίπτωση αυτή, εφόσον ο $(A'|B')$ προκύπτει από τον $(A|B)$ εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $r_i \leftrightarrow r_j$, η i-εξίσωση του $(**)$ είναι η j-εξίσωση του $(*)$, η j-εξίσωση του $(**)$ είναι η i-εξίσωση του $(*)$, και όλες οι υπόλοιπες εξισώσεις του $(**)$ είναι ίδιες με τις αντίστοιχες εξισώσεις του $(*)$.

Είναι λοιπόν άμεσο ότι τα συστήματα $(*)$ και $(**)$ είναι ισοδύναμα.

Εφόσον οι περιπτώσεις (1) – (3) είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις (διότι υπάρχουν ακριβώς τρεις τύποι στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών), από όλα τα παραπάνω παίρνουμε ότι τα συστήματα (*) και (**) είναι ισοδύναμα.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 1</u> Έστω ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$ επί του $\mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

με επαυξημένο πίνακα $(A|B) = (\alpha_{ij} | b_i)$.

Αν $(R|S) = (r_{ij}|s_i)$ είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του $(A|B)$(*), τότε τα συστήματα $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ και $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j = s_i$ $(i = 1, \ldots, m)$

είναι ισοδύναμα.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Από το Θεώρημα που αφορά στη μέθοδο απαλοιφής των Gauss – Jordan, έχουμε ότι ο $(R|S)$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $(A|B)$, και συνεπώς προκύπτει από τον $(A|B)$ εφαρμόζοντας μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών

(*) Οπότε ο R είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του A.

μετασχηματισμών γραμμών. Έστω ότι

$$(A|B) \xrightarrow{e_1} (A_1|B_1) \xrightarrow{e_2} (A_2|B_2) \xrightarrow{e_3} \dots \xrightarrow{e_{n-1}} (A_{n-1}|B_{n-1})$$
$$\xrightarrow{e_n} (R|S)$$

όπου τα e_i είναι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών.

Έστω ότι Σ_0 συμβολίζει το σύστημα με επαυξημένο πίνακα τον $(A|B)$ (δηλ. Σ_0 είναι το δοθέν σύστημα), Σ_1 συμβολίζει το σύστημα με επαυξημένο πίνακα τον $(A_1|B_1)$, Σ_2 το σύστημα με επαυξημένο πίνακα τον $(A_2|B_2)$, ..., Σ_{n-1} το σύστημα με επαυξημένο πίνακα τον $(A_{n-1}|B_{n-1})$ και Σ_n το σύστημα με επαυξημένο πίνακα τον $(R|S)$.

Από το Θεώρημα 1 έχουμε ότι:

τα συστήματα Σ_0 και Σ_1 είναι ισοδύναμα,
τα συστήματα Σ_1 και Σ_2 είναι ισοδύναμα (άρα και τα Σ_0 και Σ_2 είναι ισοδύναμα),
τα Σ_2 και Σ_3 είναι ισοδύναμα (άρα και τα Σ_0 και Σ_3 είναι ισοδύναμα),

...,

τα Σ_{n-1} και Σ_n είναι ισοδύναμα.

Άρα, τα Σ_0 και Σ_n, δηλ τα $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ $(1 \le i \le m)$ και $\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j = s_i$ $(1 \le i \le m)$, είναι ισοδύναμα. $\square$

[Σημειώνουμε ότι η απόδειξη του Πορίσματος 1 μπορεί να γίνει με επαγωγή στο πλήθος των στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών που εφαρμόζονται για να πάρουμε τον $(R|S)$ από τον $(A|B)$, και χρήση του Θεωρήματος 1. Για την μέθοδο της επαγωγής, βλ. Απειροστικό Λογισμό Ι.]

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Το αποτέλεσμα του Πορίσματος 1 υποδεικνύει έμμεσα τη μέθοδο που θα ακολουθήσουμε για να λύνουμε γραμμικά συστήματα m εξισώσεων με n αγνώστους. Πράγματι, αν $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \; (i=1,\dots,m)$ είναι ένα γραμμικό σύστημα με επαυξημένο πίνακα $(A|B) = (a_{ij}|b_i)$, τότε πρώτα θα βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα $(R|S) = (r_{ij}|s_i)$ του $(A|B)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής των Gauss – Jordan, και στη συνέχεια θα λύνουμε το σύστημα $\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j = s_i \; (i=1,\dots,m)$ το οποίο (από το Πόρισμα 1) είναι ισοδύναμο με το αρχικό, και είναι <u>πολύ πιο απλό</u> από το αρχικό. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι στο τελευταίο σύστημα έχουν απαλοιφθεί πολλοί άγνωστοι (αφού αρκετοί συντελεστές είναι πλέον μηδέν) λόγω της μορφής ενός ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα.