ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ – ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020-2021

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Ελευθέριος Ταχτσής

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ I

ΜΑΘΗΜΑ 1

12/10/2020

$\mathbb{N}$: το σύνολο των φυσικών αριθμών,

$\mathbb{Z}$: το σύνολο των ακεραίων αριθμών,

$\mathbb{Q}$: το σύνολο των ρητών αριθμών,

$\mathbb{R}$: το σύνολο των πραγματικών αριθμών,

$\mathbb{C}$: το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Ισχύει ότι

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Ένας $m \times n$ πίνακας (ή πίνακας τάξης $m \times n$) είναι μια παράταξη $m \cdot n$ αριθμών, πραγματικών ή μιγαδικών, σε μορφή ορθογωνίου σχήματος το οποίο αποτελείται από m γραμμές και n στήλες όπως παρακάτω:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Σχήμα</u> : $m \times n$ πίνακας

Οι αριθμοί α_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ λέγονται <u>στοιχεία του πίνακα</u>.

Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}$ αποτελούν την πρώτη γραμμή του πίνακα. Τα στοιχεία $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}$ αποτελούν τη δεύτερη γραμμή του πίνακα κ.ο.κ.

Ανάλογα, τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1}$ αποτελούν την πρώτη στήλη του πίνακα. Τα στοιχεία $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2}$ αποτελούν τη δεύτερη στήλη του πίνακα κ.ο.κ.

Οι δείκτες i και j του στοιχείου α_{ij} εξυπηρετούν ώστε να αναγνωρίζουμε την γραμμή και στήλη στις οποίες βρίσκεται το α_{ij}. (Για παράδειγμα, το α_{21} είναι το στοιχείο του πίνακα το οποίο βρίσκεται στη δεύτερη γραμμή και πρώτη στήλη του πίνακα.)

Σημειώστε ότι: Στο στοιχείο a_{ij}, ο πρώτος δείκτης, i, αναγνωρίζει την γραμμή, ενώ ο δεύτερος δείκτης, j, αναγνωρίζει τη στήλη.

(α) Για $i = 1, 2, \ldots, m$ συμβολίζουμε την i-γραμμή του πίνακα με

$$r_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

(β) Για $j = 1, 2, \ldots, n$ συμβολίζουμε την j-στήλη του πίνακα με

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

(γ) Σε συντετμημένη μορφή, ένας $m \times n$ πίνακας (όπως αυτός του σχήματος στη σελίδα 2) γράφεται ως

$$(a_{ij})_{m \times n}$$

ή

$$(a_{ij}), \quad 1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq n$$

• Χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα της ελληνικής ή αγγλικής αλφαβήτου για να συμβολίσουμε πίνακες.

Παραδείγματα

1) Ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ένας 2×3 πίνακας.

$\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{12} = 2$, $\alpha_{13} = 3$

$\alpha_{21} = -1$, $\alpha_{22} = 7$, $\alpha_{23} = 0$

$r_1 = (1, 2, 3)$ (η $1^η$ γραμμή του πίνακα)

$r_2 = (-1, 7, 0)$ (η $2^η$ γραμμή του πίνακα)

$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (η $1^η$ στήλη του πίνακα)

$c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ (η $2^η$ στήλη του πίνακα)

$c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (η $3^η$ στήλη του πίνακα). □

2) Οι πίνακες χρησιμοποιούνται, όπως θα περίμενε κανείς, και για την ταξινόμηση μεγάλων συνόλων από δεδομένα. Για παράδειγμα, ένας χιλιομετρικός χάρτης μεταξύ των πόλεων της Θεσσαλονίκης, Αθήνας, και Πάτρας μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν 3×3 πίνακα:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Θεσ/νίκη} \\ \text{Αθήνα} \\ \text{Πάτρα} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Θεσ/νίκη} & \text{Αθήνα} & \text{Πάτρα} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 540 & 620 \\ 540 & 0 & 120 \\ 620 & 120 & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \quad \square$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> (α) Ένας $m\times 1$ πίνακας λέγεται <u>πίνακας στήλη</u> και είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}.$$

(β) Ένας $1\times n$ πίνακας λέγεται <u>πίνακας γραμμή</u> και είναι της μορφής

$$(\alpha_{11} \ \alpha_{12} \ \ldots \ \alpha_{1n})$$

(γ) Ένας 1×1 πίνακας λέγεται <u>πίνακας στοιχείο</u> (εφόσον έχει μόνον ένα στοιχείο) και είναι της μορφής (α_{11}).

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Ένας $m \times n$ πίνακας $A = (\alpha_{ij})$ λέγεται <u>τετραγωνικός</u> αν $m = n$ (δηλαδή, αν το πλήθος των γραμμών του A είναι ίσο με το πλήθος των στηλών του A).

Αν $A = (\alpha_{ij})$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης $n \times n$, τότε

(α) Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$ λέμε ότι αποτελούν την <u>κύρια διαγώνιο</u> του τετραγωνικού πίνακα A.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ κύρια διαγώνιος του $n \times n$ πίνακα

(β) Το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του τετραγωνικού πίνακα A λέγεται <u>ίχνος</u> του A και συμβολίζεται με $tr(A)$. Επομένως,

$$tr(A) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} .$$

<u>Παράδειγμα.</u> Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης 2×2.
Η κύρια διαγώνιος του A αποτελείται από τα στοιχεία $2, \sqrt{2}$ του A.
Το ίχνος του πίνακα A είναι $tr(A) = 2+\sqrt{2}$. $\square$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $A=(\alpha_{ij})$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης $n\times n$.

(α) Ο πίνακας A λέγεται <u>άνω τριγωνικός</u> αν κάθε στοιχείο του A που βρίσκεται κάτω από την κύρια διαγώνιο ισούται με 0. Δηλαδή, $\alpha_{ij}=0$ για $i>j$.

(β) Ο πίνακας A λέγεται <u>κάτω τριγωνικός</u> αν κάθε στοιχείο του A που βρίσκεται πάνω από την κύρια διαγώνιο ισούται με 0. Δηλαδή, $\alpha_{ij}=0$ για $i<j$.

(γ) Ο πίνακας A λέγεται <u>διαγώνιος</u> αν είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω τριγωνικός. Δηλαδή, $\alpha_{ij}=0$ για $i\neq j$.

Ένας $n \times n$ διαγώνιος πίνακας

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

συμβολίζεται με $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Παραδείγματα

1) Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

είναι ένας 3×3 άνω τριγωνικός πίνακας.

2) Ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι ένας 3×3 κάτω τριγωνικός πίνακας.

3) Ο πίνακας

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ένας 4×4 διαγώνιος πίνακας. □

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Ένας $n \times n$ διαγώνιος πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται <u>ταυτοτικός πίνακας</u> αν όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι ίσα με 1, δηλαδή $a_{ii} = 1$ για όλα τα $i = 1, \dots, n$.

Ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας συμβολίζεται με I_n.

Για παράδειγμα, ο 2×2 ταυτοτικός πίνακας είναι ο

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ο 3×3 ταυτοτικός πίνακας είναι ο

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

κ.ο.κ.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας $m \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ λέγεται <u>μηδενικός πίνακας</u> αν $a_{ij} = 0$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, m$ και όλα τα $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ο μηδενικός πίνακας τάξης $m \times n$ συμβολίζεται με $O_{m\times n}$. Αν $m = n$, τότε συμβολίζουμε τον $n \times n$ μηδενικό πίνακα με O_n.

Για παράδειγμα, ο 2×3 μηδενικός πίνακας είναι ο πίνακας

$$O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο 2×2 μηδενικός πίνακας είναι ο

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας.

Ο <u>ανάστροφος του A</u> είναι ο $n \times m$ πίνακας που προκύπτει δι' εναλλαγής των γραμμών και στηλών του A.

Συμβολίζουμε τον ανάστροφο του πίνακα A με A^t.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$A^t = (\beta_{ij})$$

όπου $\beta_{ij} = a_{ji}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, m$.

Παράδειγμα. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(ο οποίος είναι ένας 2×5 πίνακας).

Ο ανάστροφος του A είναι ο 5×2 πίνακας

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 9 \\ 1 & 3 \\ 7 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Μπλόκ Πίνακες

Χρησιμοποιώντας ένα σύστημα οριζόντιων και κατακόρυφων γραμμών, μπορούμε να διαμερίσουμε έναν πίνακα A σε μικρότερους πίνακες οι οποίοι ονομάζονται μπλοκς (ή κελιά) του A. Ο πίνακας A ονομάζεται τότε μπλοκ πίνακας. Σαφώς, ένας πίνακας μπορεί να διαμεριστεί σε μπλοκς με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $u=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ και $v=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ δύο η-άδες πραγματικών (ή μιγαδικών) αριθμών.

Ορίζουμε το άθροισμα των u και v, συμβολικά u+v, να είναι η εξής η-άδα αριθμών:

$$\boxed{u+v=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)}.$$

Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$). Ορίζουμε το γινόμενο της u επί α, συμβολικά $\alpha\cdot u$, να είναι η εξής η-άδα αριθμών:

$$\boxed{\alpha\cdot u=(\alpha\cdot x_1,\ \alpha\cdot x_2,\dots,\alpha\cdot x_n)}.$$

Έχοντας ορίσει τις παραπάνω πράξεις, μπορούμε να ορίσουμε την διαφορά των u και v, συμβολικά u−v, ως εξής:

$$\boxed{u-v=u+(-1)\cdot v}.$$

- Στην περίπτωση όπου οι η-άδες u και v είναι γραμμένες σε μορφή στήλης, οι παραπάνω πράξεις ορίζονται εντελώς παρόμοια.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $u = (1,0,0)$, $v = (3,4,7)$

Να βρεθούν οι 3-άδες $u+v$, $5\cdot v$, $u-2v$

Έχουμε:

$$u+v = (1+3, 0+4, 0+7) = (4,4,7)$$

$$5\cdot v = (5\cdot 3, 5\cdot 4, 5\cdot 7) = (15, 20, 35).$$

$$u-2v = (1-2\cdot 3, 0-2\cdot 4, 0-2\cdot 7) = (-5,-8,-14). \square$$

<u>Παράδειγμα.</u> Έστω $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $s = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Να βρεθεί η 3-άδα $2r+5s$.

Έχουμε:

$$2r = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 \\ 2\cdot 2 \\ 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$5s = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 \\ 5\cdot 1 \\ 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Οπότε,

$$2r+5s = \begin{pmatrix} 2+15 \\ 4+5 \\ 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών σε πίνακα

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας.

Καλούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στου πίνακα A, τις εξής πράξεις που μπορούν να εφαρμοστούν επί του A:

(1) Αν $1 \leq i \leq m$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$), $\alpha \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε την i-γραμμή του A επί α.

Η πράξη αυτή συμβολίζεται με

$$r_i \longrightarrow \alpha \cdot r_i$$

(2) Αν $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$), προσθέτουμε στην i-γραμμή του A την j-γραμμή του A πολλαπλασιασμένη με α.

Η πράξη αυτή συμβολίζεται με

$$r_i \longrightarrow r_i + \alpha \cdot r_j$$

(3) Αν $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $i \neq j$, εναλλάσσουμε τις i- και j-γραμμές του A.

Η πράξη αυτή συμβολίζεται με

$$r_i \longleftrightarrow r_j$$

Παραδείγματα

1) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Για κάθε έναν από τους παρακάτω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον A, να βρεθεί ο αντίστοιχος πίνακας που προκύπτει από τον A.

(α) $r_1 \to r_1 - 5r_3$ (β) $r_1 \leftrightarrow r_2$ (γ) $r_2 \to r_2 - 2r_1$

<u>ΛΥΣΗ</u> Για το (α) έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 5r_3} \begin{pmatrix} 1-5\cdot 0 & 2-5\cdot 5 & 1-5\cdot 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -23 & -14 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = B$$

Για το (β) έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \Gamma.$$

Για το (γ) έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1-2\cdot 1 & 4-2\cdot 2 & 0-2\cdot 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \Delta$$

□

2) Έστω A ο πίνακας του προηγούμενου παραδείγματος. Να βρεθεί ο πίνακας B που προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας διαδοχικά τους εξής στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών:

(α) $r_1 \to r_1 + r_3$ (β) $r_2 \leftrightarrow r_3$ (γ) $r_2 \to 5r_2$

Στη συνέχεια, να βρεθούν οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών που πρέπει να εφαρμόσουμε για να πάρουμε τον A από τον B.

ΛΥΣΗ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to 5 r_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 25 & 15 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Για το δεύτερο ερώτημα έχουμε

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 25 & 15 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{5} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = A. \qquad \square$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Από το προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι όταν σε έναν $m \times n$ πίνακα A εφαρμόσουμε

(α) $r_i \to a \cdot r_i \quad (a \neq 0)$

ή

(β) $r_i \to r_i + a \cdot r_j$

ή

(γ) $r_i \leftrightarrow r_j$

τότε για να επιστρέψουμε στον A, εφαρμόζουμε στον προκύπτοντα $m \times n$ πίνακα

(α′) $r_i \to \frac{1}{a} \cdot r_i$

ή

(β′) $r_i \to r_i - a \cdot r_j$

ή

(γ′) $r_i \leftrightarrow r_j$

αντίστοιχα. Οι (α′), (β′), (γ′) λέγονται <u>αντίστροφοι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών</u> των (α), (β), και (γ), αντίστοιχα.