

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε δείγμα $n=10$ ατόμων με 3 λογοκριμένες παρατηρήσεις που σχηματίζονται με αστερίσκο.

0.7 1.1 1.5* 1.8 1.8 2.2* 2.5* 3.1 3.1 3.6

Υπολογισμός συνάρτησης επιβίωσης $S(t)$ και αθροιστικής συνάρτησης κινδύνου $F(t)$

Έχουμε

$t_{(i)}$ 0.7 1.1 1.8 3.1 3.6

$d_{(i)}$ 1 1 2 2 1

$n_{(i)}$ 10 9 7 3 1

$n_{(i)}$ αριθμός παρατηρήσεων που έχουν επιβιώσει ή βρίσκονται σε κίνδυνο πριν την χρονική στιγμή $t_{(i)}$

$d_{(i)}$ αριθμός των αποτυχιών την χρονική στιγμή $t_{(i)}$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \prod_{j: t_{(j)} \leq t} \left(\frac{n_{(j)} - d_{(j)}}{n_{(j)}} \right) = \prod_{j: t_{(j)} \leq t} \left(1 - \frac{d_{(j)}}{n_{(j)}} \right)$$

Επομένως

$$\hat{S}_{KM}(t) = 1, t \leq 0.7$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{10-1}{10} = \frac{9}{10}, 0.7 \leq t \leq 1.1$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{10-1}{10} \frac{9-1}{9} = \frac{8}{10}, 1.1 \leq t \leq 1.8$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{10-1}{10} \frac{9-1}{9} \frac{7-2}{7} = \frac{4}{7}, 1.8 \leq t \leq 3.1$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{10-1}{10} \frac{9-1}{9} \frac{7-2}{7} \frac{3-2}{3} = \frac{4}{21}, 3.1 \leq t \leq 3.6$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = 0, t \geq 3.6$$

Οι αντίστοιχες τιμές της $F(t) = 1-S(t)$ είναι

t	<0.7	$[0.7, 1.1)$	$[1.1, 1.8)$	$[1.8, 3.1)$	$[3.1, 3.6)$	$t \geq 3.6$
$F(t)$	0	0.1	0.2	0.428	0.87	1

2. Θεωρούμε δείγμα $n=8$ ατόμων με 2 λογοκριμένες παρατηρήσεις που σχηματίζονται με αστερίσκο

1 2 3* 5 5* 7 8

Υπολογισμός συνάρτησης επιβίωσης $S(t)$

Έχουμε

$t_{(i)}$ 1 2 5 7 8

$d_{(i)}$ 1 1 2 1 1

$n_{(i)}$ 8 7 5 2 1

$$\hat{S}_{KM}(t) = 1, t \leq 1$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{8-1}{8} = \frac{7}{8}, 1 \leq t \leq 2$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{8-1}{8} \frac{7-1}{7} = \frac{6}{8}, 2 \leq t \leq 5$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{8-1}{8} \frac{7-1}{7} \frac{5-2}{5} = \frac{18}{40}, 5 \leq t \leq 7$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{8-1}{8} \frac{7-1}{7} \frac{5-2}{5} \frac{2-1}{1} = \frac{9}{40}, 7 \leq t \leq 8$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = 0, t \geq 8$$

3. Θεωρούμε δείγμα $n=11$ ατόμων με 1 λογοκριμένη παρατήρηση που σχηματίζονται με αστερίσκο

5 5 8 8 12 16* 23 27 30 33 43

Να υπολογίσει η μέση τιμή της συνάρτησης επιβίωσης μ
Οι εκτιμήσεις της $S(t)$ δίνονται στον παρακάτω

$$\hat{S}_{KM}(t) = 1, t \leq 5$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{10}{12}, 5 \leq t \leq 8$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{8}{12}, 8 \leq t \leq 12$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{7}{12}, 12 \leq t \leq 23$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{7}{12} \frac{5}{6}, 23 \leq t \leq 27$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{7}{12} \frac{4}{6}, 27 \leq t \leq 30$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{7}{12} \frac{3}{6}, 30 \leq t \leq 33$$


$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{7}{12} \frac{2}{6}, 33 \leq t \leq 43$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = \frac{7}{12} \frac{1}{6}, 43 \leq t \leq 45$$

$$\hat{S}_{KM}(t) = 0, t \geq 45$$

Επομένως

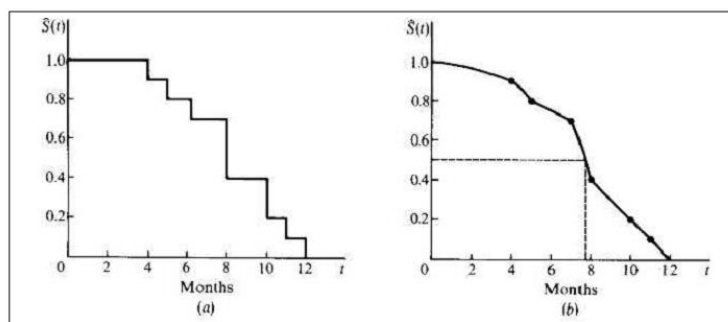
$$\hat{\mu} = \int_0^{+\infty} \hat{S}(t) dt = 1*5 + \frac{10}{12}*3 + \frac{8}{12}*4 + \dots + \frac{7}{12}*\frac{2}{6}*10 + \frac{7}{12}*\frac{1}{6}*2 = 22.71$$



 5 = εύρος του διαστήματος [0,5)

4. Σε μια κλινική μελέτη παρακολουθούνται 10 ασθενείς με καρκίνο στους πνεύμονες μέχρι να παρατηρηθεί ο θάνατος τους. Στον ακόλουθο πίνακα καταγράφονται οι χρόνοι επιβίωσης σε μήνες, ενώ έχει υπολογιστεί η συνάρτηση επιβίωσης

t	i	$\hat{S}(t)$
4	1	$\frac{9}{10} = 0.9$
5	2	$\frac{8}{10} = 0.8$
6	3	$\frac{7}{10} = 0.7$
8	4	$\frac{4}{10} = 0.4$
8	5	$\frac{4}{10} = 0.4$
8	6	$\frac{4}{10} = 0.4$
10	7	$\frac{2}{10} = 0.2$
10	8	$\frac{2}{10} = 0.2$
11	9	$\frac{1}{10} = 0.1$
12	10	$\frac{0}{10} = 0.0$



5. Θέλουμε να βρούμε και να σχεδιάσουμε την εκτιμώμενη συνάρτηση επιβίωσης, την εκτιμώμενη συνάρτηση κινδύνου και την εκτιμώμενη συνάρτηση πυκνότητας.

Ζωντανά άτομα στο i διάστημα: 1100 860 680 496 358 240 180 128 84 52

Θανάτοι στο i διάστημα : 240 180 184 138 118 60 52 44 32 28

Στην πρώτη στήλη δίνεται το χρονικό διάστημα της παρακολούθησης. Οι χρονιές είναι χωρισμένες σε διαστήματα πλάτους 1 το κάθε ένα. Το 0 συμβολίζει την πρώτη χρονιά που άρχισε η παρακολούθηση. Δημιουργήθηκε μία επιπλέον στήλη, η τέταρτη που έχει τα κάτω άκρα των διαστημάτων. Στη δεύτερη στήλη δίνεται ο αριθμός των ζωντανών ατόμων στην αρχή του αντίστοιχου διαστήματος ενώ στην τρίτη στήλη υπάρχει ο αριθμός των ατόμων που πέθαναν στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

$$\hat{S}(t) = \frac{\text{αρ. ατόμων που επιβιώνουν για χρόνο μεγαλύτερο του } t}{\text{συνολικός αριθμός ατόμων}}$$

Για το πρώτο χρονικό διάστημα, 0-1, έχουμε: $\hat{S}(0) = \frac{1100}{1100} = 1$, για το δεύτερο:

$$\hat{S}(1) = \frac{860}{1100} = 0.7818, \text{ κλπ.}$$

$$\hat{h}^*(t) = \frac{\text{αρ. ατόμων που αποτυγχάνουν ανά μονάδα χρόνου στο διάστημα}}{(\text{αρ. ατόμων που επιβιώνουν μέχρι το } t) - \frac{1}{2} (\text{αρ. αποτυχιών στο διάστημα})}$$

Για το πρώτο χρονικό διάστημα, έχουμε: $\hat{h}(0) = \frac{240}{1100 - 240/2} = 0.2449$, για το δεύτερο:

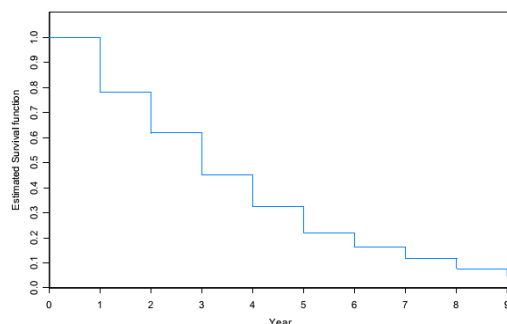
$$\hat{h}(1) = \frac{180}{860 - 180/2} = 0.2338, \text{ κλπ.}$$

$$\hat{f}(t) = \frac{\text{αρ. ατόμων που αποτυγχάνουν στο διάστημα που ξεκινά στο χρόνο } t}{(\text{συνολικός αριθμός ατόμων}) * (\text{πλάτος διαστήματος})}$$

Για το πρώτο χρονικό διάστημα, έχουμε: $\hat{f}(0) = \frac{240}{1100} = 0.2182$, για το δεύτερο:

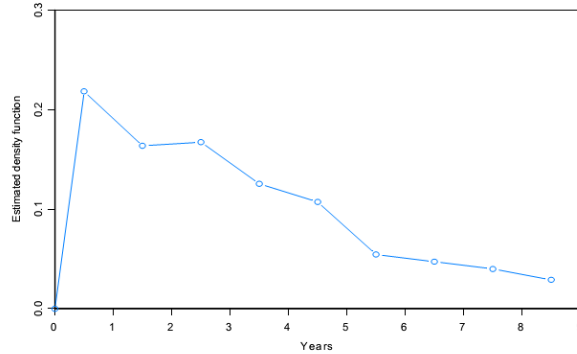
$$\hat{f}(1) = \frac{180}{1100} = 0.1636, \text{ κλπ.}$$

Χρονικό Διάστημα	$\hat{S}(t)$	$\hat{f}(t)$	$\hat{h}(t)$
0-1	1	0.2182	0.2449
1-2	0.7818	0.1637	0.2338
2-3	0.6182	0.1673	0.3129
3-4	0.4509	0.1255	0.3232
4-5	0.3255	0.1073	0.3946
5-6	0.2182	0.0545	0.2857
6-7	0.1636	0.0473	0.3377
7-8	0.1164	0.04	0.4151
8-9	0.0764	0.0291	0.4706
3 9	0	---	---

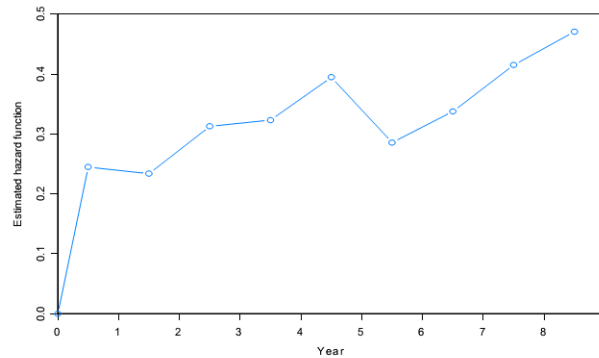


Εκτιμώμενη καμπύλη επιβίωσης

Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι η μεγαλύτερη συχνότητα θανάτων παρατηρείται στο χρονικό διάστημα 0-1, ενώ από το διάγραμμα4 βλέπουμε ότι η συνάρτηση κινδύνου έχει μια αυξητική τάση, εκτός στο διάστημα5-6 όπου μειώνεται, αλλά αμέσως μετά συνεχίζει την αυξητική της τάση.



Εκτιμώμενη καμπύλη πυκνότητας-πιθανότητας



Εκτιμώμενη καμπύλη της συνάρτησης κινδύνου

6.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Έστω 10 ασθενείς με καρκίνο του πνεύμονα για τους οποίους είναι γνωστός ο χρόνος ως την υποτροπή από την ασθένεια. Οι δέκα διαφορετικοί χρόνοι (σε μήνες) για τους ασθενείς αυτούς είναι 6, 8, 12+, 14, 16, 16, 16+, 19, 21+, 24. Οι παρατηρήσεις με το σύμβολο (+) αντιπροσωπεύουν λογοκριμένους ασθενείς. Για να υπολογιστεί η καμπύλη επιβίωσης δημιουργείται ο παρακάτω πίνακας:

Χρόνος (t)	# ασθενών (N)	# γεγονότων (d)	d/N	S(t)
0	10	0	0	1
6	10	1	1/10	0.900
8	9	1	1/9	0.800
12	8	0	0/8	0.800
14	7	1	1/7	0.686
16	6	2	2/4	0.457
19	3	1	1/3	0.305
21	2	0	0/2	0.305
24	1	1	1/1	0.000

Στον χρόνο $t = 14$ επτά άτομα βρίσκονται σε κίνδυνο και ένα παθαίνει υποτροπή. Συνεπώς, η πιθανότητα επιβίωσης είναι

$$S(14) = \prod_{i \leq 12} [1 - \frac{d_i}{Y_i}] = (1 - 0/10)(1 - 1/10)(1 - 1/9)(1 - 0/8)(1 - 1/7) = 0.686.$$