Ανάλυση Επιβίωσης

Επικ. Καθ. Σ. Ζημερας
Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών – Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Σάμος
2020

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

- Ένας πίνακας θνησιμότητας είναι μια στατιστική – αναλογιστική μέθοδος για να εκφράσουμε συνοπτικά τις πιθανότητες επιβίωσης (ή αποβίωσης) καθώς επίσης για να περιγράψουμε τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας ομάδας ανθρώπων. Στην αναλογιστική πρακτική ο πίνακας θνησιμότητας ή ισοδύναμα ένας πίνακας ζωής (life table) κατασκευάζεται αφού εκτιμηθούν πρώτα οι δεσμευμένες πιθανότητες , για ακέραιες ηλικίες αρχίζοντας από μια συγκεκριμένη ελάχιστη ηλικία (συνήθως από την ηλικία 0)

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

- Ο πίνακας θνησιμότητας αποτελεί μια στατιστική τεχνική για την παρουσίαση και τη σύνοψη των στοιχείων θνησιμότητας ενός πληθυσμού σε μια φόρμα που επιτρέπει απαντήσεις σε ερωτήματα όπως: ποια είναι η πιθανότητα ένας άντρας ηλικίας x να επιβιώσει (ή αποβιώσει) μέχρι την ηλικία y ή ποιος είναι ο μέσος αριθμός ετών απομένουσας ζωής για άτομο που έχει φτάσει στην ηλικία x.
- Οι πίνακες θνησιμότητας χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Στην μία περίπτωση, που είναι και η ποιο συνήθης, ο πίνακας είναι περιόδου. Δηλαδή, τα δεδομένα συλλέγονται ανά έτος που συμβαίνουν. Στη δεύτερη περίπτωση τα δεδομένα συλλέγονται ανά γενιά. Αυτοί οι πίνακες ονομάζονται cohort πίνακες θνησιμότητας. Άρα, μπορούμε να θεωρήσουμε την γενιά ή την περίοδο του πίνακα θνησιμότητας.
- Εκφράζεται με αναμενόμενους αριθμούς ζώντων από τους αρχικούς l_0 στην ηλικία 0. Η τιμή l_0 καλείται ρίζα του πίνακα θνησιμότητας. Πίνακας θνησιμότητας μπορεί να αρχίσει από οποιαδήποτε ηλικία α όπου l_α

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

- Θεωρούμε μία ομάδα από l_0 άτομα τα οποία έχουν γεννηθεί το ίδιο ημερολογιακό έτος, δηλαδή αποτελούν τον πληθυσμό μιας γενεάς (cohort, generation). Τα άτομα αυτά αποτελούν μία κλειστή ομάδα, δηλαδή δεν υπάρχει μετανάστευση από ή προς αυτή την ομάδα.
- Με x συμβολίζουμε την ακριβή ηλικία ενός ατόμου

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

- Πρακτικά, είναι ένα μέσο για να παρουσιάσουμε ένα σύνολο q_x τιμών για ακέραιες ηλικίες αρχίζοντας από μία συγκεκριμένη ελάχιστη ηλικία α και πέρα, όπου q_x οι πιθανότητες θανάτου για $x = a, a+1, \ldots, \omega - 1$ όπου με ω συμβολίζουμε την οριακή ηλικία και εννοούμε την ηλικία πέρα από την οποία κανένα άτομο δεν επιζεί. Με άλλα λόγια q_x είναι η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να πεθάνει στο διάστημα $[x, x+1)$ για $x = a, a+1, \ldots, \omega - 1$.
- Οι συμπληρωματικές πιθανότητες των παραπάνω πιθανοτήτων είναι οι $p_a, p_{a+1}, \ldots, p_{\omega-1}$ που δηλώνουν την πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας xνα επιβιώσει μέχρι την ηλικία x+1 .

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

- ℓ_0

Αρχικά ορίζεται ο αριθμός γεννήσεων των ατόμων υπό παρατήρηση της υποθετικής γενεάς ℓ_0, κατά σύμβαση ίσος με 100.000.

- ℓ_x

Ο αριθμός των ατόμων που φθάνουν την ακριβή ηλικία x, συμβολίζεται ℓ_x.

- ${}_n q_x$

είναι η πιθανότητα κάποιος ακριβούς ηλικίας x να πεθάνει στο διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$.

- ${}_n p_x$

είναι η πιθανότητα κάποιος ακριβούς ηλικίας x να επιβιώσει όλο το διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$.

$${}_n p_x = 1 - {}_n q_x$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

- $S(x)$

Ο λόγος του ℓ_x προς το ℓ_0 αποτελεί την πιθανότητα επιβίωσης (survival probability), $S(x)$, την πιθανότητα δηλαδή κάποιος να φθάσει την ακριβή ηλικία x, να επιβιώσει στο διάστημα ηλικίας $[0, x]$.

$$S(x) = \frac{\ell_x}{\ell_0}$$

$$S(x) = \prod_{i=0}^{x-1} p_i = \prod_{i=0}^{x-1} (1 - q_i)$$

- ${}_n d_x$

είναι ο συνολικός αριθμός θανάτων στο διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$.

$${}_n d_x = \ell_x - \ell_{x+n} \quad \Rightarrow \quad {}_n d_x = \ell_x \cdot {}_n q_x$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

- ${}_{n}L_{x}$

είναι ο συνολικός αριθμός ετών ζωής που βιώνονται από τα άτομα του πληθυσμού στο διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Στην πρώτη στήλη του πίνακα θνησιμότητας έχουμε τις l_x τιμές, όπου l_x είναι ο αριθμός των επιζώντων σε ακριβή ηλικία x. Ο πίνακας αρχίζει από ένα αυθαίρετο πλήθος l_0 ζώντων σε ηλικία 0 και μηδενίζεται σε μία τερματική ηλικία ω $(l_\omega = 0)$.Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου ένας πίνακας ζωής αρχίζει από κάποια ηλικία x διαφορετική του 0 , όπως για παράδειγμα σε πίνακες ζωής που αφορούν το συντάξιμο ή ασφαλισμένο πληθυσμό όπου ως l_0 λαμβάνεται η αρχή της συντάξιμης περιόδου και του συμβολαίου ασφάλισης αντίστοιχα . Σε κάθε περίπτωση η αντίστοιχη τιμή l_a της νεότερης ηλικίας στον πίνακα ζωής είναι γνωστή ως βάση ή ρίζα του πίνακα. Συνήθως η τιμή που διαλέγουμε για την βάση είναι ένας αρκετά μεγάλος αριθμός και είναι μια δύναμη του 10, με εκθέτη ακέραιο και θετικό δηλαδή 100.000 ή 1.000.000 . Έτσι υποθέτουμε μια γενιά (cohort) από ℓ_0 νεογέννητα άτομα στην οποία δεν παρατηρούνται καινούργιες γεννήσεις ή αποχωρήσεις με την πάροδο του χρόνου και σταδιακά ελαττώνεται στο μέγεθος, εφόσον κάποια μέλη της πεθαίνουν, μέχρι την ολική εξαφάνιση της γενιάς αυτής σε κάποια ηλικία ω : $\ell_\omega = 0$.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Στην δεύτερη στήλη του πίνακα ζωής έχουμε τις d_x τιμές που αντιπροσωπεύουν τους θανάτους κατά τη διάρκεια του x έτους ηλικίας, δηλαδή από την αρχή της ηλικίας x έως την $x+1$ ακριβώς. Δίνεται από τη σχέση $d_x = l_x - l_{x+1}$ όπου l_x οι επιζώντες ηλικίας x από τους αρχικούς l_0.

Στην Τρίτη στήλη του πίνακα θνησιμότητας έχουμε τις q_x τιμές, δηλαδή την αναλογία των ατόμων ηλικίας x που θα πεθάνουν μεταξύ ηλικίας x και $x+1$ και δίνεται από τη σχέση

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{(l_x - l_{x+1})}{l_x}\,.$$

Συνήθως δημιουργούμε και μία τέταρτη στήλη η οποία αποτελείται από τις τιμές $\overset{0}{e}_x$ δηλαδή από αναμενόμενους μελλοντικούς χρόνους μέχρι το θάνατο, ατόμων ηλικίας x. Για $x=0$ παίρνουμε τον αναμενόμενο μέσο όρο ζωής του συγκεκριμένου πληθυσμού από την γέννηση.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Για την κατασκευή ενός πίνακα ζωής προβαίνουμε σε έρευνα θνησιμότητας ενός πληθυσμού, για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα που αφορά όλες τις ηλικίες του παραπάνω ιδεατού πληθυσμού ℓ_0 . Στόχος της έρευνας είναι η εκτίμηση των q_x τιμών μέσα από διάφορες μεθόδους εκτίμησης. Στη συνέχεια η θνησιμότητα του πληθυσμού αντικαθίσταται από τις νέες εκτιμήσεις των τιμών των q_x, δηλαδή με την εκτίμηση της θνησιμότητας του πληθυσμού.

Ο πληθυσμός ο οποίος συμμετέχει στην έρευνα αποτελείται αρχικά από ℓ_0 ζωές ηλικίας 0. Τα μέλη του πληθυσμού αυτού υπόκεινται σε ένα πραγματικό ετήσιο ρυθμό θνησιμότητας, σε κάθε ηλικία της ζωής του, ο οποίος προσδιορίζεται από τις γνωστές q_x τιμές του πίνακα. Ακόμη, ο πληθυσμός είναι κλειστός, δηλαδή δεν επιτρέπεται καινούργια άτομα να συμμετάσχουν στην έρευνα και η μόνη έξοδος από τον αρχικό πληθυσμό είναι αποτέλεσμα του ετήσιου ρυθμού θνησιμότητας.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Ο πίνακας συμπληρώνεται ξεκινώντας από τα ℓ_0 άτομα για το πρώτο έτος ηλικίας βρίσκοντας τους θανάτους ως εξής

$$d_0 = l_0 \cdot q_0$$

Έπειτα από γνωστούς τύπους

$$d_0 = l_0 - l_1 \Rightarrow l_1 = l_0 - d_0$$

Με την ίδια διαδικασία συμπληρώνονται τα υπόλοιπα κελιά του πίνακα μέχρι την τελευταία γραμμή όπου

$$\ell_{\omega-1} \cdot q_{\omega-1} = d_{\omega-1} = \ell_{\omega-1} \text{ διότι } q_{\omega-1} = \frac{\ell_{\omega-1} - \ell_{\omega}}{\ell_{\omega-1}} = 1 .$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Για τον υπολογισμό των εκτιμήσεων $\overset{0}{e}_x$ χρειάζεται να υπολογίσουμε πρώτα τα μεγέθη ${}_nL_x$ και T_x.

Ορίζουμε ως ${}_nL_x$ τον συνολικό αριθμό ετών ζωής που βιώνονται από τα άτομα του πληθυσμού στο διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$. Κάθε μέλος του πληθυσμού που βιώνει όλο το διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$,συμβάλει στον υπολογισμό του ${}_nL_x$ κατά n έτη ζωής, ενώ κάθε ένας που πεθαίνει κάποτε μέσα στο ίδιο διάστημα, κάτω από την υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής θανάτων μέσα στο διάστημα ηλικίας, συμβάλει στο ${}_nL_x$ κατά μέσο όρο με $n/2$ αριθμό ετών ζωής. Έτσι το ${}_nL_x$ μπορεί να εκτιμηθεί από τον προσεγγιστικό τύπο

$${}_nL_x = n \cdot l_{x+n} + \frac{n}{2} \cdot {}_nd_x$$

αλλά $d_x = l_x - l_{x+n}$.Άρα,

$${}_nL_x = \frac{n}{2}(l_x + l_{x+n})$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Αν θεωρήσουμε την ηλικία x συνεχή μεταβλητή τότε:

$$ {}_nL_x = \int_x^{x+n} l(t)\cdot dt = \int_0^n l(x+t)\cdot dt \simeq n\left(\frac{l_x + l_{x+n}}{2}\right) $$

Ως T_x ορίζουμε τον συνολικό αριθμό ετών ζωής που πρόκειται να βιώσουν τα l_0 άτομα του υποθετικού πληθυσμού στο διάστημα $[x,\omega)$ όπου ω η οριακή ηλικία.

$$ T_x = \sum_{i\geq x} {}_nL_i $$

Ακόμα, $T_{x+1} = T_x - {}_nL_x \Rightarrow {}_nL_x = T_x - T_{x+n}$

Θεωρώντας την ηλικία χ συνεχή μεταβλητή έχουμε:

$$ T_{x+1} = \int_0^{\omega-x} l(x+t)\cdot dt $$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Τέλος υπολογίζουμε την τελευταία στήλη του πίνακα ζωής $\overset{0}{e}_x$ από τη σχέση

$$\overset{0}{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$$

Έτσι η αναμενόμενη ηλικία θανάτου κάποιου ατόμου ηλικίας x ισούται με

$$x + \overset{0}{e}_x$$

Αν η x θεωρηθεί συνεχής τότε

$$\overset{0}{e}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^{\omega - x} l(x+t) \cdot dt$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Συγκεντρωτικά

Η θνησιμότητα, σύμφωνα με τον παραπάνω ιδεατό πληθυσμό ℓ_0 αντικαθίσταται στην πράξη από την εκτίμηση της θνησιμότητας ενός πληθυσμού σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα μιας έρευνας που αφορά όλες τις ηλικίες, μέσα από διάφορες μεθόδους εκτίμησης των q_x τιμών (βάση του πληθυσμού σε κάθε διάστημα ηλικίας και των αντίστοιχων θανάτων, σε κάθε διάστημα ηλικίας, που συνέβησαν σε αυτό το χρονικό διάστημα της έρευνας).

Έτσι, η υπό εξέταση ομάδα ατόμων, όπως παρουσιάζεται σε ένα πίνακα ζωής έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά :

I. Ο πληθυσμός αυτός αποτελείται αρχικά από ℓ_0 ζωές ηλικίας *0*

II. Τα μέλη του πληθυσμού υπόκεινται σε κάθε ηλικία της ζωής τους σε ένα πραγματικό ετήσιο ρυθμό θνησιμότητας που προσδιορίζεται από τις (γνωστές) q_x τιμές του πίνακα

III. <u>Ο πληθυσμός αυτός είναι κλειστός</u>. Δεν επιτρέπονται καινούργιοι να μπουν στο πληθυσμό, η μόνη έξοδος από τον πληθυσμό είναι ως αποτέλεσμα του ετήσιου ρυθμού θνησιμότητας.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Με αυτά τα χαρακτηριστικά έχουμε ότι η πρόοδος του πληθυσμού καθώς και ένας πίνακας ζωής καθορίζεται από τα ακόλουθα :

Δεδομένου ενός ℓ_0 βρίσκουμε τους θανάτους για το 1^{o} έτος ηλικίας

$$\ell_0 \cdot q_0 = d_0$$

Έτσι,

$$\ell_0 - l_1 = d_0 \Rightarrow l_1 = \ell_0 - d_0$$

Με την ίδια λογική έχουμε $\ell_1 \cdot q_1 = d_1$ οπότε και $\ell_2 = \ell_1 - d_1$, και επαναλαμβάνοντας την ίδια αναδρομική διαδικασία μέχρι και την τελευταία γραμμή του πίνακα όπου

$$\ell_{\omega-1} \cdot q_{\omega-1} = d_{\omega-1} = \ell_{\omega-1} \text{ διότι } q_{\omega-1} = 1.$$

Για την εκτίμηση των $\overset{0}{e}_x$ τιμών μια προσέγγιση,

$$\overset{0}{e}_x = p_x \cdot (1 + e_{x+1}) + \frac{1}{2} \quad \text{με} \quad e_\omega = 0.$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι οι συναρτήσεις ${}_nq_x$, ${}_np_x$, ${}_nd_x$ και ${}_nL_x$ αναφέρονται στο διάστημα ηλικίας [*x*, *x*+*n*), ενώ οι ℓ_x και $\overset{0}{e}_x$ αναφέρονται στην ακριβή ηλικία *x*. Ακόμη, ενώ οι τιμές των l_x, ${}_nd_x$, ${}_nL_x$ και T_x εξαρτώνται από την τιμή του ℓ_0, που αποτελεί κάποιο υποθετικό πλήθος το οποίο ορίζεται αυθαίρετα, οι τιμές των ${}_nq_x$, ${}_np_x$ και $\overset{0}{e}_x$ είναι ανεξάρτητες από την τιμή του ℓ_0, και αφορούν τον πραγματικό πληθυσμό στον οποίο αναφέρεται ο πίνακας επιβίωσης.

Ακόμα, εφ΄ όσον:

$$\ell_0 = \sum_{x\geq 0} {}_nd_x, \quad \overset{0}{e}_x = \frac{T_0}{\ell_0} \text{ και } \mathrm{T}_0 = \sum_{x\geq 0} {}_nL_x$$

τότε:

$$\overset{0}{\mathrm{e}}_x = \frac{\sum_{x\geq 0} {}_nL_x}{\sum_{x\geq 0} {}_nd_x} = \frac{\overline{P}}{D} = \frac{1}{\mathrm{A\Sigma\Theta}}$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Προσεγγιστικές Σχέσεις μεταξύ $_n m_x$ και $_n q_x$

Έστω $_n\alpha_x$ ο αναμενόμενος αριθμός ετών που βιώνει στο διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$ ένα τυχαίο άτομο ηλικίας x που πεθαίνει μέσα στο ίδιο διάστημα ηλικίας $(0 < {}_n\alpha_x < n)$.

Έστω ακόμα $_n f_x = \frac{_n\alpha_x}{n}$, $0 <{}_n f_x < 1$

Το $_n f_x$ είναι ο αναμενόμενος σχετικός αριθμός ετών που βιώνεται στο διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$ από ένα τυχαίο άτομο του πληθυσμού, ηλικίας x που πεθαίνει μέσα σε αυτό το διάστημα ηλικίας, (ένα ποσοστό του διαστήματος ηλικιών $[x, x+n)$).

Έτσι το $_n L_x$ ο συνολικός αριθμός ετών ζωής που θα βιωθούν από τα ℓ_x άτομα στο διάστημα ηλικιών $[x, x+n)$ αποτελείται από:

1. n αριθμό ετών για κάθε άτομο που βίωσε όλο το διάστημα $[x, x+n)$, ήτοι για ℓ_{x+n} άτομα (συνολικά αυτοί συνέβαλαν κατά $n\,\ell_{x+n}$ έτη ζωής).
2. $_n\alpha_x$ αριθμό ετών για κάθε έναν από αυτούς που πεθαίνουν κάποτε μέσα στο ίδιο διάστημα ηλικιών, ήτοι για $_n d_x$ άτομα (συνολικά αυτοί συνέβαλαν κατά $_n\alpha_x \cdot {}_n d_x$ έτη ζωής).

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Άρα:

$$ {}_nL_x = n \cdot \ell_{x+n} + {}_n\alpha_x \cdot {}_nd_x \Rightarrow $$

$$ \Rightarrow {}_nL_x = n\,(\ell_x - {}_nd_x) + n \cdot {}_nf_x \cdot {}_nd_x \Rightarrow $$

$$ \Rightarrow {}_nL_x = n\left[\ell_x - {}_nd_x\left(1 - {}_nf_x\right)\right] $$

Όμως ο ειδικός συντελεστής θνησιμότητας για το διάστημα ηλικίας $[x,\ x+n)$, βάσει των συναρτήσεων του πίνακα επιβίωσης ισούται με:

$$ {}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} \Rightarrow $$

$$ {}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{n\left[\ell_x - {}_nd_x\left(1 - {}_nf_x\right)\right]} $$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Αλλά: ${}_n d_x = \ell_x \cdot {}_n q_x$

Άρα

$$ {}_n m_x = \frac{\ell_x \cdot {}_n q_x}{n \cdot \ell_x \left[1 - {}_n q_x (1 - {}_n f_x)\right]} \Rightarrow $$

$$ \Rightarrow {}_n m_x = \frac{{}_n q_x}{n\left[1 - {}_n q_x (1 - {}_n f_x)\right]} $$

και

$$ {}_n q_x = \frac{n \cdot {}_n m_x}{1 + n\left(1 - {}_n f_x\right) \cdot {}_n m_x} $$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Αν υποθέσουμε ομοιόμορφη κατανομή θανάτων μέσα στο διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$.

Τότε: ${}_n\alpha_x = \frac{n}{2}$ και κατά συνέπεια ${}_n f_x = \frac{1}{2}$

$${}_n m_x = \frac{{}_n q_x}{n\left(1 - \frac{1}{2}\ {}_n q_x\right)} \quad \Longrightarrow \quad {}_n q_x = \frac{{}_n m_x}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{n}{2}\ {}_n m_x\right)}$$

Έτσι για n=1,

$$m_x = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2} q_x} \quad \text{και} \quad q_x = \frac{m_x}{1 + \frac{1}{2} m_x}$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Μια εναλλακτική μέθοδος περιγραφής της κατά ηλικία θνησιμότητας είναι η εφαρμογή παραμετρικών υποδειγμάτων που εμφανίζουν τη θνησιμότητα σαν συνάρτηση της ηλικίας. Τέτοια υποδείγματα αναφέρονται στη δημογραφική βιβλιογραφία σαν "Νόμοι Θνησιμότητας" (Laws of Mortality).

Η πρώτη προσπάθεια ανάπτυξης ενός τέτοιου υποδείγματος είναι ο τύπος de Moivre ο οποίος παρουσιάστηκε στη βιβλιογραφία το 1725. Ο τύπος αυτός εμφανίζει την ένταση θνησιμότητας $\mu(x)$ σαν συνάρτηση της ηλικίας:

$$\mu(x) = 1/(w - x)$$

ή στην εναλλακτική μορφή όπου εμφανίζεται η πιθανότητα επιβίωσης $S(x)$ σαν συνάρτηση της ηλικίας:

$$S(x) = 1 - \frac{x}{w}$$

όπου w αντιπροσωπεύει την ανώτατη δυνατή ηλικία.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Ο τύπος αυτός περιγράφει ικανοποιητικά την κατά ηλικία θνησιμότητα των μεγάλων ηλικιών αλλά αποτυγχάνει στις μικρότερες ηλικίες, κάτι που σχολιάστηκε από τον ίδιο το δημιουργό του, ο οποίος τον εφάρμοσε για τις ανάγκες υπολογισμών.

Ο πιο διαδεδομένος ίσως νόμος θνησιμότητας έχει αναπτυχθεί από τον Gompertz[6] το 1825. Βασίζεται στην θεώρηση ότι η ένταση θνησιμότητας εξελίσσεται εκθετικά με τη ηλικία:

$$\mu(x) = bc^{x}$$

όπου b και c θετικές παράμετροι, ή με βάση την πιθανότητα επιβίωσης $S(x)$, στη μορφή:

$$S(x) = \exp\left[-\frac{b}{\log c}\left(c^{x} - 1\right)\right]$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Ο Makeham[7] το 1860 ανέπτυξε ένα υπόδειγμα της μορφής:

$$\mu(x) = \alpha + b \cdot c^x$$

ή εναλλακτικά

$$S(x) = \exp\left(-\alpha x - \frac{b}{\log c}\left(c^x - 1\right)\right)$$

προσέθεσε δηλαδή μια σταθερά στην έκφραση Gompertz. Όμως, και αυτή η έκφραση δεν κατορθώνει να περιγράψει ικανοποιητικά την θνησιμότητα του συνολικού διαστήματος ηλικιών. Εμφανίζει καλή εφαρμογή στις μεσαίες ηλικίες, ενώ υπερεκτιμά τη θνησιμότητα των μεγάλων ηλικιών και αποτυγχάνει στην περιγραφή της θνησιμότητας των μικρών ηλικιών. Εν τούτοις, έχει ευρύτατα χρησιμοποιηθεί από αναλογιστές.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Ο Thiele [9] το 1872 πρότεινε ένα μοντέλο για την περιγραφή της θνησιμότητας του συνολικού διαστήματος ζωής. Η προσπάθεια του βασίστηκε στην υπόθεση ότι οι διάφορες αιτίες θανάτων μπορούν να χωριστούν σε τρεις διακριτές ομάδες, οι οποίες επιδρούν κύρια στην παιδική ηλικία, στους ενήλικους και στους υπερήλικους αντίστοιχα.

Βάσει αυτής της έκφρασης η ένταση θνησιμότητας διαχωρίζεται σε τρεις προσθετικούς όρους:

$$\mu(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x)$$

όπου

$$\mu_1(x) = \alpha_1 \exp(-\beta_1 x)$$

$$\mu_2(x) = \alpha_2 \exp(-\beta_2^2 (x - c)^2 / 2)$$

$$\mu_3(x) = \alpha_3 \exp(\beta_3 x)$$

Η κύρια συμβολή στο *μ(x)* προέρχεται από το $\mu_1(x), \mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ στην παιδική ηλικία, την ενήλικη ζωή και γήρανση αντίστοιχα ενώ η συμβολή των υπολοίπων δύο όρων είναι ασήμαντη στα τρία αυτά διαστήματα.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Ο Wittstein[10] το 1883 πρότεινε το υπόδειγμα:

$$q_x = \frac{1}{m}\alpha^{-(mx)^n} + \alpha^{-(w-x)^n}$$

όπου:

q_x η πιθανότητα θανάτου και

w η ανώτατη δυνατή ηλικία ενώ

α, m παράμετροι που πρέπει να εκτιμηθούν.

Η υπόθεση στην οποία στηρίζεται αυτός ο τύπος είναι ότι οι αιτίες θανάτου μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες, εκείνες που επιδρούν στην παιδική ηλικία και εκείνες που επιδρούν στους ενήλικους και ηλικιωμένους.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Το 1889 ο Makeham πρότεινε μια δεύτερη έκφραση η οποία περιέχει ένα αθροιστικό όρο ακόμα από την αρχική του:

$$\mu(x) = \alpha + hx = bc^{x}$$

ή εναλλακτική σε όρους της $S(x)$:

$$S(x) = \exp\left(-\alpha x + \frac{h}{2}x^{2} - \frac{b}{\log c}(c^{x} - 1) \right)$$

Η εμπειρία έδειξε ότι και αυτό το μοντέλο είναι επιτυχές όταν εφαρμόζεται σε ενήλικους μόνο, στο ηλικιακό διάστημα δηλαδή που η ένταση θνησιμότητας αυξάνει με την ηλικία.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Ο Oppermann το 1870, πρότεινε ένα νόμο θνησιμότητας κατάλληλο μόνο για την περιγραφή της βρεφικής και παιδικής θνησιμότητας:

$$\mu(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x}$$

ή σε όρους της πιθανότητας επιβίωσης $S(x)$:

$$S(x) = \exp\left(-2\alpha\sqrt{x} - bx - \frac{2}{3}cx\sqrt{x} \right)$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Οι Βρετανοί αναλογιστές το 1932 έχοντας συνεχές ενδιαφέρον για την εξομάλυνση της κατά ηλικία θνησιμότητας μέσω παραμετρικών υποδειγμάτων, ανέπτυξαν τον τύπο του Perks [11]:

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = \alpha + b + c^x$$

Λίγα χρόνια αργότερα Βρετανοί βιολόγοι ανέπτυξαν μια σχέση ανάλογη εκείνης του Perk, όπου α=0, συνέδεσαν δηλαδή το $\ln\left(q_x / 1 - q_x\right)$ με μια ευθεία γραμμή:

$$\ln\left(\frac{q_x}{1-q_x}\right) = b + c \cdot x$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Κατασκευή ενός πλήρους πίνακα επιβίωσης

ΗΛΙΚΙΕΣ (x)	P_x	D_x	m_x	q_x	q'_x	l_x (S_x)	d_x	L_x	T_x	e_x
0	22570	217	9,614533	0,00961	0,00961	100000	961	99183	6941550	69,42
1	23319	19	0,814786	0,00081	0,00081	99039	80	98991	6842367	69,09
2	24774	4	0,161460	0,00076	0,00050	98959	49	98935	6743376	68,14
3	25745	5	0,194212	0,00019	0,00040	98910	40	98890	6644441	67,18
4	25648	12	0,467873	0,00047	0,00032	98870	32	98854	6545551	66,20
5	26001	12	0,461521	0,00046	0,00027	98838	27	98825	6446697	65,22
6	26736	6	0,224417	0,00022	0,00022	98811	22		6347872	64,24
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
95	71	22	309,859155	0,30986	0,46299	462	214	355	695	1,50
96	54	15	277,777778	0,27778	0,50453	248	125	186	340	1,36
97	30	14	466,666667	0,46667	0,54775	123	67	90	154	1,24
98	13	8	615,384615	0,61538	0,59219	56	33	40	64	1,13
99	11	6	545,454545	0,54545	0,63731	23	15	16	24	1,02
100	6	2	333,333333	0,33333	0,68244	8	5		8	1,00

q'x: εξομαλυμένες πιθανότητες θανάτου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- n: η διαφορά ανάμεσα στις διαδοχικές ακριβείς ηλικίες. Ο υποδείκτης αυτός που τίθεται αριστερά των συμβολισμών συνήθως παραλείπεται όταν ισούται με τη μονάδα (περίπτωση ενός πλήρους πίνακα)

- D_x: οι καταγραφέντες θάνατοι ατόμων ανά μονοετείς ηλικιακές ομάδες (ηλικία σε συμπληρωμένα έτη)

- P_x: ο μέσος πληθυσμός ανά μονοετείς ηλικιακές ομάδες (ηλικία σε συμπληρωμένα έτη).

- m_x: οι ειδικοί συντελεστές θνησιμότητας ανά μονοετείς ηλικιακές ομάδες. Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται ως λόγος των καταγραφέντων θανάτων ηλικίας x σε συμπληρωμένα έτη (D_x) προς το μέσο πληθυσμό P_x της ιδίας ηλικίας ($m_x = D_x / P_x$) και αποτελούν τη βάση για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων θανάτου του πίνακα επιβίωσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- q_x : οι πιθανότητες θανάτου ανάμεσα στην ακριβή ηλικία x και στην ακριβή ηλικία $x+1$ του πίνακα. Οι πιθανότητες αυτές υπολογίζονται με βάση τους πρότερα υπολογισθέντες ειδικούς συντελεστές θνησιμότητας ανά ηλικία (m_x), δεχόμενοι ότι *οι θάνατοι είναι ισοκατανεμημένοι σε κάθε ηλικία*. Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων αυτών από τους ειδικούς συντελεστές θνησιμότητας, για τις ομάδες 5-84 ετών σε έναν αναλυτικό πίνακα χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\boxed{q_x = \frac{2\ x\ m_x}{2 + m_x}}$$

εξειδίκευση ενός γενικότερου τύπου, ο οποίος ισχύει πάντοτε με δεδομένη την προαναφερθείσα υπόθεση (ισοκατανομή των θανάτων σε κάθε ηλικία),

$$\boxed{{}_nq_x = \frac{2 \times n \times {}_nm_x}{2 + n \times {}_nm_x}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στις πρώτες όμως ηλικίες της ζωής δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον προαναφερθέντα τύπο για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων θανάτου καθώς η υπόθεση της ισοκατανομής των θανάτων στις ηλικίες αυτές δεν ισχύει. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε:

1) *Για την ηλικία 0* τον τύπο[1]:

$$\boxed{q_0 = \frac{m_0}{1 + (1 - f) \times m_0}}$$

Όπου m_0 η βρεφική θνησιμότητα και f ο διαχωριστικός παράγοντας (*separator factor,*) ο οποίος στις ανεπτυγμένες χώρες εκτιμάται σε 0,1.

[1] Είναι προφανές ότι αν: α) οι θάνατοι είναι ισοκατενεμημένοι στη διάρκεια του πρώτου έτους της ζωής, β) η βρεφική θνησιμότητα δεν μεταβάλλεται από έτος σε έτος και γ) ο αριθμός των γεννήσεων δεν διαφέρει από χρόνο σε χρόνο, η πιθανότητα θανάτου στην ηλικία 0 ταυτίζεται με το δείκτη βρεφικής θνησιμότητας (θάνατοι βρεφών στη διάρκεια του έτους x / γεννήσεις ιδίου έτους), τότε το ποσοστό θνησιμότητας στην ηλικία 0 υπολογίζεται ως

$$\boxed{m_o = \frac{d_0}{N_0}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

2) *Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων θανάτου για τις ηλικίες 1-4* έτη τους τύπους Reed-Merrell

$$\boxed{{}_nq_x = 1 - e^{(-n \times {}_nm_x - 0.008 \times n^3 \times {}_nm_x{}^2)}}$$

οι οποίοι, για τις ηλικίες αυτές, εφόσον n=1, διαμορφώνονται ως εξής:

$$ {}_1q_1 = 1 - e^{(-{}_1m_1 - 0.008 \times {}_1m_1{}^2)}$$

$$ {}_1q_2 = 1 - e^{(-{}_1m_2 - 0.008 \times {}_1m_2{}^2)}$$

$$ {}_1q_3 = 1 - e^{(-{}_1m_3 - 0.008 \times {}_1m_3{}^2)}$$

$$ {}_1q_4 = 1 - e^{(-{}_1m_4 - 0.008 \times {}_1m_4{}^2)}$$

Τέλος, για τις ηλικίες 85 και άνω συνήθως δεν έχουμε δεδομένα ανά μονοετείς ηλικιακές ομάδες. Γι "κλείσουμε" τον πίνακά μας έχουμε αρκετές επιλογές, αλλά συνήθως χρησιμοποιούμε τα μον Gompertz ή Makeham[2] , τα οποία θεωρούν ότι η θνησιμότητα εξελίσσεται εκθετικά με την ηλικία. Σ περίπτωση αυτή, εάν χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του Gompertz, θα έχουμε:

$$\boxed{m_x = A \times m_{x-1}{}^x}$$

ενώ εάν χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του Makeham θα έχουμε

$$\boxed{m_x = A + B \times m_{x-1}{}^x}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- p_x: οι πιθανότητες επιβίωσης ανάμεσα στην ακριβή ηλικία *x* και στην ακριβή ηλικία *x+1*. Οι πιθανότητες αυτές είναι συμπληρωματικές των πιθανοτήτων θανάτου (*qx*), δηλ. *px*= 1 – *qx*

- *lx* ή *Sx*: οι επιβιώσαντες της πλασματικής γενεάς (με "ρίζα" 100.000 άτομα) στα διαδοχικά τους γενέθλια. Υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες επιβίωσης του πίνακα, ως εξής:

$$l_0 = 100000$$
$$l_1 = l_0 \times p_0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$l_x = l_{x-1} \times p_{x-1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$l_{\omega-1} = l_{\omega-2} \times p_{\omega-2}$$
$$l_\omega = 0$$

όπου ω η ηλικία στην οποία η υποθετική γενεά έχει πλέον εκλείψει.

- *dx*: οι θάνατοι του πίνακα επιβίωσης ανάμεσα σε δυο διαδοχικές ακριβείς ηλικίες που υπολογίζονται από τις πιθανότητες θανάτου. Οι πιθανότητες αυτές πολλαπλασιάζονται με τους επιβιώσαντες της υποτιθέμενης γενεάς στα διαδοχικά γενέθλια, ξεκινώντας από τη «ρίζα» της γενεάς αυτής (δηλ. 100.000 άτομα) με τον εξής τρόπο**:**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$
\begin{aligned}
&d_0 = l_0 \times q_0 \\
&d_1 = l_1 \times q_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&d_x = l_x \times q_x \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&d_\omega = 0
\end{aligned}
$$

Μπορούν όμως να υπολογισθούν εναλλακτικά και από τους επιβιώσαντες του πίνακα, ως:

$$
\begin{aligned}
&d_0 = l_0 - l_1 \\
&d_1 = l_1 - l_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&d_x = l_x - l_{x+1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&d_\omega = 0
\end{aligned}
$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- ${}_nL_x$**:** το πλήθος των επιζώντων του πίνακα στο μεσοδιάστημα ανάμεσα στις διαδοχικές επετείους.

  Υπολογίζονται ως εξής:

$$L_0 = l_0 - 0.25 \times d_0$$
$$L_1 = l_1 - 0.35 \times d_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$L_x = l_x + 1 + 0.5 \times d_x$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$L_\omega - 1 = 0..5 \times d_{\omega-1}$$

- T_x: το πλήθος των ετών ζωής (ανθρωποέτη) που βιώνουν συνολικά (αθροιστικά) οι επιζώντες του πίνακα στο μεσοδιάστημα ανάμεσα στις διαδοχικές επετείους από την ηλικία x και άνω (δηλ. από την ηλικία αυτή έως το τέλος της ζωής τους). Υπολογίζονται κατ' επέκταση ως το άθροισμα των L_x από την ηλικία x ως την ανώτατη ηλικία ω-1, και επομένως:

$$T_0 = \sum_{x=0}^{\omega-1} L_x$$
$$T_1 = T_0 - L_0$$
$$\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots$$
$$T_x = T_{x-1} - L_{x-1}$$
$$\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots$$
$$T_{\omega-1} = T_{\omega-2} - L_{\omega-2}$$

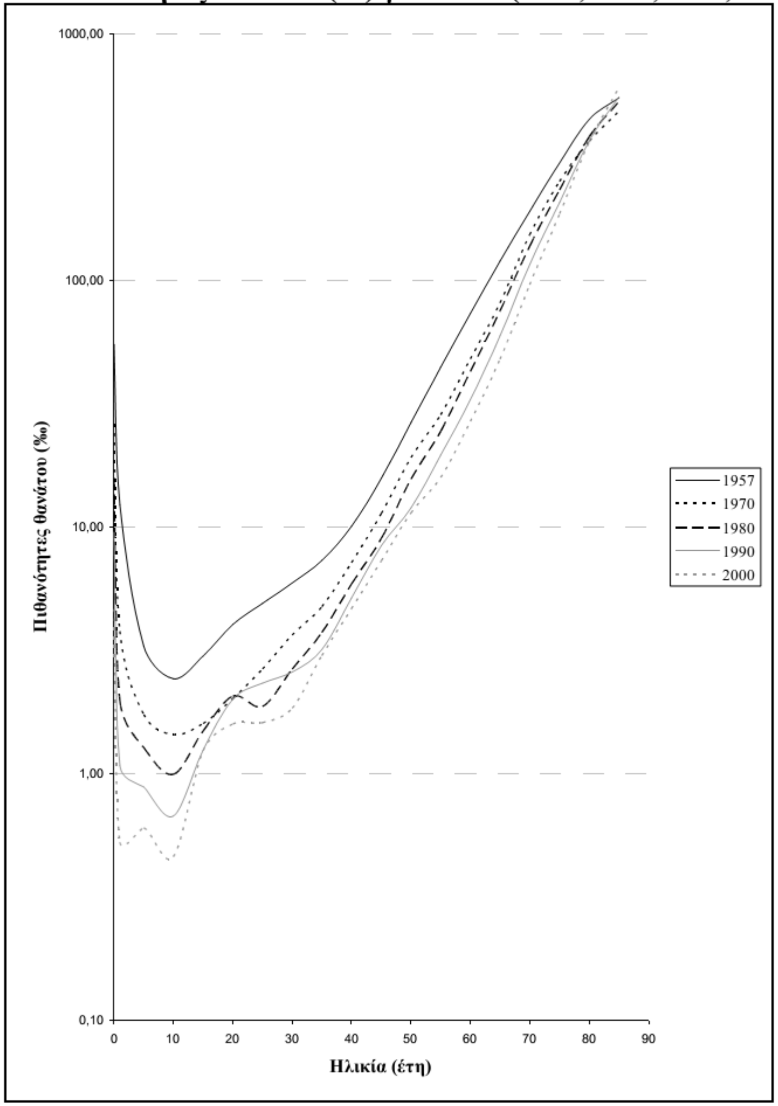
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- e_x: η προσδοκώμενη ζωή στην ηλικία x . Υπολογίζεται ως εξής:

$$\boxed{\begin{aligned} e_0 &= \frac{T_0}{l_0} \\ e_1 &= \frac{T_1}{l_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ &\ \ \ldots \\ e_x &= \frac{T_x}{l_x} \\ \ldots\ldots\ldots\ &\ \ \ldots \\ e_{\omega-1} &= \frac{T_{\omega-1}}{l_{\omega-1}} \end{aligned}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Διάγραμμα 1: Ελλάδα πιθανότητες θανάτου (‰) γυναικών (1957, 1970, 1980, 1990 και 2000)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Διάγραμμα 2: Ελλάδα, επιβιώσαντες στις ακριβείς ηλικίες (1957, 1970, 1980, 1990 και 2000)