1 Εκτιμητής Ελαχίστων Τετραγώνων στην απλή γραμμική παλινδρόμηση

Θεωρούμε το απλό γραμμικό μοντέλο (απλή γραμμική παλιδρόμηση) :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

Y_i είναι η απόκριση της i-οστής παρατήρησης, x_i η τιμή της συμμεταβλητής της i-οστής παρατήρησης και ϵ_i είναι το σφάλμα (δηλαδή η απόκλιση της παρατήρησης Y_i από την μέση τιμή της, $E(Y_i) = \mu_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$) . Θεωρούμε τα x ώς σταθερές τιμές κι όχι ως τ.μ.. Για τα σφάλματα υποθέτουμε πως είναι ομοσκεδαστικά ($var(\epsilon_i) = \sigma^2$) και ασυσχέτιστα ($cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ για $i \neq j$).

Εναλλακτικά το μοντέλο μπορεί να γραφτεί ώς:

$$\begin{aligned} Y_i|x_i &\sim (\mu_i, \sigma^2),\ cov(Y_i, Y_j|x_i, x_j) = 0,\ i \neq j \\ \mu_i &= \beta_0 + \beta_1 x_i,\ i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1.2}$$

Οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων είναι:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Σημείωση: Από τα παραπάνω προκύπτει πως $\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$, κι άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων περνάει από το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$.

Οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγωνικών σφαλμάτων, ήτοι είναι οι λύσεις του μαθηματικού προβλήματος

$$\min_{\beta_0, \beta_1} \sum \epsilon_i^2(\beta_0, \beta_1) \Leftrightarrow \min_{\beta_0, \beta_1} \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \tag{1.4}$$

Παραγωγίζοντας καταλήγουμε πως οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων προκύπτουν ως λύσεις των εκτιμητικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \sum \epsilon_i(\beta_0, \beta_1) &= \sum y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i = 0 \\ \sum x_i \epsilon_i(\beta_0, \beta_1) &= \sum x_i(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των Y:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \sum c_i Y_i,\ \text{με } c_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_{xx}} \\ \hat{\beta}_0 &= \sum d_i Y_i,\ \text{με } d_i = \frac{1}{n} - \frac{(x_i - \bar{x})\bar{x}}{S_{xx}}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

όπου

$$S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Για τους συντελεστες c_i, d_i ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \sum c_i = 0, \ \sum c_i^2 = \frac{1}{S_{xx}}, \ \sum c_i x_i = 1 \\ \sum d_i = 1, \ \sum d_i^2 = \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}, \ \sum d_i x_i = 0 \\ \sum c_i d_i = -\frac{\bar{x}}{S_{xx}} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός πως

$$\begin{aligned} E(\sum \alpha_r Y_r) &= \sum \alpha_r E(Y_r) \\ Cov(\sum \alpha_r Y_r, \sum \gamma_r Y_r) &= \sigma^2 \sum \alpha_r \gamma_r \end{aligned} \tag{1.8}$$

μπορούμε να αποδείξουμε πως

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_0) = \beta_0, \ Var(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 [\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}] \\ E(\hat{\beta}_1) = \beta_1, \ Var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 \frac{1}{S_{xx}} \\ Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\sigma^2 \frac{\bar{x}}{S_{xx}}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Οι προσαρμοσμένες τιμές (fits) και τα υπόλοιπα ή κατάλοιπα (residuals) ισούνται με

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \\ \hat{\epsilon}_i &= Y_i - \hat{Y}_i. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Η προσαρμοσμένη τιμή $\hat{Y}_i$ είναι απλά η εκτίμηση της μέσης τιμής $\mu_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$. Σύγχρόνως είναι και πρόβλεψη της τιμής της απόκρισης Y για μια νέα παρατήρηση με τιμή της συμμεταβλητής ίση με x_i. Καθοτι η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων περνάει από το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$, ισχύει πως $\sum \hat{Y}_i = \sum Y_i$. Επίσης από τις εκτιμητικές εξισώσεις (1.5) προκύπτει πως $\sum \hat{\epsilon}_i = 0$ και $\sum x_i \hat{\epsilon}_i = 0$

Οι προσαρμοσμένες τιμές και τα υπόλοιπα είναι γραμμικοί συνδυασμοί των παρατηρήσεων $Y_1, \ldots, Y_n$:

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_i &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i = \sum_{j=1}^{n} (d_j + x_i c_j) Y_j \\
\hat{\epsilon}_i &= Y_i - \hat{Y}_i = \sum_{j=1}^{n} [\delta_{[j=i]} - (d_j + x_i c_j)] Y_j, \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

όπου $\delta_{[j=i]} = 1$ όταν $j = i$ και ισούται με 0 όταν $j \neq i$.

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα στις εξισώσεις (1.8) μπορούμε να δείξουμε πώς

$$\begin{aligned}
E(\hat{Y}_i) = \mu_i = \beta_0 + \beta_1 x_i \quad &, \quad var(\hat{Y}_i) = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}}) \\
E(\hat{\epsilon}_i) = 0 \quad &, \quad var(\hat{\epsilon}_i) = \sigma^2 (1 - \frac{1}{n} - \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}}) \\
cov(\hat{\epsilon}_i, \hat{\epsilon}_j) = -\sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{S_{xx}}) \quad &, \quad cov(\hat{\epsilon}_i, \hat{\beta}_0) = 0 \\
cov(\hat{\epsilon}_i, \hat{\beta}_1) = 0 \quad &, \quad cov(\hat{\epsilon}_i, \hat{Y}_j) = 0 \ \forall i, j \\
cov(\hat{\epsilon}_i, \bar{Y}) = 0 \quad &, \quad cov(\hat{\beta}_i, \bar{Y}) = 0 \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Μια απερόληπτη εκτίμηση της διασποράς των σφαλμάτων δίνεται από την $s^2 = \frac{\sum \hat{\epsilon}_i^2}{n-2} = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}$. Δηλαδή, ισχύει πως

$$E(s^2) = E(\frac{\sum \hat{\epsilon}_i^2}{n-2}) = E(\frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}) = \sigma^2. \qquad (1.13)$$

2 Κανονική Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση

Το κανονικό απλό γραμμικό μοντέλο γράφεται ως

$$\begin{aligned}
Y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \ i = 1, \ldots, n, \\
\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n &\sim^{iid} N(0, \sigma^2), \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

ή εναλλακτικά

$$\begin{aligned}
Y_i | x_i &\sim^{ind} N(\mu_i, \sigma^2), \ i = 1, \ldots, n, \\
\mu_i &= \beta_0 + \beta_1 x_i \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Η υπόθεση κανονικότητας μαζι με τα αποτελέσματα στο προηγούμενο κεφάλαιο συνεπάγονται τα εξής:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim MVN(\boldsymbol{\beta}, \Sigma) \quad ,$$
$$\hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, \sigma^2[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}]) \quad , \quad \hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma^2 \frac{1}{S_{xx}}), \tag{2.3}$$

όπου η 1η πρόταση παραπάνω απλά αναφέρει πως το 2×1 διάνυσμα των εκτιμητριών

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}$$

ακολουθεί πολυμεταβλητή κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων $\mathbf{\Sigma}$, όπου

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} var(\hat{\beta}_0) & cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & var(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\hat{\beta}_0} & \sigma_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \\ \sigma_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} & \sigma^2_{\hat{\beta}_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}] & -\sigma^2 \frac{\bar{x}}{S_{xx}} \\ -\sigma^2 \frac{\bar{x}}{S_{xx}} & \sigma^2 \frac{1}{S_{xx}} \end{bmatrix}$$

Μία άμεση συνέπεια του αποτελέσματος στην (2.3) είναι πως κάθε γραμμικός συνδυασμός των εκτιμητριών $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ ακολουθούν κανονική κατανομή. Συγκεκριμένα, έστω l_1, l_2 πραγματικοί αριθμοί (όχι και τα 2 ίσα μηδέν). Τότε

$$l_1\hat{\beta}_0 + l_2\hat{\beta}_1 \sim N(l_1\beta_0 + l_2\beta_1, l_1^2\sigma^2_{\hat{\beta}_0} + l_2^2\sigma^2_{\hat{\beta}_1} + 2l_1l_2\sigma_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1}), \tag{2.4}$$

από όπου προκύπτει πως

$$\frac{l_1\hat{\beta}_0 + l_2\hat{\beta}_1 - (l_1\beta_0 + l_2\beta_1)}{\sigma\sqrt{l_1^2[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}] + l_2^2\frac{1}{S_{xx}} - 2l_1l_2\frac{\bar{x}}{S_{xx}}}} \sim N(0, 1). \tag{2.5}$$

Από τα αποτελέσματα στη (1.12) σε συνδυασμό με την υπόθεση κανονικότητας προκύπτει πως τα υπόλοιπα, $\hat{\epsilon}_i$, είναι στατιστικά ανεξάρτητα των εκτιμητριών, $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$. Άρα τα υπόλοιπα, $\hat{\epsilon}_i$, είναι ανεξάρτητα και του γραμμικού συνδυασμού $l_1\hat{\beta}_0 + l_2\hat{\beta}_1$. Τέλος, καθότι $s^2 = \frac{\sum \hat{\epsilon}_i^2}{n-2}$ είναι συνάρτηση των υπολοίπων, $\hat{\epsilon}_i$, έχουμε πως $l_1\hat{\beta}_0 + l_2\hat{\beta}_1$ και s^2 είναι στατιστικά ανεξάρτητα.

Αργότερα θα δείξουμε πως, κάτω από την υπόθεση κανονικότητας των σφαλμάτων, έχουμε πως

$$(n-2)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}. \tag{2.6}$$

Από τα αποτελέσματα στις (2.5) και (2.6) έχουμε

$$\frac{\frac{l_1\hat{\beta}_0+l_2\hat{\beta}_1-(l_1\beta_0+l_2\beta_1)}{\sigma\sqrt{l_1^2[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}]+l_2^2\frac{1}{S_{xx}}-2l_1l_2\frac{\bar{x}}{S_{xx}}}}}{\sqrt{(n-2)\frac{s^2}{\sigma^2}/(n-2)}}$$

$$= \frac{l_1\hat{\beta}_0+l_2\hat{\beta}_1-(l_1\beta_0+l_2\beta_1)}{s\sqrt{l_1^2[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}]+l_2^2\frac{1}{S_{xx}}-2l_1l_2\frac{\bar{x}}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}. \tag{2.7}$$

2.1 Συμπερασματολογία για παραμέτρους, Διάστημα εμπιστοσύνης, Διάστημα εμπιστοσύνης

Βάσει του αποτελέσματος στην (2.7) ένα $100(1-a)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τον γραμμικό συνδυασμό $l_1\beta_0+l_2\beta_1$ δίνεται από:

$$l_1\hat{\beta}_0+l_2\hat{\beta}_1 \pm t_{n-2;\frac{\alpha}{2}} s\sqrt{l_1^2[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}]+l_2^2\frac{1}{S_{xx}}-2l_1l_2\frac{\bar{x}}{S_{xx}}},$$

όπου $t_{n-2;\alpha/2}$ είναι τό <u>άνω</u> $\alpha/2$ ποσοστιαίο σημείο της t_{n-2} κατανομής.

Επίσης ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης $H_o:\ l_1\beta_0+l_2\beta_1=r$ έναντι της δίπλευρης εναλλακτικής $H_a:\ l_1\beta_0+l_2\beta_1\neq r$, σε επίπεδο σημαντικότητας α απορρίπτει την μηδενική όταν

$$\frac{|l_1\hat{\beta}_0+l_2\hat{\beta}_1-r|}{s\sqrt{l_1^2[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}]+l_2^2\frac{1}{S_{xx}}-2l_1l_2\frac{\bar{x}}{S_{xx}}}} > t_{n-2;\frac{\alpha}{2}}.$$

Ειδικές περιπτώσεις ενδιαφέροντος:

1) Για την κλίση της ευθείας παλινδρόμησης παίρνουμε $l_1=0$ και $l_2=1$. Ειδικά, για να ελέγξουμε τη στατιστική σημαντικότητα της παλινδρόμησης κάνουμε τον έλεγχο $H_0:\beta_1=0$ έναντι της δίπλευρης εναλλακτικής. Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται όταν

$$\frac{|\hat{\beta}_1|}{s\sqrt{\frac{1}{S_{xx}}}} > t_{n-2;\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.8}$$

2) Για την μέση τιμή της απόκρισης σε καθορισμένη τιμή της συμμεταβλητής x_0, δηλαδή για την $\mu_0=\beta_0+\beta_1x_0$, παίρνουμε $l_1=1$ και $l_2=x_0$. Έτσι για

παράδειγμα, ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης για την μέση τιμή $\mu_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0$ δίνεται από

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 &\pm t_{n-2;0.025} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{Sxx}} \\ \hat{Y}_0 &\pm t_{n-2;0.025} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{Sxx}} \end{aligned}$$

Διάστημα Πρόβλεψης μιας καινούργιας τιμής της απόκρισης για συγκεκριμένη τιμή, x_0, της συμμεταβλητής.

Έστω πως θέλουμε να προβλέψουμε μια νέα τιμη Y_0 δοθέντος συγκεκριμένης τιμης της συμμεταβλητής, x_0. Π.χ. έστω πως θέλουμε να προβλεψουμε την τιμή της FEV γιά ένα παιδί με ύψος 65 ίντσες (εννοείται πως δεν αναφερόμαστε σε παιδί που ήδη παρατηρήσαμε την τιμή του, υπάρχει δηλαδή η παρατήρησή του στην βάση δεδομένων). Θέλουμε δηλαδή να προβλέψουμε την τυχαία μεταβλητή $Y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \epsilon_0$. Μπορεί να αποδειχθεί πως η βέλτιστη γραμμική πρόβλεψη της Y_0 (με κριτήριο το μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης) είναι η $\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$. Η πρόβλεψη $\hat{Y}_0$ είναι προφανώς ανεξάρτητη της τ.μ. που θέλουμε που θέλουμε να προβλέψουμε, Y_0 (γιατί;). Παρατηρούμε πως η πρόβλεψη της Y_0 είναι ίδια με την αμερόληπτη εκτίμηση της μέσης τιμής $\mu_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0$.

Για το σφάλμα της της πρόβλεψης $Y_0 - \hat{Y}_0$ ισχύουν

$$\begin{aligned} E(Y_0 - \hat{Y}_0) &= 0 \\ Var(Y_0 - \hat{Y}_0) &= Var(Y_0) + Var(\hat{Y}_0) = \sigma^2 (1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{Sxx}) \quad (2.9) \end{aligned}$$

που μαζί με την υπόθεση κανονικότητας μας δίνει

$$\frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{Sxx}}} \sim N(0, 1). \quad (2.10)$$

Ισχύει πως $Y_0 - \hat{Y}_0$ και s^2 είναι ανεξάρτητα (καθώς $Y_0, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ είναι ανεξάρτητα της s^2). Άρα, το αποτέλεσμα στην (2.10) σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα στην (2.6) μας δίνει

$$\frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{Sxx}}} \sim t_{n-2}, \quad (2.11)$$

από όπου προκύπτει πως ισχύει ότι

$$P(\hat{Y}_0 - t_{n-2;\frac{\alpha}{2}} s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{Sxx}} < Y_0 < \hat{Y}_0 + t_{n-2;\frac{\alpha}{2}} s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{Sxx}}) = 1 - \alpha.$$

Το διάστημα

$$\hat{Y}_0 \quad \pm \quad t_{n-2;\frac{\alpha}{2}} s\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{Sxx}}$$

λέγεται ένα $100(1-\alpha)\%$ Διάστημα Πρόβλεψης της Y_0.

2.2 Διάσπαση χ^2, ANOVA

Λήμμα 1. *Έστω $U = U_1 + U_2$. Άν $U \sim \chi^2_k$, $U_1 \sim \chi^2_l$, με $k > l$ και U_1 είναι ανεξάρτητη της U_2, τότε $U_2 \sim \chi^2_{k-l}$*

Απόδειξη. Για της ροπογεννήτριες των τ.μ. ισχύει, λόγω ανεξαρτησίας των U_1 και U_2

$$M_U(t) = M_{U_1}(t)M_{U_2}(t)$$

Η ροπογεννήτρια μιας τ.μ. με χ^2_ν κατανομή ισούται με

$$M(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\nu/2}},\ t, 1/2$$

και συνεπώς ισχύει

$$\frac{1}{(1-2t)^{k/2}} = \frac{1}{(1-2t)^{l/2}}(t)M_{U_2}(t),$$

κι άρα

$$M_{U_2}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{(k-l)/2}}(t).$$

Καθώς η ροπογεννήτρια (όταν υπάρχει) καθορίζει την κατανομή, συμπεραίνουμε πως $U_2 \sim \chi^2_{k-l}$. □

Θεώρημα 2. *Σε μιά απλή γραμμική παλινδρόμηση με ομοσκεδαστικά και ασυσχέτιστα σφάλματα που ακολουθούν κανονική κατανομή ισχύουν:*

$$\begin{array}{ccc} (n-2)\dfrac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2} & \Leftrightarrow & \dfrac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2} \\ \dfrac{\hat{\beta}_1^2 S_{XX}}{\sigma^2} \sim^{H_0} \chi^2_1 & \Leftrightarrow & \dfrac{SSR}{\sigma^2} \sim^{H_0} \chi^2_1 \\ SSE \perp\!\!\!\perp SSR, & & \end{array}$$

όπου $H_0 : \beta_1 = 0$.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \hat{\epsilon}_i + (\epsilon_i - \hat{\epsilon}_i) \\ &= \hat{\epsilon}_i + (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i - Y_i + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) \\ &= \hat{\epsilon}_i + (\hat{\beta}_0 - \beta_0) + (\hat{\beta}_1 - \beta_1) x_i. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Γνωρίζουμε πως

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \beta_0 + \beta_1 \bar{x} + \bar{\epsilon} \\ \bar{Y} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ &\Longrightarrow (\hat{\beta}_0 - \beta_0) = -(\hat{\beta}_1 - \beta_1)\bar{x} - \bar{\epsilon}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Από τις (2.13) και (;;) προκύπτει

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \hat{\epsilon}_i + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)(x_i - \bar{x}) - \bar{\epsilon} \Longrightarrow \\ \epsilon_i^2 &= \hat{\epsilon}_i^2 + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 (x_i - \bar{x})^2 + \bar{\epsilon}^2 \\ &+ 2(\hat{\epsilon}_i(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(x_i - \bar{x}) - \hat{\epsilon}_i \bar{\epsilon} - (\hat{\beta}_1 - \beta_1)(x_i - \bar{x})\bar{\epsilon}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

. Από τις εκτιμητικές εξισώσεις στη (1.5) έχουμε πως

$$\begin{aligned} \sum \hat{\epsilon}_i &= 0 \\ \sum x_i \hat{\epsilon}_i &= 0 \\ \Longrightarrow \sum (x_i - \bar{x}) \hat{\epsilon}_i &= 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Από τις (2.14) και (2.15) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum \epsilon_i^2 &= \sum \hat{\epsilon}_i^2 + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 + n\bar{\epsilon}^2 \Longrightarrow \\ \frac{\sum \epsilon_i^2}{\sigma^2} &= \frac{\sum \hat{\epsilon}_i^2}{\sigma^2} + \frac{(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 S_{xx}}{\sigma^2} + \frac{n\bar{\epsilon}^2}{\sigma^2} \end{aligned} \tag{2.16}$$

. Καθότι τα ϵ_i είναι ένα τυχαίο δείγμα από την $N(0, \sigma^2)$ κατανομή έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} \sum \epsilon_i^2 &\sim \chi_n^2 \\ \bar{\epsilon} &\sim N(0, \frac{\sigma^2}{n}) \Longrightarrow \frac{1}{\sigma^2} n\bar{\epsilon}^2 \sim \chi_1^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

. Από την (2.3) έχουμε

$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma^2 \frac{1}{S_{xx}}) \Longrightarrow \frac{(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 S_{xx}}{\sigma^2} \sim \chi_1^2. \tag{2.18}$$

Τα αποτελέσματα στη (1.12) μαζί με την υπόθεση κανονικότητας συνεπάγονται πως

Α) $\frac{\sum \hat{\epsilon}_i^2}{\sigma^2} \perp\!\!\!\perp \frac{(\hat{\beta}_1-\beta_1)^2 S_{xx}}{\sigma^2}$

Β) $\frac{\sum \hat{\epsilon}_i^2}{\sigma^2} \perp\!\!\!\perp \frac{n\bar{\epsilon}^2}{\sigma^2}$ (καθότι $\bar{\epsilon} = \bar{Y} - \beta_0 - \beta_1 \bar{x}$)

Γ) $\frac{(\hat{\beta}_1-\beta_1)^2 S_{xx}}{\sigma^2} \perp\!\!\!\perp \frac{n\bar{\epsilon}^2}{\sigma^2}$.

Από τις τρεις παραπάνω προτάσεις προκύπτει πως $\frac{(\hat{\beta}_1-\beta_1)^2 S_{xx}}{\sigma^2} + \frac{n\bar{\epsilon}^2}{\sigma^2} \sim \chi_2^2$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα παραπάνω παίρνουμε το πρώτο αποτέλεσμα του θεωρήματος. Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει από την (2.18) και το γεγονός πως η μηδενική υπόθεση λέει πως $\beta_1 = 0$. $\square$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει ο F έλεγχος της στατιστικής σημαντικότητας της παλινδρόμησης, δηλαδή της $H_0 : \beta_1 = 0$ έναντι της δίπλευρης εναλλακτικής. Καθότι $\frac{SSR}{\sigma^2} \sim^{H_0} \chi_1^2$, $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi_{n-2}^2$, και $SSR \perp\!\!\!\perp SSE$ έχουμε πως

$$\frac{MSR}{MSE} = \frac{SSR/1}{SSE/n-2} \sim^{H_0} F_{1,n-2}, \tag{2.19}$$

με αποτέλεσμα η $H_0 : \beta_1 = 0$ να απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α όταν η παρατηρηθείσα τιμή της σ.σ.ε. $F = \frac{MSR}{MSE} > F_{1,n-2;\alpha}$. Μπορεί να δειχθεί πως ο παραπάνω έλεγχος είναι ισοδύναμος του ελέγχου στην (2.8).