

# Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου κατά Markowitz

2 Απριλίου 2021

Έστω  $X : n \times m$  πίνακας σχεδιασμού.

1. Να δείξετε ότι ο πίνακας διασπορών -συνδιασπορών  $X^T \cdot X (m \times m)$  των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων  $w \in R^m$  είναι ευθύ άθροισμα των ιδιοχώρων του.
2. Δεδομένης της τιμής της διασποράς του χαρτοφυλακίου  $w$   $\sigma^2(w) = w^T \cdot X^T \cdot X \cdot w$  του χαρτοφυλακίου-το  $w$  εννοείται ως διάνυσμα -στήλη, να δείξετε ότι υπάρχει μέγιστη απόδοση  $w^T \cdot \mu$  αν  $\mu \in R^m$  είναι η θέσης επί του μοναδιαίου χαρτοφυλακίου  $e_m$  που πληρώνει (αύριο) μία νομισματική μονάδα ανά μονάδια απόδοσης.
3. Δεδομένης μίας τιμής της απόδοσης  $w^T \cdot \mu = q$  του χαρτοφυλακίου  $w$ , να δείξετε ότι η ελάχιστη διασπορά  $\sigma^2(w) = w^T \cdot X^T \cdot X \cdot w$  ανήκει στον ιδιοχώρο της ελάχιστης ιδιοτιμής του  $X^T \cdot X$ .
4. Αν θέλουμε να προσδιορίσουμε το χαρτοφυλάκιο  $w$  που μεγιστοποιεί την απόδοση  $w^T \cdot \mu$  και ταυτόχρονα ελαχιστοποιεί τη διασπορά  $w^T \cdot X^T \cdot X \cdot w$  να παρατήσετε γραφικά το σύνολο αυτών των χαρτοφυλακίων σε ένα σύστημα αξόνων με τετμημένη την τιμή της απόδοσης και τεταγμένη την τιμή της διασποράς.
5. Χρησιμοποιώντας αποδόσεις από ένα χαρτοφυλάκιο  $w$  που αποτελείται από 3 χρηματοοικονομικούς τίτλους της αρεσκείας σας, έχοντας υπόψιν τις τιμές κλεισίματος για 10 ημέρες συναλλαγών και υποθέτοντας ότι αύριο με το άνοιγμα των αγορών οι αποδόσεις των τίτλων θα παραμείνουν ίδιες, να προσδιορίσετε τον πίνακα  $X$  και τον πίνακα  $X^T \cdot X$ .