1

Σύνθετες κατανομές (Σ.Κ)
(σ.κ)

Ορισμός 1: Μια σ.κ. ορίζεται να είναι μια κατανομή με ένα διακριτό τμήμα (πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο τιμών) και ένα "συνεχές" τμήμα* (του οποίου δηλαδή ο πληθικός αριθμός είναι ο πληθικός αριθμός του $\mathbb{R}$). (* του συνόλου τιμών)

Συμβολισμός 1: Το διακριτό τμήμα του συνόλου τιμών συμβολίζεται με R_d και το "συνεχές" τμήμα με R_c.

Παρατήρηση 1: Συνήθως $R_c \cap R_d = \emptyset$, αλλά όχι απαραίτητα.

2

Για το διακριτό τμήμα δηλ. το R_d

ισχύει ότι $\tilde{p}(X_d = k) = \tilde{p}_k > 0$.

Αν το k είναι πεπερασμένο

τότε ο δείκτης k παίρνει

τιμές $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Αν το διακριτό τμήμα είναι

αριθμήσιμο, τότε ο δείκτης k

παίρνει τιμές σε όλο το σύνολο

των φυσικών, δηλ. $k \in \mathbb{N}$.

3

Για το συνεχές τμήμα δηλ. το R_c ισχύει ότι η συνάρτηση πυκνότητας $\tilde{p}(x)^{**}$ παίρνει θετικές τιμές στο $\mathbb{R}$ (**, εδώ υποθέτουμε ότι $R_c \cap R_d \neq \emptyset$)

Η βασική σχέση που ικανοποιούν οι σ.κ είναι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_k + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(x)\,dx = 1$$

$$1 > \alpha > 0 \qquad 0 < 1-\alpha < 1$$

$$\left[** \tilde{p}\,(X_c = x) \right]$$

4

Παρατήρηση: Αν το R_d είναι πεπερασμένο, τότε:

$$\sum_{k=0}^{m} \tilde{p}_k = a \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \ldots, m$$

Αν το R_d είναι αριθμήσιμος τότε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_k = a.$$

Παρομοίως, αν το R_c είναι το $[0, +\infty)$, τότε $\int_0^{+\infty} \tilde{p}_{a}(x)\,dx = 1 - a$

ή αν είναι όλο το $\mathbb{R}$, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(x)\,dx = 1 - a.$$

5

Αν διαιρέσουμε το $\tilde{p}_k$ με το $a>0$

τότε θέτω $p_k = \frac{\tilde{p}_k}{a}$

και αν το R_d είναι πεπερασμένο

τότε $\sum_{k=0}^{m} p_k = 1$ ή

αν είναι αριθμήσιμο

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

δηλαδή οι p_k ~~είναι~~ γίνουν μία τυπική

κατανομή

είτε με πεπερασμένο πλήθος

δυνατών τιμών, π.χ

γεωμετρική, διωνυμική

είτε αντίστοιχα με αριθμήσιμο

δυνατών τιμών

πλήθος τιμών, όπως π.χ η Poisson

με παράμετρο λ.

6

Στην περίπτωση όπου το R_C είναι το $(-\infty, +\infty)$ δηλ. το $\mathbb{R}$, παράδειγμα αποτελεί η κανονική κατανομή, όπου

$$p(x) \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ άρα}$$

$$\tilde{p}(x) \sim N\left(\frac{\mu}{1-a}, \frac{\sigma^2}{\sqrt{(1-a)^2}}\right)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sqrt{1-a}}\right)^2$$

Αν το R_C είναι το $[0, +\infty)$ όπως συνήθως απαιτείται στον αναλογισμό (οι τυχαίες μεταβλητέ αντιστοιχούν σε αποζημιώσεις,

τότε η $p(x)$ μπορεί

να είναι η συνάρτηση

πυκνότητας μιας κατανομής

Pareto, με παραμέτρους y_m και β

δηλ. $p(x) = \dfrac{\beta y_m^{\beta}}{x^{\beta+1}}$, όπου

$y_m, \beta > 0$ και $x \in [y_m, +\infty)$

Στην περίπτωση αυτή αν π.χ. $y_m = 1$

$$\int_0^{+\infty} \tilde{p}(x)\, dx = 1 - q$$

18

Άσκηση:

1i) Αν το διακριτό τμήμα της μικτής είναι $p_k = \mathbb{P}(X_d = k)$, όπου η X_d είναι γεωμετρική, να βρεθούν τα $\tilde{p}_0$, $\tilde{p}_1 = 1 - \tilde{p}_0$ τ.ω. $\sum_{k=0}^{1} \tilde{p}_k = a$.

1ii) Αν το διακριτό τμήμα της μικτής είναι κρουστικό, π.χ Poisson με παράμετρο λ για την X_d,

δηλ $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}_{= p_k} = 1$

Ποιο είναι το $\tilde{\lambda}$, τ.ω. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\tilde{\lambda}} \frac{(\tilde{\lambda})^k}{k!} = a$

όπου $\tilde{p}_k = e^{-\tilde{\lambda}} \dfrac{(\tilde{\lambda})^k}{k!}$, $k \in N$

για κάποιο $\alpha \in (0,1)$.

1iii) Στο παράδειγμα της Pareto, δηλ. αν το συνεχές τμήμα $X_c \sim$ Pareto με $y_m = 1$,

ποιό είναι το $\tilde{\beta}$ τ.ω.

$$\int_0^{+\infty} \tilde{p}(x)\,dx = 1-\alpha,$$

δηλ.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\beta}}{x^{(\tilde{\beta}+1)}}\,dx = 1-a,$$

για κάποιο $\alpha \in (0,1)$.

$\boxed{10}$

Για να γίνει ακόμη πιο ξεκάθαρο το τι είναι μία μεικτή κατανομή είναι η κατανομή μίας τυχαίας μεταβλητής X που γράφεται ως

$$X = X_d + X_c$$ και

$$\mathbb{P}(X = x) = \underbrace{P(X_d = k)}_{= \tilde{p}_k} + \underbrace{P(X_c = x)}_{= \tilde{p}(x)}$$

$k = 0, 1, \dots m$ ή $k \in \mathbb{N}$ | π.χ. $x \in \mathbb{R}$ ή $x \in \mathbb{R}_+$