Παραδείγματα:

1)

Αν σε μία αγορά χρημ. συμβολαίων με δύο συμβόλαια και δύο καταστάσεις έχουμε $V_1 = \begin{bmatrix} 1,1 & 2 \\ 1,1 & 3 \end{bmatrix}$ τότε αυτή είναι πλήρης.

Αν $V_2 = \begin{bmatrix} 1,1 & 2 \\ 1,1 & 2 \end{bmatrix}$ αυτή δεν είναι πλήρης.

2) Αν $V_1 = \begin{bmatrix} 1+r & 1 \\ 1+r & 2 \end{bmatrix}$ τότε

$(r>0)$ ↓ επιτόκιο.

ας υποθέσουμε ότι

$q = (1, 1)$

τότε $W = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1+r & 1 \\ 1+r & 2 \end{bmatrix}$.

Τότε η αγορά αυτή είναι πλήρης αλλά υπάρχει arbitrage αφού για το χαρτοφυλάκιο

$z = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$ έχουμε:

$$W \cdot z = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1+r & 1 \\ 1+r & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 1+r \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι το payoff

T^* του χαρτοφυλακίου

αυτού έχει όλες

του τις συντεταγμένες

θετικές ή μηδέν.

Άρα η αγορά αυτή

έχει arbitrage, ενώ

είναι πλήρης.

3

$$* \quad T = W \cdot z = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 1+r \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε επίσης

ότι αν $\pi = (1, \pi_1)$ με

$$\pi_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

η τιμή φ για τα δύο

συμβόλαια της

αγοράς

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1+r & 1 \\ 1+r & 2 \end{bmatrix}$$ είναι

$$q = \pi_1 \cdot V_1 = \left[\frac{2+2r}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

Αφού η αγορά είναι πλήρης

θα υπαρχει ένα και μοναδικό

risk-neutral ζεύγος

πιθανοτήτων για τις δύο

καταστάσεις του κόσμου

το οποίο αφού $\Pi = (1, \Pi_1)$

θα ειναι

5

6

$$m = \pi_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

αφού ο συντελεστής

ανατοκισμού

μεταξύ της περιόδου 0

και της περιόδου 1

έχει ληφθεί υπόψιν

και είναι $(1+r)$ με

$r>0$.

Ασκήσεις.

1) Αν σε μία αγορά με δύο χρημ. συμβόλαια και δύο καταστάσεις όπου ο

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

, να δείξετε ότι i) η αγορά είναι πλήρης

ii) προσδιορίστε μία non-arbitrage τιμή $(q_1, q_2) = q$ χρησιμοποιώντας το $\pi = (1, \pi_1)$ με $\pi_1 = (2, 1)$

2) Το ίδιο αν $V = \begin{bmatrix} 1+r & 2 \\ 2\cdot(1+r) & 4 \end{bmatrix}$ με $r>0$

να δείξετε ότι

i) η αγορά δεν είναι πλήρης

ii) Να βρείτε μια non-arbitrage τιμή q χρησιμοποιώντας το $\pi_1 = (1, 2)$

iii) Να αναφέρετε ποιος είναι ο W για την τιμή q.

9

ζ) Στην αγορά της άσκησης

2 :

i) Υπάρχει άλλη που arbitrage τιμή ? για τα συμβόλαια (q_1, q_2)

ii) Να αναφέρετε ποιες είναι οι risk neutral πιθανότητες για το Π_1 της προηγ. άσκησης.

iii) Υπάρχει άλλο ζεύγος risk neutral πιθανοτήτων για τις δύο καταστάσεις ?

Για να απαντήσετε στο ερώτημα

iii) να λάβετε υπ' όψιν

ότι $\mathbb{R}^{\overset{3}{\overset{\shortparallel}{s+1}}} = \langle w \rangle \oplus \langle w \rangle^{\perp}$

άρα

$$\dim \langle w \rangle^{\perp} = 2.$$

10