30/9 - 1/10/19 ①

$B = \max\{r, \frac{3}{10} r + \frac{1}{10} r'\}$

Μοντέλο ισορροπίας των Arrow-Debreu

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο καταναλωτές $i=1,2$ και δύο αγαθά, στην οικονομία υπάρχει ελεύθερος ανταγωνισμός, άρα οι καταναλωτές αντιμετωπίζουν εξωγενείς τιμές για τα αγαθά που καταναλώνουν (κανένας από αυτούς τους δύο καταναλωτές δεν έχει δύναμη αγοράς market power) ώστε να έχει τη δυνατότητα να επηρεάζει τις τιμές των αγαθών κατά την περίοδο οι δύο καταναλωτές αντιμετωπίζουν τις ίδιες τιμές για τα αγαθά που καταναλώνουν (πλήρης πληροφόρηση)

Εισόδημα $m_i > 0$

τιμές $p = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 > 0$

$x^i = (x_1^i, x_2^i)$, $i = 1,2$

$x_1^i, x_2^i \geq 0$

$w^i = (w_1^i, w_2^i)$ αρχικός πλούτος

$m_i = p_1 w_1^i + p_2 w_2^i = p w^i$

$= p_1 x_1^i + p_2 x_2^i = p x^i$

$p \cdot x^i \leq m_i = p w^i$

$B(p, w^i) = \{(x_1^i, x_2^i) \in \mathbb{R}^2_+ \mid p \cdot x^i \leq p w^i\}$

Από λήμμα ακόρεστων προτιμήσεων

$B(p, w^i) = \{(x_1^i, x_2^i) \mid p x^i = p \cdot w^i\}$

Από ουσιαστικά αυξανόμενος περιορισμός

$\max\{u^i(x_i) \mid x^i \in B(p, w^i)\}$

$w^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$

$x \geq y$ $x, y \in \mathbb{R}$ (απλά διατεταγμένα)

$x, y \in \mathbb{R}^2$

$x \geq y \Leftrightarrow x_1 \geq y_1$ και $x_2 \geq y_2$

Αν $x \geq y \Rightarrow u(x) \geq u(y)$ ή $x, y$ γνησίως [illegible]

$\Pi_2(x_1,x_2) = x_2$

$u(x_1,x_2) = g(\underbrace{\Pi_1(x_1,x_2)}_{x_1}, \underbrace{\Pi_2(x_1,x_2)}_{x_2})$

(2) Εργ.

$u(x_1,x_2) = a\log(x_1) + b\log(x_2) \quad a,b>0$ (*)

$w \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ '1-1' και επί και συνεχής.

$h_1 = h \circ u_1$ , $h_2 = h^{-1} \circ h \circ u_1 = u_1$

Από (*): $h(x) = e^x$

$u \circ h(x) = e^{a\log(x_1) + b\log(x_2)}$

$= x_1^{a} \cdot x_2^{b}$ (Cobb-Douglas)

$h_2 \circ h_1(x_1,x_2) = x_1^{a} \cdot x_2^{b} = x^{\frac{1}{a+b}}$

$h_3 = h_2 \circ h_1 : (x_1,x_2) \to x_1^{a/a+b} + x_2^{b/a+b}$

$(x_1,x_2) \geq (y_1,y_2) \Rightarrow h_3(x_1,x_2) \geq h_3(y_1,y_2)$

$x_1^{a/a+b} \cdot x_2^{b/a+b} > x_1^{a/a+b} y_2^{b/a+b} \geq y_1^{a/a+b} y_2^{b/a+b}$

$(x_1,x_2) \geq (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1 = y_1$ ή $x_1 > x_2$ $(3,2) >> (2,1)$

$u(x_1,x_2) > u(y_1,y_2)$ $x_2 > y_2$ ή $x_2 = y_2$

$(x_1,x_2) \sim z = (z_1,z_2) \Leftrightarrow u(x_1,x_2) = u(x_1,x_2) = u(z_1,z_2)$

1) $x \sim x$ αδιάφορο) (ονομάζεται αυτοπάθεια)

2) Αν $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ (ονομάζεται συμμετρικότητα)

3) Αν $x \sim y$ και $z \sim y$ τότε $x \sim z$ (ονομ. μεταβατικότητα)

$u(x_1,x_2) = P_1$ (ισοσταθμική καμπύλη της $u$)

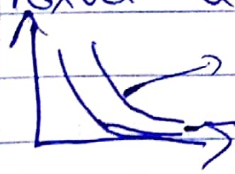
1) συνεχής 2) γνήσια μονότονη 3) αυστηρή κοίλη

Κάθε $u: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις 1, 2, 3 ονομάζ. νεοκλασσική

(3) Ερω.

3α) $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ονομάζεται κοίλη αν για κάθε $0 < \lambda < 1$

ισχύει $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$

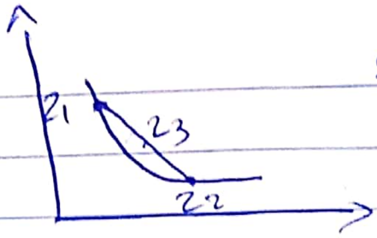


$\to u(z_1', z_2') = P_2$

$\to u(z_1, z_2) = P_1$

Αν $P_2 \geq P_1$ τότε ο συνδυασμός $z_1', z_2'$ είναι προτιμότερος από το 2.

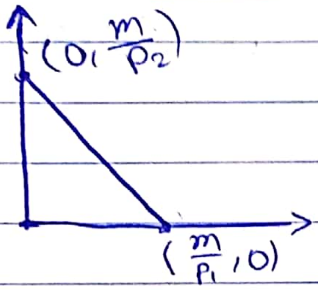
$\underbrace{\{z' \in \mathbb{R}^2_+ \mid u(z') \geq p_1\}}_{\text{κυρτό}}$




$z_3 = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2$
$\forall \lambda \in (0,1)$

$\lambda u(z_1) + (1-\lambda) u(z_2) = u(z_3) = p_2 = u(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2)$

1/10/2019




$(x_1, x_2) \in B(p,m) \Rightarrow$
$x_1 \in [0, \frac{m}{p_1}]$ και $x_2 \in [0, \frac{m}{p_2}]$

$B(p,m) \subseteq [0, \frac{m}{p_1}] \times [0, \frac{m}{p_2}]$ (1)

Πρόταση: Αν $u: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε το
$\max\{u(x_1,x_2) / (x_1,x_2) \in B(p,m)\}$

Απόδειξη
Απο (1) το $B(p,m)$ είναι φραγμένο και κλειστό
Άρα, απο Θ. Weierstrass το (1) έχει λύση

Ορισμός: κλειστό σύνολο του $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται κάθε σύνολο για το οποίο ισχύει η συνθήκη (2).
Για κάθε ακολουθία $(x_{1n}, x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ του $K$ με
$x_{1n} \to x_1$, $x_{2n} \to x_2$ τότε $(x_1, x_2) \in K$.

Λήμμα 2: Κάθε σύνολο $B(p,m)$ είναι κλειστό
Αποδ.:
Έστω $(x_{1n}, x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(p,m)$ (3) με $x_{1n} \to x_1$
και $x_{2n} \to x_2$. Θ.δ.ο $(x_1, x_2) \in B(p,m)$
Αφού ισχύει η (3)
$p_1 x_{1n} + p_2 x_{2n} \leq m$ και $x_{1n}, x_{2n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$
Αφού $(x_{1n}, x_{2n}) \to (x_1, x_2)$ τότε: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
και από συνέχεια του εσ. γινομένου
$\underbrace{p_1 x_{1n} + p_2 x_{2n}}_{\leq m} \to p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$

(5)

**Πρόταση 2**: Αν η $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι γν. μονότονη και συνεχής τότε η κάθε λύση του (1) ανήκει στο $B(p,m)$

**Απόδειξη**

Έστω ότι υπάρχει λύση $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ στο (1) τ.ω. $p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2<m$, θέτουμε $m-(p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2)=\varepsilon$, $\varepsilon>0$

Έστω $x_0=(\bar{x}_1+\frac{\varepsilon}{4},\bar{x}_2+\frac{\varepsilon}{4})$. Τότε ~~...~~

$$p_1(\bar{x}_1+\varepsilon/4)+p_2(\bar{x}_2+\frac{\varepsilon}{4})=$$

$$=p_1\bar{x}_1+p_1\frac{\varepsilon}{4}+p_2\bar{x}_2+p_2\frac{\varepsilon}{4}=$$

$$=p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2+p_1\frac{\varepsilon}{4}+p_2\frac{\varepsilon}{4}=$$

$$=m-\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}(p_1+p_2)<m$$

Άρα, λόγω γνήσιας μονοτονίας $u(\bar{x}_1+\frac{\varepsilon}{4},\bar{x}_2+\frac{\varepsilon}{4})\in B(p,m)$
Όμως αυτό είναι άτοπο διότι υποθέσαμε ότι $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ είναι λύση στο (1).

**Πρόταση 3**: Αν η $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι γν. κοίλη τότε η λύση στο (1) είναι μοναδική

**Απόδειξη**

Υποθέτουμε ότι το (1) έχει τουλάχιστον δύο λύσεις: $\tilde{x}_1=(\tilde{x}_{1,1},\tilde{x}_{1,2})$ κ' $\tilde{x}_2=(\tilde{x}_{2,1},\tilde{x}_{2,2})$
Από την ιδιότητα της γνήσιας κοιλότητας θα καταλήξουμε σε άτοπο (λόγω το σχήμα στην αρχή)
Θεωρούμε $\frac{1}{2}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\in B(p,m)$ (**)

(**) Λόγω και της γνήσιας κοιλότητας ~~...~~ της u έχουμε:

$$u\left(\frac{1}{2}(\tilde{x}_1+\tilde{x}_2)\right)>\frac{1}{2}\underbrace{u(\tilde{x}_1)}_{\tilde{u}}+\frac{1}{2}\underbrace{u(\tilde{x}_2)}_{\tilde{u}}=\frac{1}{2}\tilde{u}+\frac{1}{2}\tilde{u}=\tilde{u}.$$

Άτοπο.

Πόρισμα 1: Αν $u: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ είναι νεοκλασική τότε η μοναδική λύση $x(p,m)$ του (1) είναι λύση και του 1α) $\max\{u(x_1, \frac{m-p_1x_1}{p_2}), x_1 \in [0, \frac{m}{p_1}]\}$

1β) $\max\{u(\frac{m-p_2x_2}{p_1}, x_2), x_2 \in [0, \frac{m}{p_2}]\}$

Ορισμός 2: Η μοναδική λύση $x(p,m)$ του προβλήματος (1) όπου η συνάρτηση ωφελιμότητας $u: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ είναι νεοκλασική ονομάζεται συνάρτηση ζήτησης του καταναλωτή από την $u$.

Ορισμός 3: Συνάρτηση συνολικής ζήτησης για μια οικονομία με δύο καταναλωτές των οποίων οι συναρτήσεις ωφελιμότητας είναι $u_1, u^2$ και νεοκλασικές. Είναι η συνάρτηση $x^1(p, m^1) + x^2(p, m^2)$
$m^i = p_1 w^i + p_2 w^i$, $i = 1, 2$

Ορισμός 4: Συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης ονομάζεται $z(p) = x^1(p) + x^2(p) - (w^1 + w^2)$

Ορισμός 5: Τιμή ισορροπίας $\bar{p}$, ονομάζεται κάθε τιμή $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2)$: $z(\bar{p}) = 0$.

Ορισμός 6: Κάθε $x = (x^1, x^2)$ όπου $x^i, i=1,2$ είναι διάνυσμα κατανάλωσης του $i=1,2$ ώστε $x^1 + x^2 = w^1 + w^2$ ονομάζεται κατανομή πλούτου.

Ορισμός 7: Η $w = (w^1, w^2)$ ονομ. αρχική κατανομή πλού.

Ορισμός 8: Κάθε κατανομή πλούτου $x(\bar{p}) = (\bar{x}^1(\bar{p}), \bar{x}^2(\bar{p}))$ όπου $\bar{x}^1(\bar{p}) + \bar{x}^2(\bar{p}) = w^1 + w^2$ ($\bar{p}$: τιμή ισορροπίας) ονομ. κατανομή ισορροπίας.

# Cobb-Douglas

1

$u(x_1,x_2)=x_1^a x_2^b$, όπου

$u(0,0)=0$ (συνεχής), $a>0$ και $b>0$ και $a+b=1$

Έστω η Cobb-Douglas και $w=(w_1,w_2)$, $w_1,w_2>0$. Άρα από το αρχικό πρόβλημα έχουμε $m=p_1w_1+p_2w_2$ όπου το διάνυσμα των τιμών $(p_1,p_2)$

**Πρόταση**: Η συνάρτηση ζήτησης ενός καταναλωτή με συνάρτηση χρησιμότητας Cobb-Douglas και αρχικό πλούτο $(w_1,w_2)$ είναι $x(p)=\left(\frac{a(p_1w_1+p_2w_2)}{p_1}, \frac{b(p_1w_1+p_2w_2)}{p_2}\right)$

**Απόδειξη**: Έστω $(e_1,e_2)$ με $e_1,e_2>0$.
Θ.δ.ο. $u(x_1+e_1,x_2+e_2)>u(x_1,x_2)$
$u(x_1+e_1,x_2+e_2)=(x_1+e_1)^a(x_2+e_2)^b>x_1^a x_2^b=u(x_1,x_2)$
$x(p)\in B(p,p_1w_1+p_2w_2)$. Άρα $p_1x_1(p,m)+p_2x_2(p,m)=m$
τότε

Θα $\max\{u(x_1,\frac{m-p_1x_1}{p_2}) \mid x_1\in[0,\frac{m}{p_1}]\}$

$$u\left(x_1,\frac{m-p_1x_1}{p_2}\right)=x_1^a\left(\frac{m-p_1x_1}{p_2}\right)^{1-a}$$

$$, \quad x_1\in(0,m/p_1)$$

$$f'(x_1)=ax^{a-1}\left(\frac{m-p_1x_1}{p_2}\right)^{1-a}+x_1^a(1-a)\left(\frac{m-p_1x_1}{p_2}\right)^{1-a-1}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$x_1^a\left[\frac{a}{x_1}\left(\frac{m-p_1x_1}{p_2}\right)^{1-a}-\frac{p_1}{p_2}(1-a)\left(\frac{m-p_1x_1}{p_2}\right)^{-a}\right]$$

$$g(x_1)=\left(\frac{m-p_1x_1}{p_2}\right)^{-a}\left(\frac{a}{x_1}\left(\frac{m-p_1x_1}{p_2}\right)-\frac{p_1}{p_2}(1-a)\right)$$

$$h(x_1) = \frac{a p_1}{p_1 x_1}\left(\frac{m - p_1 x_1}{p_2}\right) - \frac{p_1 x_1}{p_2 x_1}(1-a) =$$

$$= \frac{p_1}{x_1}\left(\frac{a}{p_1}\left(\frac{m - p_1 x_1}{p_2}\right) - \frac{x_1}{p_2}(1-a)\right)$$

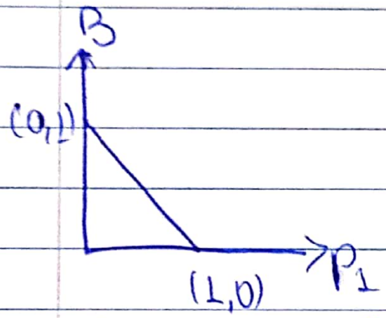
Μαθηματικά οικονομικά | 7/10 - 14/10/19

$J(\bar{p})=0$ ονομ. τιμή ισορροπίας ($n\bar{p}$)

1) Θεώρημα Brower

Α Κ είναι συμπαγές υποσύνολο ενός Ευκλείδιου χώρου ($\mathbb{R}^2$) τότε κάθε συνάρτηση, τ.ω $f: K \to K$ και $f$ συνεχής τότε η $f$ έχει σταθερό σημείο (υπάρχει $p^* \in K$ τ.ω $f(p^*)=p^*$)

$$K=\Delta_{\underbrace{2-1}_{n-1}} = \{y\in\mathbb{R}^2_+ \mid y=(y_1,y_2),\ y_1+y_2=1\}$$




Λήμμα 1 : Το Κ είναι κλειστό και φραγμένο

Απόδειξη :

Για κάθε $y\in K$ $\quad 0\le y_1\le 1$

" $(y_1,y_2)$ $\quad 0\le y_2 \le 1$

Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$, τ.ω $y_n \to y$ $\Leftrightarrow$

$y_{n,1}\to y_1$ και $y_{n,2}\to y_2$

$y_{n,1}+y_{n,2} \to y_1\cdot y_2 = 0$

$y_1+y_2=1$

$y_{n,1}\to y_1 \Rightarrow \forall e(=\frac{1}{2}>0)\ \exists n_1(\varepsilon)$ τ.ω

$|y_{n,1}-y_1|<\frac{1}{2}$, $n\ge n_1$

$|y_{n,2}-y_2|<\frac{1}{2}$, $\forall n\ge n_2$

$n_0=\max\{n_1,n_2\}$

$|y_{n_1} + y_{n_2} - (y_1 + y_2)| \leq |y_{n,1} - y_1| + |y_{n,2} - y_2| < 1$

$|1 - (y_1 + y_2)| \leq 1 \quad \forall n \geq n_0$

(i) K - κλειστό και φραγμένο

(ii) $\zeta(p)$ είναι συνεχής ως προς $p$

$\zeta(p) = x^1(p) + x^2(p) - (\omega^1 + \omega^2)$

(iii) Αρκεί ν.δ.ο $x$ είναι συνεχής συνάρτηση του $p$

Θεώρημα (Κλειστού γραφήματος)

$Gr(x^i) = \{(p, x(p)) \mid p \in K, x(p) \in \mathbb{R}^2\}$

$P(n)_{n \in \mathbb{N}} : p_n \to p, \; x^i(p_n) \to x = x(p) \; (p_n \to p, \text{φραγμένη})$

$f_i \; K \to f_i(p)$, ($x^i(p)$ να είναι συνεχής)

$x^i(p)$ δεν είναι μοναδικό.

$\{x \in \mathbb{R}^2_+ \mid u^i(x) = \max\{u^i(y) \mid y \in B(p, \omega^2)\}\}$

$f_i : p \to x \in x^i(p)$

Αν $x^i$ είναι κλειστό γράφημα και το Π.Ο της $x^i$ είναι κλειστό και φραγμένο, τότε η $x^i$ είναι συνεχής

$p_n \in [r, s] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$r \leq p_n \leq s, \; r, s >> 0 \Rightarrow r \leq p \leq s$

$x \in X^i([r,s])$

$p_n \cdot x^i(p_n) = p_n w^i$

$\downarrow$

$p \cdot x = p \cdot w^i$

$u^i(x) = \max\{u^i(y) \mid p \cdot y = p \cdot w^i$ και $y \in \mathbb{R}^2_+\}$

$\{z \mid u^i(x) \geq u^i(z),\ z \in \mathbb{R}^2_+\}$ : κλειστό $\forall z$

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : $u^i(x) \geq u^i(z_n)$

$z_n \to x$

$u^i(z_n) \to u^i(x)$

$g: K \to K$ Brouwer

$g(J(p)) \in \Delta^+ \Rightarrow$

Υπάρχει $p^*$

$g(J(p^*)) = p^*$

$g(J(p)) = (g_1(J(p)), g_2(J(p)))$

$g_i(J(p)) = p_i + \max\{0, J_i(p)\} / (1 + \sum_{i=1}^{2} \max\{0, J_i(p)\})$

$g(J(p)) \in \Delta_1$

$p \to g(J(p)) \to$ συνεχής

$p^* = (p_1^*, p_2^*) = (g_1 J(p^*)), g_2(J(p^*)))$

$$p_i^* = g_i(J(p_i^*)) = \frac{p_i^* + \max\{0, J_i(p^*)\}}{1 + \sum_{i=1}^{2} \max\{0, J_i(p^*)\}}$$

Αν $J(p^*) = 0$, τότε ισχύουν οι ισότητες της (1), δηλ. κάθε τιμή ισορροπίας $p^*$ είναι και σταθερό σημείο $(g \circ J)$

Για ν.δ.ο κάθε σταθ. σημείο της $(g \circ J)$ δηλ κάθε τιμή για την οποία ισχύει η (1), είναι τιμές ισορροπίας. Έστω ότι για κάποιο σταθ. σημείο $p_i^*$ της $(g \circ J)$ ισχύει ότι είτε $J_1(p^*) \leq 0$ είτε $J_2(p^*) \leq 0$

Παρατήρηση

Για κάθε $p$, άρα για κάθε $p^*$, ισχύει $p^* J(p) = 0$ (2)
$p^* \left( \sum_{i=1}^{2} x^i(p^*) - \sum_{i=1}^{2} w^i \right) = 0$, γιατί $p^* x^i(p^*) - p^* w^i = 0$

Από (1), (2) έχουμε $\sum_{i=1}^{2} p^* J_i(p^*) = \sum_{i=1}^{2} p_i^* \cdot \left[ \frac{(p_i^* + \max\{0, J_i(p_1^*)\})}{1 + \sum_{i=1}^{2} \max\{0, J_i(p_2^*)\}} \right]$

3α) Αν $J_1(p^*)$, $J_2(p^*) < 0$

τότε $\sum_{i=1}^{2} p_i^*, J_i(p^*) < 0$ άτοπο λόγω (1)

3β) Αν $J_1(p^*)$, $J_2(p^*) > 0$
τότε $\sum_{i=1}^{2} p_i^* J_i(p^*) > 0$ άτοπο λόγω (2)

3γ) Έστω $J_i(p)$ ετερόσημα. Τότε για εκείνο από τα $i = 1, 2$ για το οποίο $J_i(p^*) > 0$

Ισχύει: $p_i^* = \frac{p_i^* + J(p^*)}{1 + J_i(p^*)} \Rightarrow \frac{p_i^* + J_i(p^*)}{p_i^* + p_i^* J_i(p^*)} = 1$

Άτοπο, διότι $p_i^* J_i(p^*) = J_i(p^*) \Rightarrow p_i^* = 1$ άτοπο
$p_1^* = 0$ για το αγαθό $j \neq i$ εφόσον $p_i^* + p_j^* = 1$ όμως τότε η $J(1,0)$ ή $J(0,1)$
$x^i(1,0)$ ή $x^i(0,1) \rightarrow$ δεν ορίζεται γιατί κατ. οριζ. θα ήταν 0. (δεν έχουμε αρν. τιμές στις κατ. οριζ.)

14/10/2019

1) Γνησίως μονότονη ονομάζεται μία συνάρτηση ωφελιμότητας $u:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$, αν για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^2$ τ.ω. $x\gg y$, τότε $u(x)>u(y)$

1α) Μία $u:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ έχει άκρως επιθυμητό στοιχείο το $z\gg0$, αν $\forall\varepsilon>0$, ισχύει $u(x+\varepsilon z)>u(x)$

1β) Πρόταση: Αν η $u:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ είναι γν. μονότονη, τότε κάθε $z\gg0$ είναι άκρως επιθυμητό στοιχείο της u.

Απόδειξη:

Για κάθε $\varepsilon>0$ και κάθε $z\gg0$

Παρατηρούμε ότι: $\varepsilon z\gg0$. Επειδή η u είναι γνησίως μονότονη $x+\varepsilon z\gg x$ $\forall x\in\mathbb{R}^2_+$ και επομένως, $u(x+\varepsilon z)>u(x)$

1γ) Πρόταση: Αν η $u:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ συνεχής, έχει άκρως επιθυμητό στοιχείο το $z\gg0$, τότε το πρόβλημα μεγιστοποίησης του καταναλωτή

$\max\{u(x)\mid x\in B(p,m)\}$ (1)

ανήκει στον εισοδηματικό περιορισμό

$\breve{B}(p,w)=\{x\in B(p,w)\mid p\cdot x=p\cdot w\}$

Απόδειξη: Έστω ότι το μέγιστο-λύση του προβλ. (1) δεν ανήκει στο $\breve{B}(p,w)$. Τότε το μέγιστο (που υπάρχει λόγω συνέχειας της u) ανήκει στο $\{y\in\mathbb{R}^2_+\mid p\cdot y<p\cdot w\}$. Έστω ότι το άκρως επιθυμητό στοιχείο της u είναι το $z\gg0$, δηλ. $z=(z_1,z_2)$ με $z_1>0$, $z_2>0$ και $p\cdot z<p\cdot w$ (ου ισχύει $pz=pw$), τότε το z θα ήταν λύση στο προβ (1) του καταναλωτή με συνάρτηση ωφελιμότητας τη u. Αυτό θα ισχύει διότι $z+\varepsilon z>z$ και άρα $u(z+\varepsilon z)>u(z)$ αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει $\varepsilon_0>0$ τ.ω. $p(z+\varepsilon_0 z)=pz+\varepsilon_0 zp$ πρέπει να ισχύει $pw=(1+\varepsilon_0)z>0$ δηλ. $p\cdot w-pz+\varepsilon_0 p\cdot z>0$ →

$4\varepsilon_0+\varepsilon_0=5k_0>0$

$\frac{p\cdot\omega - pz}{2} + \varepsilon_0 \cdot 1 > 0$, άτοπο λόγω του ότι υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τ.ω να ισχύει $z + \varepsilon_0 z = (1+\varepsilon_0)z$

$U_1: \{u: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} \mid u$: συνεχής και έχει άκρως επιθυμητό στοιχείο κάποιο $z \gg 0\}$

$U_2: \{u: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} \mid u$: συνεχής και γνησίως μονότονη$\}$

$u_0: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ με $u_0(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$

Παρατήρηση: Η $u_0$ έχει επιθυμητό στοιχείο το $z_0 = (1,1)$ και είναι και συνεχής. Η $u_0$ όμως δεν είναι γνησίως μονότονη γιατί $u_0\left(0, \frac{m_0}{p_1+p_2}\right) = u_0\left(\frac{m_0}{p_1+p_2}, 0\right) = u_0\left(\frac{m_0}{p_1+p_2}, \frac{m_0}{p_1+p_2}\right)$

α) Θυμίζουμε ότι γνησίως μονότονη είναι κάθε $u: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ τ.ω για κάθε $x_0 \geq 0$ το $x_0$ τουλάχιστον μία συνιστώσα $x_0^i > 0$ και $x \gg 0$ τότε $u(x + x_0) > u(x)$. Η $u_0$ έχει άκρως επιθυμητό στοιχείο το $(1,1)$ διότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$u_0(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_1) = \min\{x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_1\} = \min\{x_1, x_2\} + \varepsilon > \min\{x_1, x_2\}$$

Όμως για $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon m_0}{p_1+p_2}$, όπου $\varepsilon > 0$,

$$u\left(\frac{m_0}{p_1+p_2} + \frac{\varepsilon m_0}{p_1+p_2} > \frac{m_0}{p_1+p_2}\right) = u\left(\frac{m_0}{p_1+p_2}, \frac{m_0}{p_1+p_2} + \frac{\varepsilon m_0}{p_1+p_2}\right) =$$

$$= u_0\left(\frac{m_0}{p_1+p_2}, \frac{m_0}{p_1+p_2}\right)$$

Επομένως η $u_0$ δεν είναι γνησίως μονότονη γιατί θα ήταν τότε

$$u_0\left(x_0+\left(0, \frac{\varepsilon m_0}{p_1+p_2}\right)\right) > u_0(x_0) \quad \text{και}$$

$$u_0\left(x_0+\left(\frac{\varepsilon m_0}{p_1+p_2}, 0\right)\right) > u_0(x_0)$$

$$x(p,w) = \left(\frac{a(pw)}{p_1}, \frac{b(pw)}{p_2}\right) - \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$$

**Ορισμός**

Ελαστικότητα της ζήτησης του αγαθού $i=1,2..$ ως προς την τιμή του $p_i$ $i=1,2$, είναι η $\varepsilon x_i = \frac{-p_i}{x_i(p_i)} \cdot \frac{d x_i(p_i)}{dp}$

Εφόσον η $\frac{dx_i(p_i)}{dp_i}$ ορίζεται

$$x(p_1,p_2,pw) - \left(\frac{a(pw)}{p_1}, \frac{b(pw)}{p_2}\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-p^2}{\frac{b(pw)}{p_1}} \cdot \frac{\frac{d(b(pw))}{p_2}}{dp_2} = \frac{-p_2^2}{b(pw)} \frac{d x_1(p_1,p_2)}{\partial p_1} =$$

$$= \frac{-p_2^2}{b(pw)} \left(\frac{b p_2 w_2}{\frac{p_2}{\partial p_2}}\right) = \frac{-p_2^2}{b(pw)} \cdot 0 = 0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-p_1}{\frac{a(pw)}{p_1}} \cdot \frac{\frac{\partial(a(pw))}{p_1}}{a\, p_1} = \frac{-p_1^2}{a(pw)} \cdot \frac{\partial x_1(p_1 \cdot p_2)}{\partial p_1} = \frac{-p_1^2}{a(pw)} \cdot \frac{\frac{a p_1 w_1}{p_1}}{\partial p_1}$$

$$= \frac{-p_1^2}{\cancel{a}(pw)} \cdot 0 = 0$$

$$x(p_1, p_2, pw) = \left( \frac{a(pw)}{p_1}, \frac{b(pw)}{p_2} \right) \text{ av } a+b>0$$

$$\mu: \quad a>0 \quad b>0, \quad x_1^{a/a+b} \cdot x_2^{b/a+b}$$

$$h(x) = x^{1/a+b}$$

$$e^{(5\log x_1 + 10\log x_2)} = x_1^{5/3} \cdot x_2^{2/3}$$

| Νο. 3 | 17, 18 | 10 → 21, 22 | 11 (12-3 ώρα)
7, 8 | 11 | 28 | 11
14, 15 | 11

21 | 10 → 5 | 11, 6 | 11, 12 | 11, 18, 19 | 11, 25 | 11 (12-3 ώρα) μαθ. οικ.

## Μαθηματικά Οικονομικά 16/10/2019

Ερώτημα:

Είναι μια κατανομή σχεδόν ισορροπίας κατανομή ισορροπίας κατά Walras?

Απάντηση: (παρ. 1.6.2) (όχι πάντα)

Θεώρημα 1

Σύνολο των κατανομών σχεδόν ισορροπίας συμπίπτει με το σύνολο κατανομών ισορροπίας κατά Walras αν $\boxed{p \gg 0}^{(*)}$ (δηλ. $p_1 > 0$ και $p_2 > 0$ και οι συναρτήσεις ωφελιμότητας των καταναλωτών είναι συνεχείς και γνησίως μονότονες.

Παράδειγμα 1.6.2 (Στο παράδειγμα αυτό δεν ισχύει η (*) διότι $p = (0,1)$, $p_1 = 0$ )

Έστω η παρακάτω οικονομία ανταλλαγής

$$u_1(x,y) = x+y \ , \ w_1 = \left(\tfrac{1}{2}, 0\right), (pw_1 = 0)$$

$$u_2(x,y) = y \ , \ w_2 = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right), (pw_2 = 1)$$

$$B(pw_1) = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \mid p\cdot x \le p\cdot w_1\} =$$

$$= \{\underset{(x,y)}{x} \in \mathbb{R}^2_+ \mid (0,1)\cdot(x,y) \le (0,1)\cdot\left(\tfrac{1}{2},0\right) = 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \mid y \le 0\} = \{(x,0) \mid x \ge 0\}$$

Ισχύει "τυπικά" ότι η κατανομή (1,0), (0,1) ικανοποιεί τον ορισμό της κατανομής σχεδόν ισορροπίας διότι αν

$$u_1(x,y) = x+y \geq u_1(1,0) \Rightarrow y = (0,1)(x,y) = (0,1)\cdot(\tfrac{1}{2},0)$$

$$= 0$$

αλλά ισχύει για κάθε στοιχείο $(x,y) \in B(p,w_1)$

$$u_2(x,y) = y \geq \underbrace{u_2(0,1)}_{1} \Leftrightarrow (0,1)\cdot(x,y) \geq (0,1)(1/2,1)$$

$$\Rightarrow \boxed{y \geq 1}$$

Άρα η ((1,0),(0,1)) ικανοποιεί τον ορισμό της κατανομής σχεδόν ισορροπίας υπό την τιμή $p=(0,1)$. Επίσης η ((1,0),(0,1)) ικανοποιεί και τον ορισμό της ισορροπίας κατά Walras υπό την τιμή $p=(0,1)$ διότι ισχύουν οι εξής συνεπαγωγές:

$$u_1(x,y) = x+y > \underbrace{u_1(1,0)}_{1} \Rightarrow \underbrace{(x,y)(0,1)}_{y} > \underbrace{(0,1)(1/2,0)}_{0}$$

$$\Rightarrow y > 0$$

$x \geq 0$

$x+y > 1 \Rightarrow y > 1$

Επίσης αν $u_2(x,y) > u_2(0,1)$

$$y > 1 \Leftrightarrow (0,1)(x,y) > (0,1)(1/2,1)$$

$$\Leftrightarrow y > 1$$

## Θεώρημα 1 (αναλυτική διατύπωση)

Αν οι συναρτήσεις ωφελιμότητας των καταναλωτών ~~εστω~~ μιας οικονομίας ανταλλαγής με δύο αγαθά είναι συνεχείς και γνησίως μονότονες τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα (και επιπλέον $p \gg 0$):

(i) $x_i \in X_i(p) = \{ x_i \in \mathbb{R}^2_+ \mid x_i$ μεγιστοποιεί την $u_i$ στο $B(p, w_i) \}$

(ii) ισχύει η συνεπαγωγή $u_i(\underbrace{x, y}_{\vec{z}}) > u_i(\underbrace{x_{i,1}, x_{i,2}}_{\vec{x_i}})$

$$\Rightarrow p \cdot \vec{z} > p \cdot \vec{w}$$

(για κάθε $i = 1, 2, \ldots, I$)

(iii) Ισχύει η συνεπαγωγή $u_i(z) \geq u_i(x_i) \Rightarrow$
$p \cdot z \geq p \cdot w_i$ (για κάθε $i = 1, 2, \ldots, I$)

Αποδ.

Αρκεί ν.δ.ο i) ⇒ ii), ii) ⇒ (iii) και (iii) ⇒ (i)

i) ⇒ ii) Αν $x_i$ μεγιστοποιεί την $u_i$ στο σύνολο προυπολογισμού $B(p, w_i)$ ισχύει ότι αν $[u_i(z) > u_i(x_i) \Rightarrow p.z > p.x_i]$ δηλ. η ii)

Ισχύει η ii) διότι αφού η $u_i$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη $p \cdot z > p \cdot w_i$, διότι $p \cdot x_i = p \cdot w_i$ και αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η ii) θα είχαμε ότι $u_i(z) > u_i(x_i)$ συνεπάγεται $p \cdot z \leq p w_i$ για κάποιον $i$ και κάποιον $z$. (1)

Αν ισχυει η (1), αυτό είναι άτοπο διότι θα υπήρχε $z\in B(p,w_i)$ του οποίου η αφελιμότητα θα ήταν $u_{i_0}(z) > u_{i_0}(x_{i_0})$, όπου το $x_{i_0}$ μεγιστοποιεί την $u_{i_0}$ στο $B(p,w_{i_0})$

ii) δηλ. ότι $p\cdot z > p x_i = p w_i$, δηλ. i) $\Rightarrow$ ii)

ii) $\Rightarrow$ iii) Προφανώς, διότι αν ισχύει ότι $u_i(z) > u_i(x_i) \Rightarrow p\cdot z > p\cdot w_i$ ισχύει και

$u_i(z) \geq u_i(x_i) \Rightarrow p\cdot z \geq p\cdot w_i$

Τέλος, ισχύει ότι iii) $\Rightarrow$ i) δηλ. ότι αν για κάθε i και $z\in\mathbb{R}^2_+$ έχουμε ότι $[u_i(z)>u_i(x_i) \Rightarrow p z \geq p\cdot w_i]$

(iii)

τότε το $x_i$ μεγιστοποιεί την $u_i$ στο $B(p,w_i)$

Αυτό δηλ. η (i) ισχύει διότι αν υποθέσουμε ότι για κάποιον καταναλωτή $i_0$ και κάποιο $z\in\mathbb{R}^2_+$ το $x_i$ δε μεγιστοποιεί την $u_{i_0}$ στο $B(p,w_{i_0})$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Αφού $[u_{i_0}(z)\geq u_{i_0}(x_{i_0}) \Rightarrow p\cdot z \geq p\cdot w_{i_0}]$ δηλ. η (iii) ισχύει και $p\cdot z \geq p x_{i_0} = p\cdot w_{i_0}$. Αν το $x_{i_0}$ δεν μεγιστοποιούσε την $u_{i_0}$ στο $B(p,w_{i_0})$ θα είχαμε ότι αφού $u_{i_0}(x_{i_0}) = u_i(x_{i_0})$ αφού ισχύει η ii) για το $u_{i_0}(x_{i_0}+\varepsilon(1,1)) > u_{i_0}(x_{i_0})$

$p(x_{i_0}+\varepsilon(1,1)) \geq p w_{i_0} = p x_{i_0}$

$\forall \varepsilon>0$ αφού η $u_{i_0}$ είναι γν. μονοτ.

Όμως αφού ~~η $u_{i_0}$ είναι συνεχής και επιπλέον~~ το εσωτερικό γινόμενο $(z\mapsto pz)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς z αντικαθιστ... το $\varepsilon>0$ με την ακολουθία $\varepsilon_n = 1/n$ αφού ...

(4)

ένας πρ. αρ. δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον εαυτό του.

(**) $\lim_{n\to\infty} U_{i_0}(X_{i_0} + \varepsilon_n(1,1)) = U_{i_0}(X_{i_0}) > U_{i_0}(X_{i_0})$ ΄Ατοπο.

Άτοπο διότι $\lim_{n\to\infty} p(X_{i_0} + \varepsilon_n(1,1)) = p \cdot X_{i_0}$.

21/10/2019

## 1º Θεώρημα Ευημερίας : (9 ερώτηση)

Αν σε μία νεοκλασική οικονομία ανταλλαγής οι καταναλωτές έχουν αυστηρά κοίλες συναρτήσεις ωφελιμότητας, τότε κάθε κατανομή ισορροπίας κατά Walras ως προς την τιμή $p = (p_1, p_2)$ με $p_1, p_2 > 0$, είναι άριστη κατά Pareto

**Απόδειξη**

Έστω $x$ κατανομή ισορροπίας κατά Walras ως προς $p$.

Τότε υποθέτουμε ότι η $X$ δεν είναι άριστη κατά Pareto.

Τότε, υπάρχει κατανομή $Z$, τέτοια ώστε να ισχύουν:

$U_i(Z_i) \geq U_i(X_i)$ για κάθε καταναλωτή $i = 1, 2, \dots, I$

και για έναν τουλάχιστον καταναλωτή $i_0$ ισχύει ότι:

$U_{i_0}(Z_{i_0}) > U_{i_0}(X_{i_0})$ Αφού η $X$ είναι κατανομή ισορροπίας κατά Walras ως προς την τιμή $p$ για τον καταναλωτή $i_0$ θα ισχύει ότι

$p \cdot Z_{i_0} > p W_{i_0} = p X_{i_0}$ αφού η $U_{i_0}: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ ως νεοκλασική είναι γνησίως μονότονη.

Τότε αφού η $z$ είναι κατανομή, τότε ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{I} p \cdot z_i = \sum_{i=1}^{I} p w_i = \sum_{i=1}^{I} p \cdot x_i$$

Εφόσον $p z_{i_0} > p x_{i_0}$, τότε για κάποιον καταναλωτή $k$ θα ισχύει:

$$p z_k < p x_k \quad \text{και} \quad z_k \neq x_k$$

Τέτοιος καταναλωτής $k$ υπάρχει, διότι αν για κάθε $k$ θα ίσχυε ότι $z_k = x_k$, τότε θα ίσχυε και για τον $i_0$ ότι $z_{i_0} = x_{i_0}$ και αφού ~~$p z_{i_0} = p x_{i_0}$~~

$$p z_{i_0} = p x_{i_0} > p w_{i_0} = p x_{i_0}, \text{ από το ότι}$$

η $x$ είναι κατανομή ισορροπίας κατά Walras ως προς την $p$ και η $u_{i_0}$ είναι γνησίως μονότονη ως νεοκλασσική. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι δεν ισχύει $p x_{i_0} > p x_{i_0}$! Άρα υπάρχει καταναλωτής $k$ τ.ω

$$p z_k < p x_k \quad \text{και} \quad z_k \neq x_k$$

Επιπλέον η ύπαρξη ενός τέτοιου καταναλωτή $k$ ισχύει, διότι αν δεν υπήρχε τέτοιος $k$, θα είχαμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{I} p z_i < \sum_{i=1}^{I} p w_i = \sum_{i=1}^{I} p w_i \quad \text{αφού } p x_i = p w_i$$

επειδή κάθε $u_i$ είναι γνησίως μονότονη ως νεοκλασσική.

Επειδή όμως υπάρχει $k \in \{1, 2, \ldots, I\}$ τέτοιος ώστε

$p z_k < p \cdot x_k$ και $x_k \neq z_k$, επειδή η $u_k$ είναι

αυστηρά κοίλη, ως νεοκλασσική θα ισχύει
ότι:

$$u_k\left(\frac{1}{2}(z_k + x_k)\right) > u_k(x_k) \qquad (1)$$

Επειδή η $x$ είναι κατανομή ισορροπίας κατά
Walras, από την (1) συνεπάγεται ότι

$$p\left(\frac{1}{2}(z_k + x_k)\right) > p \cdot w_k = p \cdot x_k \qquad (2)$$

λόγω της γνήσιας μονοτονίας της $u_k$. Η (2)
όμως δεν μπορεί να ισχύει, διότι τότε:

$$\frac{1}{2} p z_k + \frac{1}{2} p x_k > p x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p z_k > p x_k,$$

το οποίο είναι άτοπο, διότι από τον ορισμό
του $k$ ισχύει $p \cdot z_k < p \cdot x_k$

Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας αρχικά την
ύπαρξη του καταναλωτή $k$ από το γεγονός
ότι η $x$ δεν είναι άριστη κατά Pareto. Αφού
δεν ισχύει ότι η $x$ δεν είναι άριστη κατά Pareto
τότε η $x$ είναι άριστη κατά Pareto και το συμπέρασμα
του θεωρήματος ισχύει. □

A. Smith (1776) στο Wealth of Nations, ονομ.
Principle of the Invisible Hand

(8) → τοιχωρισμ...

Γεωμετρική αναπαράσταση των κατανομών ισορροπίας κατά Walras και των άριστων κατά Pareto κατανομών.

[Κουτί το Edgeworth - Edgeword Box]

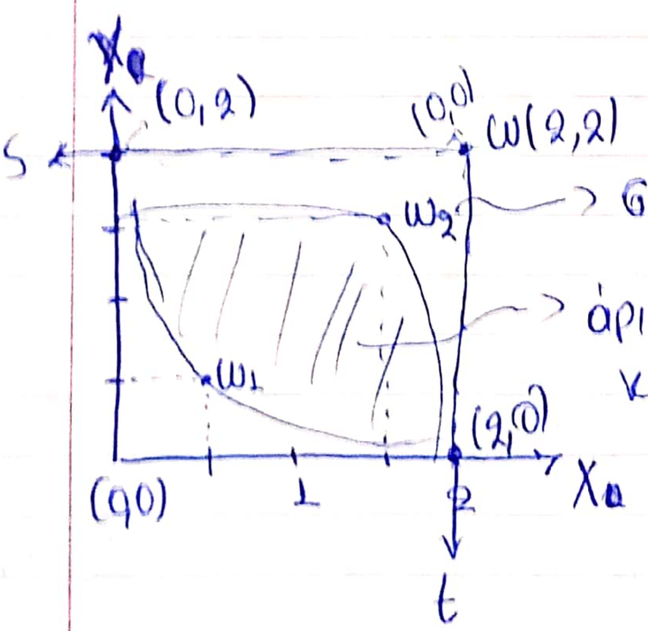
(11) Στο Edgeworth Box η οικονομία ανταλλαγής έχει δύο καταναλωτές π.χ ο ένας έχει

$w_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ο άλλος

$w_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Επομένως το $w = w_1 + w_2 =$

$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) =$

$= (2, 2)$




→ Σύνολο κατανομών

→ άριστες κατά Pareto και κατανομές ισορροπίας αν $u_1, u_2$ είναι νεοκλασσικές

$u_1(x, y) = x \cdot y \qquad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2$

$u_2(s, t) = s \cdot t \qquad 0 \leq s \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 2$

$(2-x)(2-y) = u_2(x, y) = 4 + xy - 2(x+y)$

<u>Ορισμός 1</u>: Έστω $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε να είναι καλά ορισμένες και συνεχείς οι $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$

(13)

και αν $x>0$, $y>0$ ισχύει ότι

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} > 0$$

τότε η $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ ονομάζεται "ομαλή" (smooth)

Το διάνυσμα συνάρτηση:

$$\left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right) := \nabla u(x,y).$$

Η $\nabla u(x,y)$ ονομάζεται διάνυσμα κατεύθυνσης της $u$ (gradient).

$\boxed{\text{Π.χ}}$ για την οικονομία ανταλλαγής του προηγούμενου παραδείγματος όπου $u_1(x,y) = x \cdot y$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$

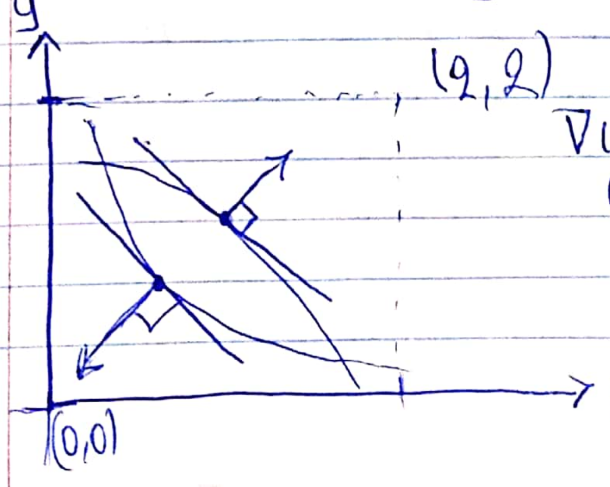
και

$$u_2(x,y) = (2-x)(2-y) = xy - 2(x+y) + 4$$

σύμφωνα με το κουτί Edgeworth. Τότε:

$$\nabla u_1(x,y) = \left( \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} \right) = (y,x),$$

Ενώ $\nabla u_2(x,y) = (y-2, x-2)$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$




$$\nabla u_1(x,y) = \nabla u_2(x,y) \iff$$

$$(y,x) = \lambda(y-2, x-2)$$

$$\Downarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \lambda(y-2) \\ \text{και } x = \lambda(x-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{y}{y-2} = \frac{x}{x-2}} \iff$$

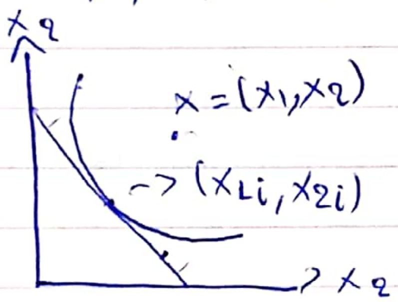
$\to (x(t), y(t))$

$\Leftrightarrow y(x-2) = x(y-2)$

$\Rightarrow yx - \cancel{2}y = xy - \cancel{2}x$

$\Rightarrow y = x \quad P(1,1)$

5/11/2019 Ορισμός 1: Μια κατανομή $x=(x_1, \dots, x_I)$ στηρίζεται από το διάνυσμα τιμών $p>>0$ αν για κάθε $i=1,2,\dots,I$ ισχύει ότι αν $u_i(x) \geq u_i(x_i) \Rightarrow px \geq px_i$




Παρατήρηση 1
Μία κατανομή σχεδόν ισορροπίας $x^*$ ως προς $p>>0$ στηρίζεται από το $p$ σε κάθε $x_i$.

(κατανομή σχεδόν ισορροπίας)

$$u_i(x) \geq u_i(x_i) \Rightarrow px \geq pw_i$$

Αν θέσουμε $x=x_i \Rightarrow px_i \geq pw_i \quad \forall i=1,2,\dots,I$
(το οποίο ισχύει όταν $px_i = pw_i$)
στηρίζεται από το $p$ σε κάθε $x_i$, αν οι $u_i$ είναι συνεχείς και γν. αύξουσες

Θεώρημα 1: Αν οι συναρτήσεις $u_i: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς, τότε κάθε κατανομή $x$ που στηρίζεται από το $p>>0$, είναι ασθενώς άριστη κατά Pareto.

Απόδειξη Θ.1

Έστω ότι η $x$ δεν είναι ασθενώς άριστη κατά Pareto. Τότε υπάρχει κατανομή $z=(z_1,z_2,\dots,z_I)$ τ.ω $u_i(z_i) \geq u_i(x_i)$ για κάθε $i=1,2,\dots,I$ (1)
Επειδή εξ υποθέσεως η $p>>0$ στηρίζει την κατανομή $x$, η (1) $\Rightarrow p \cdot z_i \geq p x_i$ για κάθε $i=1,2,\dots I$

Από το ότι οι $x$, $z$ είναι κατανομές

$$\sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} z_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{I} p x_i = \sum_{i=1}^{I} p z_i$$

$$\overset{(**)}{\Longrightarrow} p z_i = p x_i, \text{ για κάθε } i=1,2,\dots,I$$

Η (**) ισχύει, γιατί αν $p z_{i_0} > p x_i$ για κάποιον καταναλωτή $i_0$, τότε ~~...~~ αφού $p z_i \geq p x_i$, $\forall i$ αυτό θα σημαίνει:

$$\sum_{i=1, i\neq i_0}^{I} p z_i + p z_{i_0} > \sum_{i=1, i\neq i_0}^{I} p x_i + p x_{i_0}$$

$$\sum_{i=1}^{I} p z_i > \sum_{i=1}^{I} p x$$

άτοπο!

Αν υπήρχε $k_0$ (καταναλωτής τ.ω $p z_{k_0} < p x_{k_0} \overset{(2)}{\leq} p z_{k_0}$ (άτοπο) λόγω του ότι $p \cdot z_i \geq p x_i$ για κάθε $i$ άρα και για τον $k_0$ (όπως δείχνει η (2))

Άρα $\forall i = 1, 2, \dots, I$ ισχύει $p \cdot z_i = p x_i$

Από το γεγονός ότι κάθε $u_i$ είναι συνεχής
$\forall i \ \exists \ \delta_i \in (0,1)$ τ.ω $u_i(\delta_i z_i) \geq u_i(x_i)$
αφού $u_i(z_i) > u_i(x_i)$

Η ύπαρξη ενός τέτοιου $\delta_i$ ~~[illegible]~~ συνεπάγεται από τη
συνέχεια της $u_i$ αφού αν

$$z_{n,i} \Rightarrow z_i \Rightarrow u_i(z_{n,i}) \rightarrow u_i(z_i)$$

$$z_{n,i} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) z_i \qquad \left(1 - \frac{1}{n}\right) \in (0,1)$$

και έστω $\delta_{i,n_0} = 1 - \frac{1}{n_0}$

αφού $\frac{1}{n_0} < 1 - \delta_{i,n_0} < \varepsilon_0$, με $\varepsilon_0 > 0$

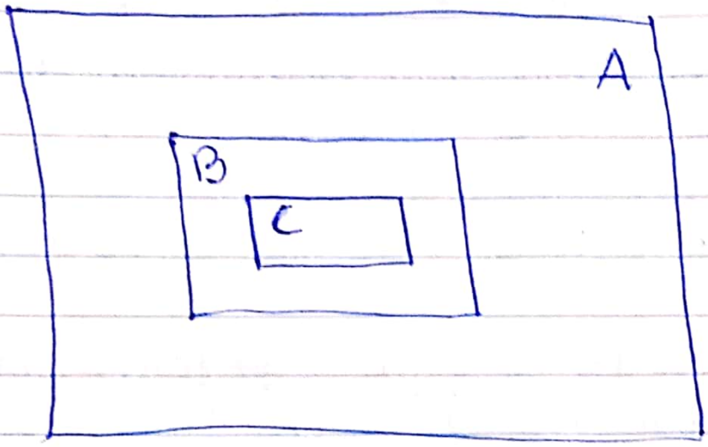
Άρα αφού $\forall i$ υπάρχει τέτοιο $\delta_i$ δηλ. $\delta_i \in (0,1)$
τ.ω $u_i(\delta_i z_i) \geq u_i(x_i) \xRightarrow[\text{σημείο του } x]{\text{λόγω ισορροπ}}$

$\Rightarrow p(\delta_i z_i) \geq p x_i = p z_i$ για κάθε $i$ δηλ.

$\delta_i (p z_i) \geq p \cdot z_i$ άτοπο, διότι το $\delta_i \in (0,1)$
και $p z_i > 0 \ \forall i$.

Στο άτοπο καταλήξαμε γιατί υποθέσαμε την ύπαρξη
κατανομής $z$

$\overbrace{u_i(z_i) \geq u_i(x_i)}^{(3)} \ \forall i$. Άρα αφού Δεν
υπάρχει κατανομή $z$ τ.ω να ισχύει η (3) η
$x$ είναι




$B = \{ z \in A \mid u_i(z_i) \geq u_i(x_i) \ \forall i$

$C = \{ z \in A \mid u_i(z_i) \geq u_i(x_i)$ και $u_i(z_{i_0}) > u_{i_0}(x_{i_0})$

Ασθενώς εφικτές
Αριστη
$\}$ κατά Pareto

για κάποιο $i_0$

$D \subseteq B \Rightarrow \boxed{B^c \subseteq D^c}$

$S = \{ x \in A \mid$ η $x$ στηρίζεται από ένα $p >> 0$ και οι $u_i : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ είναι ~~συνεχείς~~ $\}$

$S$ αποτελείται από συνεχείς άριστες κατά Pareto κατανομές

1ο Θεώρημα Ευημερίας : Αν οι $u_i: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ είναι νεοκλασσικές τότε κάθε κατανομή ισορροπίας είναι άριστη κατά Pareto.

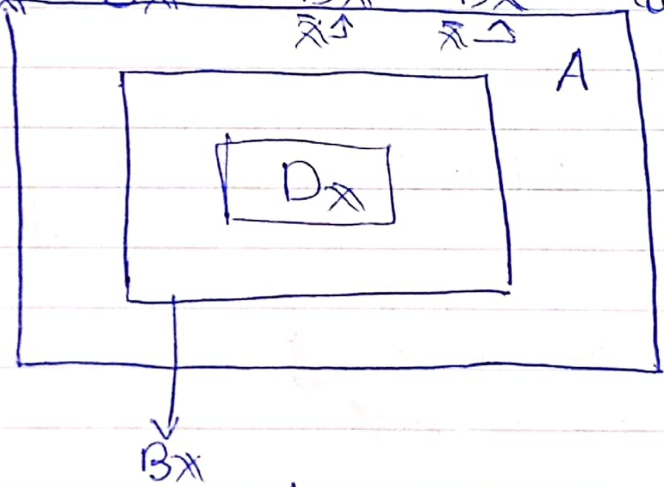
$S^* = \{ x \in A \mid u\ x : \text{κατανομή ισορροπίας} \}$

κάθε στοιχείο του $S^*$ στηρίζεται από την τιμή ισορροπίας $S^* \subseteq D^c$ (από 1ο θεωρ. ευημερίας, αν κάθε $u: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ είναι νεοκλασσική)

Αν οι $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ νεοκλασσικές

$S^* \subseteq S \subseteq A^c$.

$D_{\bar{x}} \subseteq B_{\bar{x}} \Rightarrow B^c_{\bar{x}} \subseteq D^c_{\bar{x}}$ εάν η $\bar{x}$ κατανομή ισορ




$B_{\bar{x}} = \{ z \in A \mid u_i(z_i) \geq u_i(x_i) \}$ όπου $u_i(z_{i0}) \geq u_i(x_{i0})$

$D_{\bar{x}} = \{ z \in A \mid$

Αν οι συν. ωφ. $u: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ είναι νεοκλασσικές (άρα και συνεχείς) κάθε κατανομή ισορροπίας $\bar{x}$ ως προς $p \gg 0$ από το θεώρημα (που δείξαμε σήμερα) είναι ασθενώς άριστη κατά Pareto εφόσου το $\bar{p}$ στηρίζει την $\bar{x}$

**Πόρισμα 2**: Από τον $1^o$ Θ. Ευημερίας αν οι $u_i: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ είναι νεοκλασσικές κάθε κατανομή ισορροπίας $\bar{x}$ ως προς το $\bar{p} \gg 0$ είναι άριστη κατά Pareto

6/11/2019

SOS ARA!!! (θα πέσει σίγουρα στις εξετάσεις)!!

**Παράδειγμα 1**: Έστω οικονομία ανταλλαγής με δύο καταναλωτές. Έτσι ώστε $u_1(x,y) = \min\{x,y\} = u_2(x,y)$
και $w_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $w_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Έστω ότι υπάρχει κατανομή $x = ((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ που βελτιώνει και τους δύο καταναλωτές*.
Τότε πρέπει να ισχύουν:

$$u_1(x_1,y_1) \geq u_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad (1a)$$

$$u_2(x_2,y_2) \geq u_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad (1b)$$

* σε σχέση με την αρχ. κατανομή.

Επίσης παρατηρούμε ότι $u_1, u_2$ είναι συνεχείς

**Λήμμα 1**:
$$\min\{x,y\} = \frac{1}{2}\left(x+y - |x-y|\right)$$

**Απόδ.**

- Αν $x \geq y$ τότε $\min\{x,y\} = y$
  τότε $\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-(x-y)) = 2y\frac{1}{2} = y$.

- Αν $y > x$ τότε $\min\{x,y\} = x$ και
  τότε $\frac{1}{2}(x+y-(y-x)) = 2x\frac{1}{2} = x$

Άρα οι 1a, 1b είναι αντίστοιχα οι ανισότητες

$$\frac{1}{2}(x_1 + y_1 - |x_1 - y_1|) \geq \frac{1}{2} \quad (2a)$$

$$\frac{1}{2}(x_2 + y_2 - |x_2 - y_2|) \geq \frac{1}{2} \quad (2b)$$

Από τις 2α, 2β προκύπτουν αντίστοιχα οι 3α, 3β:

$$x_1+y_1-|x_1-y_1|\geq 1 \quad (3α)$$

$$x_2+y_2-|x_2-y_2|\geq 1 \quad (3β)$$

Αθροίζοντας κατά μέλη προκύπτει η (4)

$$\overbrace{(x_1+y_1)}^{ω_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1}+\overbrace{(x_2+y_2)}^{ω_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1}-|x_1-y_1|-|x_2-y_2|\geq 2 \quad (4)$$

$$\underbrace{1+1}_{2}-|x_1-y_1|-|x_2-y_2|\geq 2$$

$$\cancel{2}-|x_1-y_1|-|x_2-y_2|\geq \cancel{2}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} -|x_1-y_1|-|x_2-y_2|\geq 0 \quad (5)$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \underbrace{-|x_1-y_1|-|x_2-y_2|}_{\leq 0}\geq 0$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} -|x_1-y_1|-|x_2-y_2|=0 \Rightarrow$$

$$|x_1-y_1|+|x_2-y_2|=0$$

και όταν $x_1=y_1$, $x_2=y_2$ (6)

Η αρχική κατανομή δλδ $ω_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

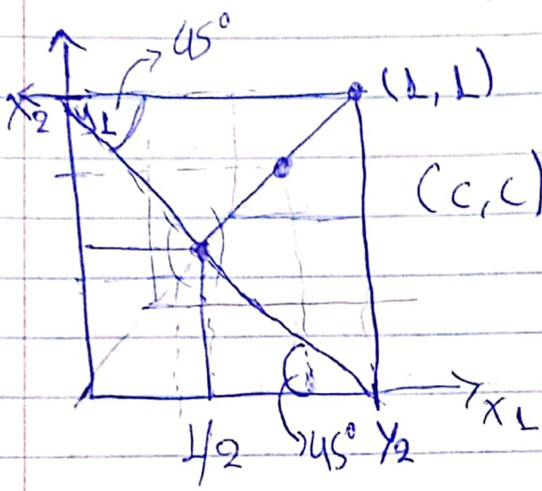
$ω_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Ικανοποιεί την (6)

Αν δεν ίσχυε ότι $x_1=y_1=\frac{1}{2}$ και $x_2=y_2=\frac{1}{2}$

θα παραβιαζόταν η (5). Άρα η αρχική κατανομή είναι ασθενώς άριστη κατά Pareto και άριστη κατά Pareto.

Το συμπέρασμα (7) προκύπτει από το "κουτί του Edgeworth".




$(c,c)$ με $c<\frac{1}{2}$

$p=(1,1)$ είναι τιμή ισορροπίας

$u_1(x,y)=\min\{x,y\}$ έχει άκρως επιθυμητό στοιχείο το $(1,1)$

$=\min\{x+\varepsilon, y+\varepsilon\}=\min\{x,y\}+\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon>0$

$u((x,y)+\varepsilon(1,1))=$

συνεχής η καν. αντιστοιχ. αυτό

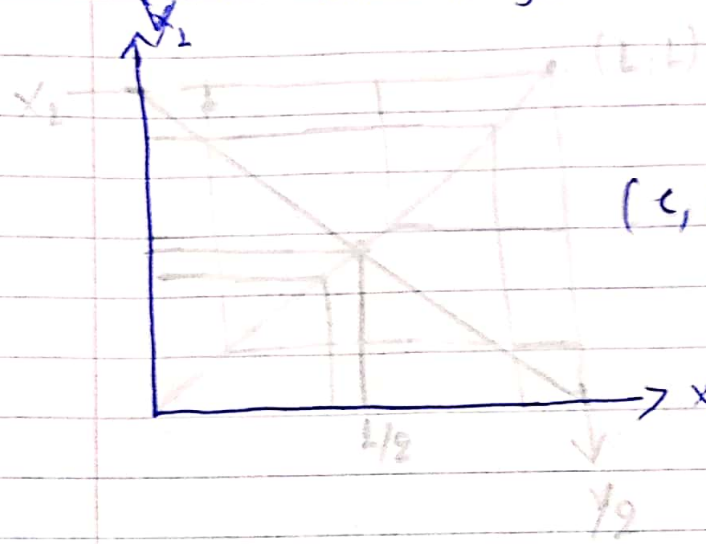
κάποιο διάνυσμα. είναι αυστηρώς

θετικό

στοιχείο

άριστη κατανομή

Το θεώρημα (7) προκύπτει από το "κουτί του Edgeworth.




$(c,c)$ με $c < \frac{1}{2}$

$p(1,1)$ είναι τιμή ισορροπίας

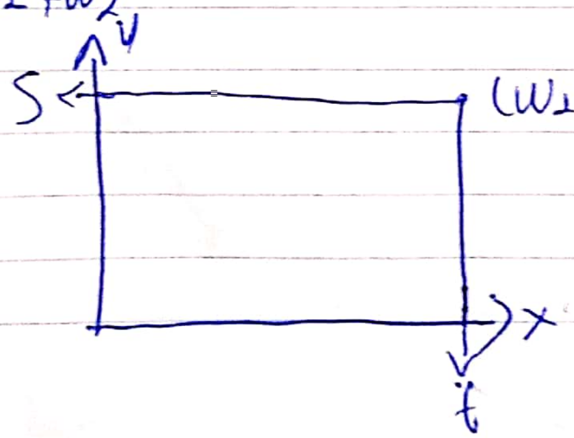
$u_1(x,y) = \min\{x,y\}$ έχει ασθενώς επιθυμητό στοιχείο το $(1,1)$

$= \min\{x+\varepsilon, y+\varepsilon\} = \min\{x,y\} + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$

$\simeq u((x,y) + \varepsilon(1,1))$

Προσδιορισμός του "κουτιού" του Edgeworth και υπολογισμός τιμών και κατανομών ισορροπίας σε νεοκλασσικές οικονομίες ανταλλαγής

1) Σχεδιάζουμε το x-y σύστημα αξόνων και το s-t σύστημα αξόνων που ξεκινά από το $w = w_1 + w_2$




$(w_1, w_2) = w.$

2) Εκφράζουμε τις συναρτήσεις ωφελιμότητας ως προς $x-y$ σύστημα αξόνων δηλαδή:

$$\tilde{u}_1(x,y) = u_1(x,y)$$

$$\tilde{u}_2(x,y) = u_2(\omega_1 - x, \omega_2 - y)$$

3) Υπολογίζουμε (εφ' όσον είναι καλά ορισμένο) το $\nabla \tilde{u}_1$ και το $\nabla \tilde{u}_2$ και επειδή θέλουμε να βρούμε τις τιμές ισορροπίας και την αντίστοιχη ως προς κάθε τιμή ισορροπίας κατανομή ισορροπίας απαλείφουμε το $\lambda > 0$ από την εξίσωση $\nabla \tilde{u}_1(x,y) = \lambda \nabla \tilde{u}_2(x,y)$ (1)

4) Από την απαλοιφή του $\lambda > 0$ στην (1) προκύπτει η συνάρτηση $\sqrt{y(x)}$ η οποία ονομάζεται καμπύλη συμφωνίας (contract curve)

5) Βρίσκουμε τα σημεία τομής της $Y_c'(X)$ με τις καμπύλες αδιαφορίας των καταναλωτών αντικαθιστώντας το $Y$ με το $Y_c(X)$ στις $\tilde{u}_1$ και $\tilde{u}_2$, δηλ. έχουμε ότι $\tilde{u}_1(x, Y_c(x)) =$
$= \tilde{u}_1(\omega_1)$ δηλ. $\tilde{u}_1(x, Y_c(x)) \underset{(\tilde{u}_1 := u_1)}{=} u_1(x, y_c(x)) =$

$= u_1(\omega_1)$ (1α)

$\tilde{u}_2(x, y_c(x)) = \tilde{u}_2(\omega_2)$ (1β)

6) Από τις 1α, 1β βρίσκουμε το πεδίο ορισμού του $x$ στο κουτί του Edgeworth.

BOSARES 1

(1) Αφού οι $u_1, u_2$ είναι νεοκλασσικές μεγιστοποιούνται πάνω στον εισοδηματικό περιορισμό των $B(p, w_1)$, $B(p, w_2)$. Επομένως γράφουμε τις εξισώσεις του εισοδηματικού περιορισμού για τους καταναλωτές 1 και 2 στην περίπτωση αυτή:

$\bar{w}_1 = w_{1,1} + w_{2,1}$

$\bar{w}_2 = w_{1,2} + w_{2,2}$

$w_1 = (w_{1,1}, w_{1,2}) \quad w_2 = (w_{1,2}, w_{2,2})$

$$p_1 w_{1,1} + p_2 w_{1,2} = p_1 x + p_2 y_c(x) \qquad (2a)$$

$$p_1 w_{2,1} + p_2 w_{2,2} = p_1 (\underbrace{\bar{w}_1 - w_{1,1}}_{w_{2,1}}) + p_2 (\underbrace{\bar{w}_2 - w_{1,2}}_{w_{2,2}}) =$$

$$= p_1 x_{2,1} + p_2 x_{2,2} \qquad (2b)$$

$w_1 = (w_{1,1}, w_{1,2})$

$+$

$w_2 = (w_{2,1}, w_{2,2})$

$\shortparallel$

$\bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$

Αρκεί λοιπόν να λύσουμε την 2a) ως προς x. Από την 2a διαιρώντας με $p_2$ έχουμε θέτοντας $\frac{p_1}{p_2} = t$ την (3a)

$$(3a) \quad t w_{1,1} + w_{1,2} = t x + y_c(x)$$

(8) Βρίσκουμε τις τιμές του t για τις οποίες 8i) Η 3a έχει λύση θετική ως προς x και η λύση ανήκει στο πεδίο ορισμού της $y_c(x)$

8ii) Οι τιμές του $t>0$ που είναι αποδεκτές είναι εκείνες ακριβώς για τις οποίες
$(x, y_c(x)) + (\omega_{2,1}, \omega_{2,2}) = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$

Παράδειγμα βιβλίου (σελ. 60) 5ος

$$u_1(x,y) = x\cdot y, \quad \omega_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$+$$
$$u_2(x,y) = x^2 y, \quad \omega_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$
$$= \bar{\omega} = (3, 2)$$

$$\tilde{u}_1(x,y) = x\cdot y, \quad \tilde{u}_2(x,y) = (3-x)^2(2-y)$$

$$\nabla\tilde{u}_1(x,y) = (y, x)$$

$$\nabla\tilde{u}_2(x,y) = (-2(3-x)(2-y), -(3-x)^2)$$

Από την $\nabla\tilde{u}_1(x,y) = \lambda\nabla\tilde{u}_2(x,y)$ με $\lambda>0$

έχουμε $\frac{y}{x} = \frac{-2(3-x)(2-y)}{-(3-x)^2} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{2(2-y)}{3-x}$

$y(3-x) = 2x(2-y)$ από την (*)

$3y - yx = 4x - 2xy \Leftrightarrow$

$4x = 3y + yx \Rightarrow y_c(x) = \frac{4x}{x+3}, \quad x>0$

Το σημείο τομής της $\tilde{u}_1(x, y_c(x)) = \frac{3}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ προκύπτει από την εξίσωση

$$\frac{4x}{x+3}\cdot x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 16x^2 - 3x - 9 = 0 \quad (**)$$
$$\Delta = 9 + 36\cdot 16 = 9+(5$$

η θετική ρίζα της ** είναι $\frac{3+\sqrt{585}}{32}$

Η αντίστοιχη εξίσωση για τον 2º καταναλωτή

$$(3-x)^2\left(2-\frac{4x}{x+3}\right)=\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\left(2-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{3}{2}=\frac{27}{8}\iff$$

$$\underbrace{(3-x)^3=\frac{27}{16}(x+3)}_{(3)}$$

Θέτοντας $x(u)=3-u$ η (3) γίνεται

$$\frac{16}{27}u^3=6-u$$

$$y_c(x)\;,\; x\in\left(\min\Big\{\overbrace{\frac{3+\sqrt{585}}{32}}^{p_1}, u_0\Big\}, \max\{p_1, u_0\}\right)$$

$$t\cdot x+\frac{4x}{x+3}=\frac{3t}{2}+\frac{1}{2}\;,\quad t=\frac{p_1}{p_2}$$

$$2(x+3)\left[tx+\frac{4x}{x+3}\right]=\left(\frac{3t+1}{2}\right)2(x+3)\iff$$

$$(3t+1)(x+3)=8x+2tx(x+3)\iff$$

$$\iff(2t)x^2+(8+6t-3t-1)x-(9t+3)=0$$

$$\iff\underbrace{(2t)x^2+(7+3t)x-(9t+3)=0}$$

$$\Delta(t)=(7+3t)^2+4\cdot 2t(9t+3)=$$

$= 81t^2 + 68t + 49$ Έστω $t = \frac{P_2}{P_1}$

$= 81 + 69 + 49 > 0$ (1,1) $P_1 = 1$
(2,1) $P_2 = 1$
$t = 1$

18/11/2019

## Συμβολισμός

Έστω $j = 1, 2, \dots, J$ χρηματοοικονομικοί τίτλοι και δύο χρονικές περίοδοι $t=0$, $t=1$. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$, κάποιος επενδυτής (καταναλωτής) αγοράζει (πουλά βραχυπρόθεσμα) κάποιες μονάδες $(z_1, z_2, \dots, z_J)^T = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_J \end{bmatrix}$ από τους $J$ χρηματοοικονομικούς τίτλους [κάθε $z_i \in \mathbb{R}$]

Οι τρέχουσες τιμές κάθε χρηματοοικονομικών τίτλων (ανά μονάδα) δίνονται από το $q = (q_1, \dots, q_J)$

Άρα στην περίοδο $t=0$, $-q \cdot z$ είναι η αξία του χαρτοφυλακίου $z$.

Στην χρονική περίοδο $t=1$, ο επενδυτής εισπράττει την τρέχουσα αξία ανά χρημ. τίτλο. η οποία συμβολίζεται με το διάνυσμα στήλη $V^j$

$V^j = \begin{bmatrix} V^j(1) \\ \vdots \\ V^j(S) \end{bmatrix}$ διότι υποθέτουμε ότι υπάρχουν $S = 1, 2, \dots, S$ πιθανές καταστάσεις $(p_1, p_2, \dots, p_S)$

Θα συμβολίζουμε με $V = [V^1, V^2, \dots, V^J]$, $S \times J$

και η τρέχουσα αξία του χαρτοφυλακίου $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_J \end{bmatrix}$ είναι $V \cdot z$ $\underbrace{(S \times J)}_{V}(J \times 1)(S \times 1)$

τρέχουσα

Η χρηματική αξία του χαρτοφυλακίου $z \in \mathbb{R}^J$ και για τις δύο περιόδους ($t=0, t=1$) δίνεται από το γινόμενο $\begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix} \cdot z \in (S+1) \times (J) \times (J \times 1)$

Αν συμβολίσουμε με $W = \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}$ τότε το $t(z) = Wz \in \mathbb{R}^{S+1}$

Ορισμός 1

Μια αγορά $\langle W \rangle$ ονομάζεται πλήρης αν ~~και~~ $rank(V) = S$

Ορισμός 2

Μη πλήρης ονομάζεται κάθε αγορά $\langle W \rangle$ όταν $rank(V) < S$

$V\tilde{z}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e(s)$ ως κανονικής ~~διάνυσμα~~ βάσης του $\mathbb{R}^S$
$s = 1, 2, \dots, S$

Ορισμός 3

Στην αγορά $\langle W \rangle$ δεν υπάρχει arbitrage ανν $\langle W \rangle \cap \mathbb{R}^{S+1}_+ = \{0\}$, $0 \in \mathbb{R}^{S+1}$

Υπάρχουν πλήρεις αγορές στις οποίες υπάρχει arbitrage? Απ ΝΑΙ!

Π.Χ

Ο πίνακας $W$ για το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου είναι $W = \begin{bmatrix} -S_0 & -1 \\ S_0 u & 1+r \\ S_0 d & 1+r \end{bmatrix}$.

Απο $q = (S_0, 1)$ $\quad -q = (-S_0, -1)$

$$V = \begin{bmatrix} S_0 u & 1+r \\ S_0 d & 1+r \end{bmatrix}$$

$rank(V) = 2$ διότι $\begin{vmatrix} S_0 u & 1+r \\ S_0 d & 1+r \end{vmatrix} = S_0 u(1+r) - S_0 d(1+r) = S_0(1+r)(u-d) \neq 0$

απο η αγορά είναι πλήρης, διότι $u > d$

Θεώρημα 1

Η αγορά $\left\langle \begin{bmatrix} -S_0 & -1 \\ Su & 1+r \\ -S_0 d & 1+r \end{bmatrix} \right\rangle$ δεν έχει arbitrage

ανν $u > 1+r > d$

Απ. Έστω ότι δεν ισχύει η (1). Τότε θα ισχύει ή $1+r \geq u > d$ (1α)

ή $u > d \geq 1+r$ (1β)

Έστω ότι ισχύει η (1α). Τότε για το χαρτοφυλάκιο

$$z_1 \quad \begin{bmatrix} -S_0 & -1 \\ S_0 u & -1+r \\ S_0 d & 1+r \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ +S_0 \end{bmatrix}}_{z_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -S_0 u(-1) + S_0(1+r) \\ -S_0 d(-1) + S_0(1+r) \end{bmatrix} \overset{*}{=}$$

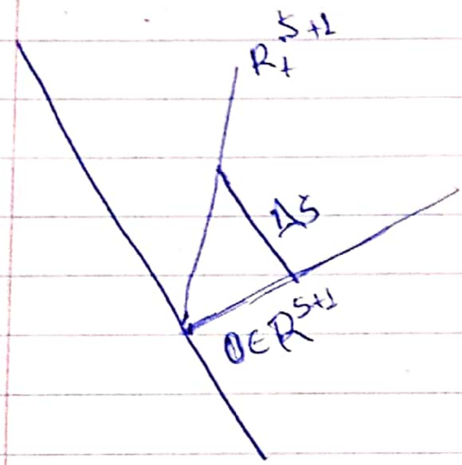
$$\overset{*}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{bmatrix}$$

~~ςοι~~

Έστω ότι ισχύει η (16)

$$\begin{bmatrix} -S_0 & -1 \\ S_0 u & 1+r \\ S_0 d & 1+r \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ +S_0 \end{bmatrix}}_{=z_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -S_0 u + S_0(1+r) > 0 \\ S_0 d + S_0(1+r) > 0 \end{bmatrix}$$

$u > 1+r > d$ είναι λάθος και [illegible] arbitrage.




$$\Delta_S = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^{S+1} \,\middle|\, \sum_{s=0}^{S} y(s) = 1 \text{ και } y(s) > 0,\ s = 0,1,2,\dots,S \right\}$$

Η μη ύπαρξη arbitrage $\Leftrightarrow \langle W \rangle \cap \Delta_S = \emptyset$

Το $\langle W \rangle$ ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^{S+1}$ είναι κυρτό υποσύνολο του και κλειστό *

Έστω $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία χαρτοφυλακίων τότε
$-q \cdot z_n \to -q \cdot z$
με $z_n \to z$
από συνέχεια των εσωτ. γινομένων στον $\mathbb{R}^{S+1}$.
Για τον ίδιο λόγο αν $z_n \to z$ τότε $V_j z_n \to V_j z$
για κάθε $j = 1,2,\dots,J$
Άρα $Vz_n \to Vz$. Επίσης το $\Delta_S$ είναι κυρτό φραγμένο διότι $y_s \le 1$ και κλειστό υπό του $\mathbb{R}^{S+1}$

Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Delta_S$ $y_n \to y$ τότε

$y_n \cdot 1 \to y \cdot 1$ λόγω συνέχειας του εσ. γινομένου στον $\mathbb{R}^{S+1}$

$(1) \in \mathbb{R}^{S+1}$

Άρα από το Ισχυρό Θ.Δ.Κ.Σ υπάρχει $\pi \neq 0 \in \mathbb{R}^{S+1}$ ώστε

$\pi \cdot t(z) \leq a < a+\delta \leq \pi \cdot y$ , $y \in \Delta_S$ , $\delta > 0$

$a = 0$ , διότι αν δεν ήταν $a=0$, θα υπάρχει ή $a>0$ ή $a<0$

Αν $a>0$ Έστω $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lambda_n \to +\infty$

άρα $\pi \cdot (\lambda_n \cdot t(z)) = \lambda_n \pi \cdot (t(z)) \leq \lambda_n \cdot a$

$\pi \cdot t(z) < 0$ , $\pi \cdot t(-z) = \pi \cdot W(-z) = -\pi W z$

Έστω $z_0$ $\pi(t(z_0)) < 0$

$\pi(t(-z_0)) > 0$

$\pi(t(z)) = 0, \forall z \in \mathbb{R}$

$\pi \cdot \in \langle W \rangle \perp$

Γνωρίζουμε ότι $\langle W \rangle \oplus \langle W \rangle^{\perp} = \mathbb{R}^{S+1}$

$\dim\langle W \rangle + \dim\langle W \rangle^{\perp} = S+1$

$(\underset{s=0}{1}, \pi_1)$ και $\pi_1(s) > 0$ $\forall s = 1, 2, \ldots S$

$$(1, \pi_1) \underset{W}{\begin{pmatrix} -q \\ \vdots \\ V \end{pmatrix}} = 0 \in \mathbb{R}^J$$

$(1 \times (S+1)) \times (S+1) \times J$ $(-q + \pi_1 V) = 0 \in \mathbb{R}$

$q = \pi_1 V$

# Risk neutral

SOJARA

19/11/2019

$(1, \pi_1)$ $\quad \pi_1 = (\pi_u, \pi_d)$

$$[1, \pi_1] \begin{bmatrix} -S_0 & -1 \\ S_0 u & 1+r \\ S_0 d & 1+r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$(1 \times 3)$ $(3 \times 2)$

$$S_0 = \pi_u S_0 u + \pi_d S_0 d \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \pi_u (1+r) + \pi_d (1+r) \qquad (2)$$

$\pi_u (1+r) = \mu_u$ 
$\pi_d (1+r) = \mu_d$ } το γραμμικό σύστημα των (1), (2) γίνεται:

$$1 = \pi_u \cdot u + \pi_d \cdot d$$

$$1 = \frac{\mu_u}{1+r} \cdot u + \frac{\mu_d}{1+r} \cdot d \qquad (1a)$$

$$1 = \mu_u + \mu_d \qquad (1b)$$

$\Omega = \{u, d\}$ , $F = \{\{\emptyset\}, \{u\}, \{d\}, \{u, d\}\}$ / $(p_u, p_d) = \mathbb{R}$

Λύνουμε το σύστημα των (1a), (1b) και προκύπτει:

$$\mu_u = \frac{(1+r)-d}{u-d} \quad , \quad \mu_d = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

$$q = (S_0, 1) = \pi_1 V \Leftrightarrow$$

$$(S_0, 1) = [\overset{= \frac{\mu_u}{1+r}}{\pi_u}, \overset{\frac{\mu_d}{1+r}}{\pi_d}] \cdot \begin{bmatrix} S_0 u & 1+r \\ S_0 d & 1+r \end{bmatrix} = [0, 0] \qquad (3)$$

$(1 \times 2)$ $\times$ $(2 \times 2)$

η οποία είναι αντίστοιχη με τις τιμές γραμμικής εξισώσεις 1a, 1b. Όπως $\mu_u = (1+r)\,q_u$
$\mu_d = (1+r)\,q_d$

Το (3) είναι ισοδύναμο με το

$$S_0 = \frac{S_0 u}{1+r}\mu_u + \frac{S_0 d}{1+r}\mu_d = \frac{1}{1+r}E_\mu(S_0 u, S_0 d)$$

$$1 = \frac{1+r}{1+r}\cdot\mu_u + \frac{1+r}{1+r}\cdot\mu_d = \frac{1}{1+r}E_\mu(1+r, 1+r)$$

25/11/2019 $u(x,y) = \max\{x,y\}$

$p_1 x + p_2 y = p_1 w_1 + p_2 w_2 = m$

$= \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$

Αν $x \geq y$ $\quad u(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}x$

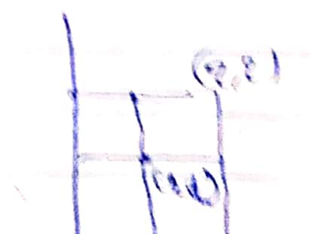
$$p_1 x + p_2 \frac{1}{2} x = m \Leftrightarrow$$

$$2p_1 x + p_2 x = m \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{m}{2p_1 + p_2}$$

Βέλτιστοι κατά Pareto = άριστοι κατά Pareto.

(π.χ. στα εργαλεία και τις επιχειρήσεις)
risk neutral εταιρείες



$\min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$
$\min\{2-x, 2-y\} = \frac{1}{2}(2-x+2-y-|2-x, 2-y|)$
$(1,1) = w_1$
$(1,1) = w_2$

$u_1(x,y) = x^{1/2} y^{1/2}$

$u_1(x,y) = xy \qquad w_1 = (1,1) \qquad X_1(P_1, P_2) = \left( \frac{\overset{P \cdot W_1}{\frac{1}{2}(P_1+P_2)}}{P_1}, \frac{\overset{P \cdot W_2}{\frac{1}{2}(P_1+P_2)}}{P_2} \right)$

$u_2(x,y) = x^2 y \qquad w_2 = (1,1)$

$u_2(x,y) = x^{2/3} y^{1/3} \qquad X_1(P_1, P_2) = \left( \frac{2/3\,(P_1+P_2)}{P_1}, \frac{1/3\,(P_1+P_2)}{P_2} \right)$