# Διαφάνειες Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Νίκος Χαλιδιάς

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αιγαίου

19 Μαΐου 2024

# Τι είναι τα options;

Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) είναι συμβόλαια μεταξύ δυο μερών. Ο πωλητής πουλά ένα τέτοιο συμβόλαιο στον αγοραστή ο οποίος έχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να εξασκήσει το δικαίωμα μέσα σε ένα χρονικό διάστημα $[0, T]$.

# Ποια μπορεί να είναι η απολαβή;

Η απολαβή (payoff), δηλαδή το ποσό που δικαιούται να πάρει ο αγοραστής και είναι υποχρεωμένος ο πωλητής να δώσει, μπορεί να είναι της μορφής

(i) $P_T = \max\{S_T - K, 0\}$ (call option) όπου $S_t$ η αξία ενός αγαθού κατά την χρονική στιγμή $t$ και $K$ ένας δοσμένος αριθμός (strike price)

(ii) $P_T = \max\{K - S_T, 0\}$ (put option)

(iii) $P_T = \max\{\max_{0\leq t\leq T} S_t - K, 0\}$ (call on maximum)

(iv) $P_T = \max\{S_1(T) - S_2(T), 0\}$ (spread option)

και πολλά άλλα...

# Ταξινόμηση Συμβολαίων Προαίρεσης

Μπορούμε να ταξινομήσουμε τα συμβόλαια στις παρακάτω κατηγορίες.

• Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα συμβόλαια των οποίων η απολαβή είναι άνω φραγμένη (όπως τα put options). Εδώ ο πωλητής δεν διατρέχει κίνδυνο χρεοκοπίας ενώ τόσο ο πωλητής όσο και ο αγοραστής θα έχουν φραγμένο κέρδος ή ζημιά.

• Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα συμβόλαια των οποίων η απολαβή δεν είναι άνω φραγμένη (όπως τα call options). Εδώ ο πωλητής διατρέχει κίνδυνο χρεοκοπίας ενώ ο αγοραστής όχι. Επομένως δεν είναι ισοδύναμοι απέναντι στον κίνδυνο.

Τα συμβόλαια με μη φραγμένη απολαβή μπορούν να χωριστούν στις δυο επόμενες υποκατηγορίες,

• Σε αυτή την υποκατηγορία μπορεί ο πωλητής να αγοράσει κατάλληλα call options για να φράξει την απολαβή. Για παράδειγμα σε ένα spread option μπορεί να αγοράσει ένα call option με υποκείμενο αγαθό το $S_1$ και επομένως να εκμηδενίσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας.

• Σε αυτή την υποκατηγορία ο πωλητής δεν μπορεί να εκμηδενίσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας, όπως για παράδειγμα σε ένα call on maximum option. Όμως μπορεί να αγοράσει μια σειρά από call options με διαφορετικές ημερομηνίες λήξης έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας.

# Σημαντική η ταξινόμηση

**Παρατηρηση**

*Η παραπάνω ταξινόμηση των options είναι σημαντική τόσο στον αγοραστή όσο και στον πωλητή. Διαφορετικού τύπου υποθέσεις και κινήσεις θα πρέπει να γίνουν σε κάθε κατηγορία.*

# Το μαγικό κουτί I

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα μαγικό κουτί στο οποίο ρίχνεις όλες τις πληροφορίες που υπάρχουν στην αγορά και έστω ότι πρόκειται να πουλήσετε ένα συμβόλαιο προαίρεσης. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το μαγικό κουτί έχει δυο κουμπιά και ο κάτοχος του μπορεί να πατήσει μόνο το ένα κάθε φορά. Πατώντας το πρώτο κουμπί το μαγικό κουτί σου δίνει την τιμή πώλησης του συμβολαίου η οποία θα διαμορφωθεί μετά από το σχετικό παζάρι. Το άλλο κουμπί θα σου δώσει την εξής πληροφορία: πως θα τοποθετήσεις το ποσό $Y$ έτσι ώστε να εξασφαλιστείς απέναντι στον κίνδυνο και ταυτόχρονα να μεγιστοποιήσεις την πιθανότητα κέρδους.

# Το μαγικό κουτί II

Ένας επενδυτής ο οποίος σκέφτεται λογικά και έχει στην κατοχή του ένα τέτοιο μαγικό κουτί θα πατήσει το δεύτερο κουμπί. Η πληροφορία του ποια θα είναι τελικά η τιμή πώλησης αυτού του συμβολαίου μετά το παζάρι δεν είναι και τόσο χρήσιμη όσο χρήσιμη είναι η πληροφορία του τι είναι καλύτερο να κάνει με το ποσό αυτό.

# Ποιο είναι το (μαθηματικό) πρόβλημα στα παραπάνω;

Η τιμή πώλησης $Y$ ενός συμβολαίου θα διαμορφωθεί σύμφωνα με τον νόμο της προσφοράς και της ζήτησης.

Αυτό που έχει ενδιαφέρον για τον επενδυτή είναι πως θα χρησιμοποιήσει καλύτερα το ποσό $Y$ για την δική εξασφάλιση έναντι του ρίσκου που ανέλαβε.
Το πρόβλημα εύρεσης της μελλοντικής τιμής πώλησης ενός συμβολαίου είναι ένα πρόβλημα πρόβλεψης το οποίο ανάγεται σε πρόβλημα πρόβλεψης των τιμών των υποκείμενων αγαθών. Σε αυτό το πρόβλημα, εκτός από τα ιστορικά δεδομένα, θα πρέπει να λάβει κανείς υπόψη τόσο πρόσφατα γεγονότα (τα οποία δεν έχουν αφήσει το αποτύπωμα τους στα ιστορικά δεδομένα) όσο και πιθανά μελλοντικά γεγονότα. Μάλιστα, θα πρέπει αυτά τα γεγονότα να αξιολογηθούν κατάλληλα προκειμένου ο επενδυτής να συμπεράνει το οτιδήποτε. Το πρόβλημα αυτό, αν και πολύ σημαντικό για τους επενδυτές, δεν θα το μελετήσουμε εδώ.

**ΕΡΩΤΗΜΑ**

*Για ποιους λόγους ο αγοραστής θέλει να αγοράσει ένα τέτοιο συμβόλαιο; Παρόμοια ερώτηση ισχύει και για τον πωλητή.*

# Κέρδος ή εξασφάλιση

Ο πωλητής θα αναλάβει το ρίσκο πουλώντας ένα τέτοιο συμβόλαιο με κάποιο αντίτιμο έχοντας ως βασικό στόχο το κέρδος. Ο αγοραστής θα αγοράσει ένα συμβόλαιο είτε για λόγους εξασφάλισης είτε για λόγους κερδοσκοπίας.

# Τα ερωτήματα του πωλητή

Τα ερωτήματα που έχει να απαντήσει ο πωλητής πουλώντας ένα συμβόλαιο στην τιμή $Y$ είναι τα παρακάτω,

**ΕΡΩΤΗΜΑ**

$(i)$ *Με το ποσό* $Y$ *θα μπορέσω να εκμηδενίσω ή έστω να ελαχιστοποιήσω τον κίνδυνο χρεοκοπίας;*

$(ii)$ *Επιπλέον, ποια είναι η πιθανότητα να έχω κέρδος κατά την λήξη του συμβολαίου;*

# Το ερώτημα του αγοραστή

Από την άλλη μεριά, το βασικό ερώτημα για τον αγοραστή είναι το εξής:

**Ερωτημα**

*Ποια είναι η πιθανότητα κέρδους αγοράζοντας στην τιμή $Y$, δεδομένου ότι αγοράζω το συμβόλαιο αυτό για λόγους κερδοσκοπίας;*

Σημειώστε ότι ο αγοραστής δεν ενδιαφέρεται καθόλου για το πως ο πωλητής θα επενδύσει το ποσό $Y$ που θα πάρει από αυτόν. Το μόνο που τον ενδιαφέρει είναι το παραπάνω ερώτημα.

# Τα call options είναι χρήσιμα και για εξασφάλιση

Σημειώστε ότι ένας πωλητής ενός spread option θα αγοράσει ένα call option για καθαρά λόγους εξασφάλισης. Μάλιστα το ποσό αυτό θα το ενσωματώσει στην τιμή πώλησης του spread option επομένως δεν τον ενδιαφέρει καθόλου η πιθανότητα κέρδους από το call option. Βεβαίως τον ενδιαφέρει να το αγοράσει όσο φθηνότερα γίνεται προκειμένου και η δική του τιμή για το spread option να είναι ανταγωνιστική!

Έστω ότι έχετε ένα τραπεζικό λογαριασμό με ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης $r$ συνεχούς ανατοκισμού.
Θα περιγράψουμε παρακάτω ένα τρόπο αποκόμισης σίγουρου κέρδους χωρίς ρίσκο, αν ικανοποιείται μια σχέση μεταξύ των call και put συμβολαίων με τον ίδιο χρόνο λήξης $T$ και την ίδια τιμή εξάσκησης $K$.
Αν ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$C - P > S_0 - Ke^{-rT} \tag{1}$$

τότε μπορείτε με κατάλληλες κινήσεις να έχετε σίγουρο κέρδος χωρίς ρίσκο.

Για να γίνει αυτό αρκεί να πουλήσετε ένα call (αν το έχετε στη κατοχή σας αλλιώς θα πρέπει να δημιουργήσετε ένα), να αγοράσετε ένα put και μια μετοχή. Στη συνέχεια τοποθετείτε/δανείσθεσται το ποσό $C - P - S_0$, το οποίο είναι μεγαλύτερο του $-Ke^{-rT}$, στον τραπεζικό σας λογαριασμό. Στο χρόνο $T$ θα πληρώσετε το ποσό $(S_T - K)^+$, Θα πάρετε το ποσό $(K - S_T)^+$ και θα έχετε και τη μετοχή αξίας $S_T$. Για οποιαδήποτε τιμή του $S_T$ το παραπάνω ποσό είναι ίσο με $-K$. Επομένως θα σας μείνει το ποσό $(C - P - S_T)e^{rT} - K$ το οποίο είναι θετικό, αρκεί τα αντίστοιχα κόστη συναλλαγής να είναι λιγότερα.

# Ευκαιρία Σίγουρου Κέρδους - Abritrage III

**Αν** οι κινήσεις αυτές γίνουν από πολλούς επενδυτές τότε θα μειωθεί η τιμή του call και θα αυξηθεί η τιμή του put. Τα παραπάνω επιχειρήματα **δεν** οδηγούν στο συμπέρασμα ότι θα ισχύσει τελικά ισότητα και αυτό για δυο βασικούς λόγους. Πρώτα από όλα δεν έχουν όλοι οι επενδυτές πρόσβαση στο ίδιο επιτόκιο κατάθεσης/δανεισμού και δεύτερον τα κόστη συναλλαγής είναι αποτρεπτικά όταν το κέρδος είναι μικρό. Πράγματι, συγκρίνετε τα επιτόκια κατάθεσης/δανεισμού μεταξύ μιας τράπεζας και ενός ιδιώτη ή ακόμη και μεταξύ δυο ιδιωτών οι οποίοι έχουν όμως διαφορά στα κεφάλαια τα οποία επενδύουν. Με παρόμοιες κινήσεις μπορείτε να αποκομίσετε κέρδος και στην περίπτωση της αντίστροφης ανισότητας αρκεί να μπορείτε να δανεισθείτε μετοχές.

# Ευκαιρία Σίγουρου Κέρδους - Abritrage IV

Η σχέση (1) (με ισότητα) ονομάζεται αναλογία αγοράς - πώλησης (put - call parity). Η αναλογία αυτή είναι χρήσιμη για τον επενδυτή προκειμένου να έχει κέρδος χωρίς ρίσκο, αν αυτό είναι δυνατό, και όχι για να υπολογίσει την τιμή του ενός δεδομένου της τιμής του άλλου, διότι πολύ απλά και οι δυο σημερινές τιμές είναι γνωστές ενώ οποιεσδήποτε μελλοντικές τιμές είναι άγνωστες!
Υπάρχουν και άλλου είδους σχέσεις και καταστάσεις από τις οποίες οι λεγόμενοι κερδοσκόποι (Arbitrageurs) αποκομίζουν σίγουρο κέρδος χωρίς ρίσκο. Συνεπώς η αναλογία αγοράς - πώλησης και άλλου τέτοιου είδους σχέσεις είναι χρήσιμες μόνο για κερδοσκοπικούς λόγους.

# Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης ενός χαρτοφυλακίου στην περίπτωση που αυτό αποτελείται από δυο και περισσότερες μετοχές. Για να αναπτύξουμε την κατάλληλη θεωρία θα παρουσιάσουμε αρχικά τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που προέρχονται κυρίως από τη θεωρία πιθανοτήτων.

Ξεκινάμε με την έννοια της συνδιακύμανσης δυο τυχαίων μεταβλητών $X, Y$ η οποία περιγράφει τον τρόπο που αλλάζει η μια τυχαία μεταβλητή σε σχέση με την άλλη. Ορίζεται ως εξής,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τη συνδιακύμανση.

- $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$,
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$,
- $\mathrm{Cov}(X + Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$,
- $\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{m} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_i)$,
- $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$
- $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

Έστω ότι μπορούμε να επενδύσουμε το ποσό $V$ σε $n$ το πλήθος μετοχές. Δηλαδή, θέλουμε να αγοράσουμε $k_i$ μετοχές από την $S_i$ όπου $i = 1, \cdots, n$. Συμβολίζουμε με

$$w_i = \frac{k_i S_i^0}{\sum_{j=1}^{n} k_j S_j^0}$$

όπου ισχύει προφανώς ότι

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

δηλαδή θα ξοδέψουμε το ποσό $w_i V$ για αγορά $k_i$ μετοχών της $S_i$. Ψάχνουμε να βρούμε τα $w_i$ τέτοια ώστε το κέρδος μας στο χρόνο $T$ να είναι το μέγιστο με το ελάχιστο δυνατόν ρίσκο.

Η απόδοση της κάθε μετοχής $\mu_i$ στη χρονική περίοδο $[0, T]$ είναι μια τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε

$$\frac{S_i^T}{S_i^0} = 1 + \mu_i$$

όπου $S_i^0$ και $S_i^T$ είναι η τιμή της μετοχής στο χρόνο $0$ και στο χρόνο $T$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε από ιστορικά δεδομένα τη μέση τιμή $m_i$ της απόδοσης $\mu_i$, τη διακύμανση $\sigma_i$ της απόδοσης καθώς και την συνδιακύμανση $\sigma_{ij}$ των αποδόσεων των μετοχών $S_i$ και $S_j$. Θα υποθέσουμε ότι οι ίδιες τιμές θα ισχύουν και στη χρονική περίοδο $[0, T]$. Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή $0$ έτσι ώστε τη χρονική στιγμή $T$ να έχει τη μέγιστη απόδοση κατά μέση τιμή $m$ και τη μικρότερη δυνατή διακύμανση.

Η απόδοση $\mu$ του χαρτοφυλακίου συνολικά θα είναι τ.ω.

$$\frac{V^T}{V} = 1 + \mu$$

οπότε

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n k_i (S_i^T - S_i^0)}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i k_i S_i^0}{V} = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i$$

Επομένως, η μέση τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου θα

$$m = \mathbb{E}(\mu) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}(\mu_i)$$

Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με

$$\sigma = \mathrm{Var}(\mu) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Αν θέσουμε $\mathbf{w}^t = (w_1, \cdots, w_n)$, $\mathbf{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$ και $\mathbf{m}^t = (m_1, \cdots, m_n)$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^t\mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t\mathbf{m} &= m, \\ \mathbf{w}^t\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} &= \sigma \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{1}^t = (1, \cdots, 1)$ και $\mathbf{w}^t$ είναι ο ανάστροφος του $\mathbf{w}$. Σημειώστε ότι, αφού η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι πάντοτε θετικός αριθμός τότε, ο πίνακας συνδιακυμάνσεων $\Sigma$ είναι θετικά ορισμένος.

Το πρόβλημά μας έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με προϋποθέσεις. Θεωρούμε ως $m_0$ μια απαιτούμενη μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου μας και θέλουμε να υπολογίσουμε τα $w_i$ έτσι ώστε να έχουμε την ελάχιστη δυνατή διακύμανση του χαρτοφυλακίου, δηλαδή επίλυση του παρακάτω προβλήματος

$$\min \quad \mathbf{w}^t \mathbf{\Sigma} \mathbf{w}$$

κάτω από τις προϋποθέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^t \mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t \mathbf{m} &= m_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange λαμβάνουμε τις παρακάτω εξισώσεις,

$$\begin{aligned} 2\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} &= \lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{m}, \\ \mathbf{1}^t \mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t \mathbf{m} &= m_0 \end{aligned}$$

Ας θυμηθούμε από την Γραμμική Αλγεβρα ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας θα έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές. Για τα επόμενα θα υποθέσουμε ότι ο πίνακας $\Sigma$ είναι αντιστρέψιμος ενώ από τα παραπάνω προκύπτει ότι, αφού $\min \ \mathbf{w}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} = \sigma \geq 0$ για κάθε $\mathbf{w}$, είναι και θετικά ορισμένος το οποίο σημαίνει ότι οι ιδιοτιμές του θα είναι θετικές (είναι και συμμετρικός οπότε έχει πραγματικές ιδιοτιμές). Αυτό επίσης σημαίνει ότι και ο αντίστροφος του $\Sigma$ θα είναι θετικά ορισμένος εφαρμόζοντας κατάλληλο θεώρημα Γραμμικής Αλγεβρας.
Λύνουμε ως προς $\mathbf{w}$ την πρώτη εξίσωση και έχουμε

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{m}\right) = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Οι εξισώσεις $\mathbf{1}^t\mathbf{w} = 1$ και $\mathbf{w}^t\mathbf{m} = m_0$ γράφονται και ως

$$[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t\mathbf{w} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την 3 με τον $[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t$ προκύπτει ότι

$$[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t\mathbf{w} = \frac{1}{2}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t\mathbf{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $\mathbf{A} = [\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t \mathbf{\Sigma}^{-1} [\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]$ και εύκολα αποδεικνύουμε ότι είναι θετικά ορισμένος. Πράγματι,

$$[y_1 \quad y_2] \mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = [y_1 \mathbf{m} + y_2 \mathbf{1}]^t \mathbf{\Sigma}^{-1} [y_1 \mathbf{m} + y_2 \mathbf{1}]^t$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο λόγω του ότι ο πίνακας $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ είναι θετικά ορισμένος.

Αντικαθιστώντας τον πίνακα $\mathbf{A}$ προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\mathbf{A}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αντιστρέφοντας τον $\mathbf{A}$ υπολογίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}$ και έχουμε

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

# Ορισμένα από τα $w_i$ μπορεί να είναι αρνητικά! I

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης ορισμένα από τα $w_i$ μπορεί να προκύψουν αρνητικά. Αυτό σημαίνει ότι ο επενδυτής θα δανεισθεί πλήθος μετοχών της $i$ μετοχής, θα τις πουλήσει στην σημερινή τιμή της αγοράς αλλά θα είναι υποχρεωμένος να τις επιστρέψει στο μέλλον στον δανειστή του (short selling). Η κίνηση αυτή μπορεί να έχει απεριόριστη ζημιά στον επενδυτή, αφού η αξία της μετοχής μπορεί (θεωρητικά) να αυξηθεί απεριόριστα στο μέλλον ενώ ο επενδυτής θα είναι υποχρεωμένος να αγοράσει ακριβά τις μετοχές τις οποίες δανείστηκε και πρέπει να επιστρέψει.

# Ορισμένα από τα $w_i$ μπορεί να είναι αρνητικά! II

Προκειμένου η πιθανή ζημιά του επενδυτή να είναι άνω φραγμένη θα πρέπει να αγοράσει και ένα συμβόλαιο αγοράς (call option) ανά μετοχή προκειμένου να εξασφαλιστεί. Τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης έχουν κυρίως τον ρόλο της εξασφάλισης του επενδυτή. Παρόλα αυτά όμως μπορεί κάποιος να τα χρησιμοποιήσει για λόγους κερδοσκοπίας ακριβώς όπως τις μετοχές, ειδικά όταν αυτά τα συμβόλαια είναι διαπραγματεύσιμα στην χρηματιστηριακή αγορά. Για παράδειγμα μπορεί κάποιος να αγοράσει ένα συμβόλαιο αγοράς ή πώλησης με την προσδοκία ότι θα ανέβει η αξία του συμβολαίου και θα το πουλήσει ακριβότερα, πριν την λήξη του προφανώς.
Στην περίπτωση που επιπλέον απαιτήσουμε τα $w_i \geq 0$ τότε αυτό πρέπει να συμπεριληφθεί στις προϋποθέσεις. Σε αυτή την περίπτωση η επίλυση του προβλήματος γίνεται δυσκολότερη και, εν γένει, θα χρειαστεί η εφαρμογή κατάλληλου μαθηματικού λογισμικού.

Στην συνέχεια θα δώσουμε τρεις οπτικές βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου με την επιπλέον προϋπόθεση ότι $w_i \geq 0$ θεωρώντας χαρτοφυλάκια με μικρό πλήθος μετοχών έτσι ώστε οι υπολογισμοί να είναι εφικτοί με το χέρι διαφορετικά πρέπει να χρησιμοποιηθεί κατάλληλο λογισμικό.

# Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου ελάχιστης διακύμανσης με τρεις μετοχές I

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμνανσης το οποίο να αποτελείται από τρεις μετοχές. Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι ως εξής

$$
\begin{aligned}
\sigma &= f(w_1, w_2, w_3) \\
&= w_1^2\sigma_1 + w_2^2\sigma_2 + w_3^2\sigma_3 + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23}
\end{aligned}
$$

όπου $\sigma_i = \sigma_{ii}$. Η μέση τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι ίση με

$$m_1w_1 + m_2w_2 + m_3w_3 = m_0 \tag{5}$$

Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τίποτε όταν ισχύει $m_1 = m_2 = m_3$ οπότε θα υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $m_1 \neq m_2$.

# Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου ελάχιστης διακύμανσης με τρεις μετοχές II

Προφανώς θα πρέπει να ισχύει ότι

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \tag{6}$$

Από τις 5 και 6 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{t(m_2 - m_3) + m_0 - m_2}{m_1 - m_2} \\ w_2 &= \frac{t(m_3 - m_1) + m_1 - m_0}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

όπου $t = w_3$. Στην συνέχεια αντικαθιστούμε τα $w_1, w_2$ στην $f(w_1, w_2, w_3)$ οπότε προκύπτει συνάρτηση μιας μεταβλητής, της μεταβλητής $t$. Δηλαδή θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση ως προς $t$ σε όλο το $\mathbb{R}$ αν δεν έχουμε κάποια επιπλέον απαίτηση για τα $w_1, w_2, w_3$.

# Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου ελάχιστης διακύμανσης με τρεις μετοχές III

Αν επιπλέον θέλουμε τα $w_1, w_2, w_3$ να είναι θετικά τότε θα πρέπει να απαιτήσουμε το $t$ να κινείται στο κατάλληλο υποσύνολο του $[0, 1]$ στο οποίο τα $w_1, w_2$ να είναι θετικά και άρα να ελαχιστοποίησουμε την διακύμανση ορισμένη στο διάστημα αυτό. Αν $m_1 - m_2 > 0$ τότε η απαίτηση $w_1 \geq 0$ σημαίνει ότι $t(m_2 - m_3) + m_0 - m_2 \geq 0$ και η απαίτηση $w_2 \geq 0$ σημαίνει ότι $t(m_3 - m_1) + m_1 - m_0 \geq 0$. Διαλέγουμε το διάστημα στο οποίο θα κινείται το $t$ έτσι ώστε να είναι υποσύνολο του $[0, 1]$ και ταυτόχρονα να ικανοποιούνται και οι δυο απαιτήσεις. Αν αυτό δεν γίνεται τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης δεν έχει λύση. Παρόμοια και στην περίπτωση που $m_1 - m_2 < 0$.

# Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου μέγιστης απόδοσης με δυο μετοχές I

Μια άλλη οπτική βελτιστοποίησης είναι να βρεθεί το διάνυσμα $w = (w_1, w_2)$ έτσι ώστε η διακύμανση του χαρτοφυλακίου να είναι ίση με ένα δοσμένο αριθμό $\sigma_0$ και να μεγιστοποιηθεί η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου. Δηλαδή το μαθηματικό πρόβλημα είναι ως εξής:

$$\begin{aligned}
\max_{(w_1,w_2)} (w_1 m_1 + w_2 m_2) \\
\text{δεδομένου} \\
\sigma = \sigma_1 w_1^2 + \sigma_2 w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2 = \sigma_0 \\
w_1 + w_2 = 1 \\
w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0
\end{aligned}$$

# Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου μέγιστης απόδοσης με δυο μετοχές II

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα μπορούμε να θέσουμε $w_2 = t$ και άρα $w_1 = 1 - t$ οπότε αντικαθιστούμε στην ισότητα της διακύμανσης. Τελικά θα έχουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max_{t \in [0,1]} (m_1(1-t) + m_2 t)$$

$$\sigma_1(1-t)^2 + \sigma_2 t^2 + 2\sigma_{12}(1-t)t - \sigma_0 = 0$$

Η δεύτερη ισότητα θα έχει πιθανόν δυο λύσεις, έστω $t_1, t_2$. Θα διαλέξουμε εκείνη η οποία ανήκει στο διάστημα $[0, 1]$ (αν υπάρχει) και ταυτόχρονα μεγιστοποιεί την ζητούμενη ποσότητα.

# Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου μέγιστης διαφοράς απόδοσης και διακύμανσης I

Μια ακόμη οπτική είναι να μεγιστοποιήσουμε την διαφορά της μέσης τιμής και της διακύμανσης. Δηλαδή

$$\max_{(w_1,w_2)} \left(m_1 w_1 + m_2 w_2 - \lambda(\sigma_1 w_1^2 + \sigma_2 w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2)\right)$$

$$\text{δεδομένου } w_1 + w_2 = 1$$

$$w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0$$

για κάποιο δοσμένο $\lambda > 0$.

# Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου μέγιστης διαφοράς απόδοσης και διακύμανσης II

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό μπορούμε να θέσουμε $w_2 = t$ και άρα $w_1 = 1 - t$. Οπότε το αρχικό μας πρόβλημα ανάγεται στο

$$\max_{t \in [0,1]} (m_1(1-t) + m_2 t - \lambda(\sigma_1(1-t)^2 + \sigma_2 t^2 + 2\sigma_{12}(1-t)t))$$

Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου έχουμε υπολογίσει την μέση τιμή και την διακύμανση της απόδοσης. Τα στοιχεία αυτά αναφέρονται σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, π.χ. ανά ημέρα, ανά μήνα κ.τ.λ.
Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε την κατάλληλη μαθηματική θεωρία για να είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τις παρακάτω δυο προτάσεις.

$(i)$ Με πιθανότητα $1-a$ το χαρτοφυλάκιο δεν θα έχει μεγαλύτερη ζημιά από το ποσό $x$.

$(ii)$ Η πιθανότητα η ζημιά να ξεπεράσει το ποσό $x$ είναι ίση με $a$.

όπου $a \in (0,1)$ συνήθως κοντά στο μηδέν.

# Κίνδυνος Χρεοκοπίας ΙΙ

Αν συμβολίσουμε με $V_0$ την σημερινή αξία του χαρτοφυλακίου και με $V_t$ την αξία την επόμενη περίοδο τότε το παραπάνω ερώτημα μετατρέπεται σε μαθηματικό πρόβλημα ως εξής: ποιο είναι το $x > 0$ (ποσό σε Ευρώ) έτσι ώστε

$$P(V_t - V_0 \leq -x) = 1 - a$$

Χρησιμοποιώντας την απόδοση του χαρτοφυλακίου, η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = 1 - a$$

όπου $\mu_t = \frac{V_t - V_0}{V_0}$ είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου ανά περίοδο.

Γνωρίζουμε την μέση τιμή $m_0$ και την διακύμανση $\sigma^2$ της απόδοσης και υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $m_0$ και διακύμανση $\sigma^2$. Με την υπόθεση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε το κατάλληλο $x > 0$ το οποίο συνήθως συμβολίζεται με $\mathrm{VaR}_a(t)$ όπου $t$ είναι η χρονική περίοδος που μας ενδιαφέρει, π.χ. ανά ημέρα.

# Κίνδυνος Χρεοκοπίας IV

Εφόσον η απόδοση ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $m_0$ και διακύμανση $\sigma^2$ τότε

$$P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{V_0}} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma^2}} dt \tag{7}$$

# Κίνδυνος Χρεοκοπίας V

Μπορούμε να συσχετίσουμε τα παραπάνω με την συνάρτηση σφάλματος $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ μέσω της σχέσης

$$P(Y \leq x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - m_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

όπου η $Y$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $m_0$ και διακύμανση $\sigma^2$.

# Κίνδυνος Χρεοκοπίας VI

Θα αποδείξουμε την σχέση αυτή με τον εξής τρόπο

$$\begin{aligned}
P(Y \leq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-y^2} dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Ξαναγυρνώντας στην 7 έχουμε

$$g(x) = P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{-\frac{x}{V_0} - m_0}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της ζημιάς δεδομένου ότι η ζημιά θα ξεπεράσει ένα δεδομένο ποσό $p < 0$. Θα ισχύει

$$\mathbb{E}(V_t - V_0 | \{V_t - V_0 < p\}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi V^2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{p} x e^{-\frac{(x-m_0 V)^2}{2V^2\sigma^2}} dx}{\frac{1}{\sqrt{2\pi V^2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{p} e^{-\frac{(x-m_0 V)^2}{2V^2\sigma^2}} dx}$$

# Κίνδυνος Χρεοκοπίας VIII

Τα παραπάνω αποτελέσματα εξαρτώνται από την υπόθεση που έχει κάνει ο επενδυτής και άρα η απάντηση θα πρέπει να περιέχει και τον τρόπο με τον οποίο επιλέχθηκαν οι παράμετροι της κατανομής, για παράδειγμα μέσω ιστορικών δεδομένων (και πόσα έτη ακριβώς χρησιμοποιήθηκαν), μέσω πρόβλεψης και πως ακριβώς έχει αυτή γίνει κ.τ.λ.
Υπό αυτή την έννοια θα ήταν αρκετά πιο χρήσιμα κάποια συμπεράσματα τα οποία να είναι ανεξάρτητα της οποιαδήποτε υπόθεσης για τις εμπλεκόμενες τυχαίες μεταβλητές.

# Κίνδυνος Χρεοκοπίας IX

**Παρατηρηση** *(Επιβεβλημένη η χρήση των call και put options)*

*Παρακάτω θα δούμε πως με την χρήση call και put options μπορούμε να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκια τα οποία έχουν περιορισμένη πιθανή ζημιά και ως εκ τούτου να είναι βέβαιο (ανεξάρτητα από την οποιαδήποτε κατανομή ακολουθούν οι τυχαίες μεταβλητές) ότι η ζημιά δεν θα ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο ποσό.*

Με λίγα λόγια, διαφορετικοί επενδυτές θα δώσουν διαφορετικές πιθανότητες για το ίδιο χαρτοφυλάκιο διότι κάποιοι θα χρησιμοποιούν ιστορικά δεδομένα 1 έτους, κάποιοι άλλοι 2 ετών κ.τ.λ. ενώ θα υπάρχουν και αυτοί οι οποίοι με βάση πρόσφατα γεγονότα θα κάνουν μια πρόβλεψη αξιολογώντας τα γεγονότα αυτά σύμφωνα με την δική του εμπειρία και διαίσθηση. Εν γένει, οι πιθανότητες αυτές θα κυμαίνονται σε όλο το $(0, 1)$!
Αν λοιπόν ο επενδυτής έχει κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο έχει περιορισμένη πιθανή ζημιά σε οποιοδήποτε σενάριο (π.χ. μέχρι 200 Ευρώ) τότε έχει νόημα να υπολογίσουμε την πιθανότητα να έχει ζημιά μεγαλύτερη των 50 Ευρώ για παράδειγμα. Ο υπολογισμός όμως αυτός δεν έχει σίγουρα την ίδια βαρύτητα όσο η μέγιστη πιθανή ζημιά σε όλα τα πιθανά σενάρια. Σε χαρτοφυλάκια με πολλά υποκείμενα αγαθά και αντίστοιχα call και put options ο υπολογισμός αυτών των ποσοτήτων μπορεί να γίνει μέσω προσομοιώσεων αν δεν είναι δυνατό μέσω αναλυτικών μεθόδων.

# Πούλησε ακριβά - αγόρασε φθηνά I

Έστω ότι κάποιος έχει αγοράσει ένα συγκεκριμένο πλήθος μετοχών $a$ και τοποθετήσει/δανεισθεί το ποσό $b$ σε τραπεζικό λογαριασμό. Τότε το χαρτοφυλάκιο του τη χρονική στιγμή $0$ αξίζει

$$V_0 = aS_0 + b$$

Μια πασίγνωστη τεχνική διαχείρισης του χαρτοφυλακίου αυτού ακολουθεί την αρχή «πούλα ακριβά - αγόρασε φθηνά». Δηλαδή όταν η αξία της μετοχής ανέβει πάνω από $S_0$ τότε ο επενδυτής μπορεί να πουλήσει μέρος των μετοχών, ενώ όταν η αξία κατέβει κάτω από την $S_0$ μπορεί να αγοράσει μερικές. Πως μπορούμε να το μεταφράσουμε αυτό σε ένα μαθηματικό πρόβλημα;

# Πούλησε ακριβά - αγόρασε φθηνά II

Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής έχει αποφασίσει να αναδιαρθρώνει το χαρτοφυλάκιο του κατά τις χρονικές στιγμές $0 < t_1 \cdots < t_N = T$. Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία $a_k$ η οποία θα παριστά το πλήθος των μετοχών κατά τη χρονική στιγμή $t_k$ με $a_0 = a$. Αν $a > 0$, τότε

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1}\delta\left(\frac{S_{t_k}}{S_0}\right)$$

Η συγκεκριμένη στρατηγική υποθέτει μόνο πώληση σε περίπτωση ανόδου της τιμής της.

# Πούλησε ακριβά - αγόρασε φθηνά III

Μπορούμε να διαλέξουμε για παράδειγμα την συνάρτηση $\delta(x)$ ως εξής

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1+z}, & \text{όταν } x > 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για κάποια επιλογή της παραμέτρου $z$. Υπάρχουν βεβαίως άπειρες επιλογές της συνάρτησης $\delta$ και αυτή θα είναι μια επιλογή του επενδυτή.

Περισσότερα μπορεί να δει κανείς στην εργασία A novel portfolio optimization method and its application to the hedging problem.

# Πούλησε ακριβά - αγόρασε φθηνά IV

Ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει/δανεισθεί/πουλήσει call και put συμβόλαια με σκοπό το τελικό χαρτοφυλάκιο να έχει καλύτερη απόδοση και φραγμένη πιθανή ζημιά. Μπορεί να κάνει μια μαντεψιά για την κίνηση της μετοχής, για παράδειγμα να υποθέσει ότι ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown ή ακόμη και να μαντέψει ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}_+$ στο οποίο υποθέτει ότι θα βρεθεί η $S_T$. Στη συνέχεια, να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να έχει την καλύτερη δυνατή απόδοση με βάση όμως αυτές τις μαντεψιές.
Ακόμη σημαντικότερο πρόβλημα για τους επενδυτές είναι βέβαια το πρόβλημα της μαντεψιάς! Πως δηλαδή κάποιος μπορεί να κάνει μαντεψιές οι οποίες συχνά να αποδεικνύονται σωστές. Σε αυτό μπορεί να δει κανείς το κεφάλαιο 7 του βιβλίου Algorithmic trading and quantitative strategies.

# Options και βέλτιστη κατασκευή χαρτοφυλακίου

Αν κάποιος επενδυτής προβλέπει την άνοδο της αξίας μιας μετοχής θα κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο αγοράζοντας μερικές μετοχές. Το αντίστοιχο call option όμως είναι πολύ φθηνότερο και επομένως είναι και αυτό μια επιλογή. Επομένως γεννάται το ερώτημα: να αγοράσει μετοχές ή call options;
Θα ήταν καλό να αγοράσει και μερικά put options έτσι ώστε να εξασφαλιστεί κάπως έναντι μιας απότομης καθόδου της μετοχής.
Τελικά, η κατασκευή ενός βέλτιστου χαρτοφυλακίου θα πρέπει να περιέχει και τα αντίστοιχα call και put options και επομένως η βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου είναι στενά συνδεδεμένη με αυτά.

# Υπάρχει κάποιος ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός τέτοιου συμβολαίου;

Η θεωρία των Black-Scholes έχει ως βασικό σκοπό να ορίσει μια δίκαιη τιμή πώλησης ενός συμβολαίου. Τον ίδιο σκοπό έχει και το διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης, οπότε στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις δυο αυτές θεωρίες και θα δούμε ότι

οποιοσδήποτε ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης στηρίζεται σε μια υπόθεση για την μελλοντική κίνηση της αξίας της μετοχής δεν έχει πρακτική αξία.

# Μοντέλο αποτίμησης των Black - Scholes

Το μοντέλο αυτό προτείνει την κατασκευή ενός αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου. Αν για παράδειγμα το συμβόλαιο είναι γραμμένο σε ένα υποκείμενο αγαθό η κατασκευή αυτή είναι ένα χαρτοφυλάκιο όπου θα περιέχει $a$ το πλήθος μετοχές στον χρόνο μηδέν και το ποσό $b$ σε τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο $r$. Η σημερινή αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι $V_0 = aS_0 + b$. Στόχος της κατασκευής είναι στο χρόνο $T$ η αξία $V_T$ να είναι ίση με την απολαβή, δηλαδή $V_T = P_T$ επομένως ο πωλητής εξαργυρώνοντας το χαρτοφυλάκιο να αποπληρώσει τον αγοραστή.

**Ερωτημα**

*Υπάρχει τέτοιο χαρτοφυλάκιο;*

Υπάρχει! (αλλά...)

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε σε μια αγορά, στην οποία διαπραγματευόμαστε μια μόνο μετοχή.
Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με φίλτρο $\mathcal{F}_t$ το οποίο παράγεται από την κίνηση Brown.
Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής κατασκευάζει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από κατάθεση σε λογαριασμό τραπέζης με εξασφαλισμένη απόδοση με ετήσιο επιτόκιο $r$ συνεχούς ανατοκισμού.
Αν υποθέσουμε ότι $B_t$ είναι το ποσό τη χρονική στιγμή $t$ με $B_0 = 1$ τότε θα έχουμε $B_t = e^{rt}$ όπου $t$ σε πολλαπλάσια του έτους (όχι κατά ανάγκη ακέραια).

Υποθέτουμε επίσης ότι η κίνηση της υποκείμενης μετοχής ακολουθεί την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$S_t = S_0 + \int_0^t mS_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s$$

όπου $\sigma \neq 0$ είναι η λεγόμενη μεταβλητότητα της μετοχής. Η λύση της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (m - \sigma^2/2)t}$$

**Ορισμος**

*Μια στρατηγική επένδυσης είναι μια στοχαστική διαδικασία* $\phi = (a_t, b_t)$, *προσαρμοσμένη στο* $\mathcal{F}_t$ *και τέτοιες ώστε*

$$\int_0^T |a_t| dt + \int_0^T b_t^2 dt < \infty.$$

*Η αξία του χαρτοφυλακίου* $\phi = (a, b)$ *δίνεται από την στοχαστική διαδικασία,*

$$V_t(\phi) = a_t S_t + b_t B_t$$

Δηλαδή, $a_t$ είναι το πλήθος των μετοχών που υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο και $b_t$ η παρούσα αξία (δηλαδή στον χρόνο 0) του ποσού που έχει εξασφαλισμένη απόδοση.

### Ορισμος

*Μια στρατηγική επένδυσης* $\phi = (a_t, b_t)$ ***ονομάζεται αυτοχρηματοδοτο-ύμενη αν***

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s dB_s,$$

***όπου*** $dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t$ ***και*** $dB_t = re^{rt}dt$.

Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι αλλαγές στην τιμή του χαρτοφυλακίου συμβαίνουν μόνο μετά από αλλαγές της τιμής της μετοχής και του ομολόγου, δηλαδή δεν προστίθενται χρήματα ούτε εξαργυρώνονται από το χαρτοφυλάκιο.

Συμβολίζουμε με $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ και $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$ τις κανονικοποιημένες στοχαστικές διαδικασίες. Δηλαδή, οι κανονικοποιημένες στοχαστικές διαδικασίες είναι μετρημένες σε πολλαπλάσια του $B_t$, έχουν ως μονάδα μέτρησης το $B_t$. Κάθε μετοχή ή άλλο περιουσιακό στοιχείο που όμως έχει πάντοτε θετικές τιμές σε όλους τους χρόνους μπορεί να παίξει το ρόλο της μονάδας μέτρησης (numeraire). Η $B_t^{-1}$ ικανοποιεί

$$B_t^{-1} = 1 - r \int_0^t B_s^{-1} ds$$

**Λημμα**

*Για την κανονικοποιημένη $\tilde{S}_t$ έχουμε την εξής σχέση*

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + (m - r) \int_0^t \tilde{S}_s ds + \sigma \int_0^t \tilde{S}_s dW_s.$$

**Απόδειξη**

*Θα χρησιμοποιήσουμε τη στοχαστική ολοκλήρωση κατά μέρη για το γινόμενο* $S_t e^{-rt}$. *Έχουμε λοιπόν*

$$\tilde{S}_t = S_0 + \int_0^t (-r) S_s B_s^{-1} ds + \int_0^t S_s \cdot 0 dW_s$$
$$+ \int_0^t m B_s^{-1} S_s ds + \int_0^t \sigma B_s^{-1} S_s dW_s + \int_0^t \sigma S_s \cdot 0 ds.$$

Έχουμε την παρακάτω πρόταση που περιγράφει (και ορίζει διαφορετικά) την έννοια της αυτοχρηματοδότησης.

**Θεωρημα**

*Μια στρατηγική* $\phi = (a, b)$ *είναι αυτοχρηματοδοτούμενη ανν*

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + (m - r)\int_0^t a_s \tilde{S}_s ds + \sigma \int_0^t a_s \tilde{S}_s dW_s.$$

**Αποδειξη**

*Έστω ότι είναι αυτοχρηματοδοτούμενη. Τότε*

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t (ma_sS_s + rb_se^{rs})ds + \int_0^t \sigma a_sS_sdW_s,$$

*δες Ορισμό 8. Χρησιμοποιούμε τη στοχαστική ολοκλήρωση κατά μέρη στο γινόμενο $V_te^{-rt}$ και έχουμε*

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t = V_0 \quad &+ \quad \int_0^t V_s(-r)B_s^{-1}ds + \int_0^t V_s \cdot 0dW_s \\ &+ \quad \int_0^t B_s^{-1}(ma_sS_s + rb_se^{rs})ds \\ &+ \quad \int_0^t B_s^{-1}\sigma a_sS_sdW_s + \int_0^t \sigma a_sS_s \cdot 0ds.\end{aligned}$$

*Αντικαθιστώντας το $V_s$ από τον ορισμό φτάνουμε στο αποτέλεσμα. Για το αντίστροφο, θα υποθέσουμε ότι το $\tilde{V}_t$ έχει την παραπάνω μορφή και θα υπολογίσουμε τη μορφή της $V_t = e^{rt}\tilde{V}_t$ χρησιμοποιώντας πάλι την ολοκλήρωση κατά μέρη στο γινόμενο $e^{rt}\tilde{V}_t$.*

### Ορισμος

*Μια στρατηγική* $(a_t, b_t)$ *λέγεται Μαρκοβιανή αν*

$$a_t = a(t, S_t), \quad b_t = b(t, S_t)$$

*όπου* $a, b$ *είναι συναρτήσεις δυο μεταβλητών συνεχώς παραγωγίσιμες στην πρώτη και δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στη δεύτερη μεταβλητή.*

Αρα λοιπόν, η τιμή του χαρτοφυλακίου σε αυτήν τη περίπτωση γράφεται

$$V_t = a(t, S_t)S_t + b(t, S_t)e^{rt}.$$

Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $u(t,x)$ μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στο $t$ και δυο στο $x$ τ.ω. $u(t,S_t)=V_t$. Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι αυτή η συνάρτηση θα είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Black-Scholes.

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

*Έστω $(a,b)$ μια αυτοχρηματοδοτούμενη Μαρκοβιανή στρατηγική. Τότε, αν υπάρχει $u(t,x)\in C^{1,2}(D)$ (όπου $D=(0,T)\times(0,+\infty)$) τ.ω. $u(t,S_t)=V_t$, η $u(t,x)$ είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης*

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2}u_{xx}(t,x)+rxu_x(t,x)+u_t(t,x)=ru(t,x)$$

*με $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}_+$. Επιπλέον, $a(t,x)=u_x(t,x)$. Η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση ονομάζεται* **Black-Scholes.**

## Απόδειξη.

Εφόσον η $(a, b)$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική έχουμε ότι

$$V_t = V_0 + \int_0^t (ma(s, S_s)S_s + rb(s, S_s)B_s)ds + \int_0^t \sigma a(s, S_s)S_s dW_s.$$

Εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Ito στην $u(t, S_t)$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(t, S_t) = & \quad u(0, S_0) \\ & + \int_0^t (u_t(s, S_s) + mS_s u_x(s, S_s) + \frac{\sigma^2 S_s^2}{2} u_{xx}(s, S_s))ds \\ & + \int_0^t \sigma S_s u_x(s, S_s)dW_s. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν γράψει την $V_t$ ως διαδικασία Ito με δυο διαφορετικούς τρόπους, επομένως χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα της ανάλυσης κατά Doob-Meyer στη διαφορά τους (η οποία είναι μηδέν), προκύπτει ότι και τα δυο ολοκληρώματα είναι μηδέν. Επομένως παίρνουμε την

**Απόδειξη.**

ισότητα

$$a(t, S_t) = u_x(t, S_t) \text{ και άρα } b(t, S_t)B_t = u(t, S_t) - S_t u_x(t, S_t)$$

Για να μηδενιστεί και το ολοκλήρωμα ως προς $ds$ θα πρέπει αναγκαστικά η $u(t, x)$ να ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t, x) + r x u_x(t, x) + u_t(t, x) = r u(t, x)$$

έχοντας αντικαταστήσει κατάλληλα το $b(t, S_t)B_t$, διότι θέλουμε να μηδενίζεται το ολοκλήρωμα για οποιαδήποτε πιθανή τροχιά της $S_t$. Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμη και η υπόθεση ότι $u \in C^{1,2}(D)$. □

Επομένως, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το δικαίωμα πώλησης θα πρέπει να επιλύσουμε την παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση με επιπλέον συνθήκη $u(s, T) = (K - s)^+$.

# Ακαριαία αναδιάρθρωση!

**Παρατηρηση**

*Στην πράξη όμως αν προσπαθήσει να το κατασκευάσει θα συναντήσει τουλάχιστον ένα πρόβλημα. Αν την χρονική στιγμή $t$ η αξία της μετοχής είναι $S(t)$ και την $t+h$ θα είναι $S(t+h)$ τότε την στιγμή της αλλαγής της τιμής θα πρέπει (ακαριαία!) να αλλάξουν και οι τιμές των $a(t, S(t))$ και $b(t, S(t))$.*

Ακόμη και αν βρεθεί τρόπος να ξεπεραστούν αυτού του είδους τα προβλήματα θα έχουμε ακόμη δυο μειονεκτήματα.

• Στο μοντέλο έχουμε υπολογίσει την παράμετρο $\sigma$ (μεταβλητότητα της μετοχής) μέσω ιστορικών δεδομένων. Η παράμετρος αυτή όμως δεν είναι βέβαιο ότι θα παραμείνει σταθερή και στο μέλλον με συνέπεια η αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου να διαφέρει τελικά από την απολαβή.

• Υπάρχει περίπτωση (στα put option για παράδειγμα) να πρέπει να δανεισθεί κανείς μετοχές προκειμένου να κατασκευασθεί το χαρτοφυλάκιο αυτό. Αυτό όμως σημαίνει ότι, ακριβώς λόγω αυτού του δανεισμού, ο πωλητής θα βρεθεί σε κίνδυνο χρεοκοπίας ενώ αρχικά ίσως δεν είχε τέτοιο κίνδυνο!

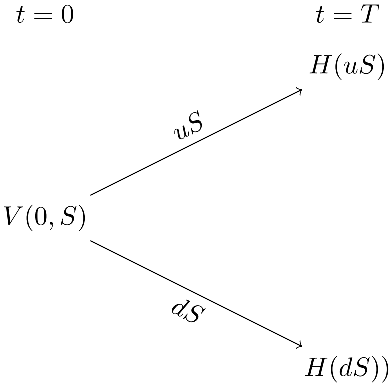
# Αν ήταν εφικτή η κατασκευή αυτού του χαρτοφυλακίου...

Αν ήταν εφικτή η κατασκευή αυτού του χαρτοφυλακίου τότε ο πωλητής θα μπορούσε να το έχει υπόψη του ως πιθανή στρατηγική αντιστάθμισης αλλά σίγουρα όχι ως τρόπο ορισμού δίκαιης τιμής μιας και η μελλοντική μεταβλητότητα $\sigma$ είναι άγνωστη. Οποιοδήποτε μοντέλο και να εφαρμοσθεί το οποίο να κάνει μια υπόθεση για την μελλοντική κίνηση της μετοχής δεν θα είναι καθολικά αποδεκτό διότι οι παράμετροι θα είναι υπό διαπραγμάτευση. Θα βρεθεί δηλαδή ένας πωλητής ο οποίος θα πουλήσει φθηνότερα διότι έχει διαφορετική πρόβλεψη για το μέλλον.

Θα δούμε παρακάτω ότι το διωνυμικό μοντέλο δεν είναι επίσης ικανό να ορίσει μια δίκαιη τιμή όμως το χαρτοφυλάκιο που προτείνει είναι πραγματοποιήσιμο και μάλιστα (σχετικά) αποδοτικό όταν εφαρμόζεται για μια περίοδο. Στο μοντέλο αυτό υποθέτει κάποιος ότι η τιμή της μετοχής θα μεταβληθεί σύμφωνα με δυο συγκεκριμένους ρυθμούς $d, u$. Αυτό όμως δεν πρόκειται σχεδόν ποτέ να συμβεί στο μέλλον!

# Διωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης

Το διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης είναι παρόμοιο (στην κεντρική του ιδέα) με το μοντέλο των Black - Scholes. Στηρίζεται και αυτό στην κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου αλλά όμως σε διακριτό χρόνο οπότε δεν υπάρχουν έτσι τα πρακτικά προβλήματα που έχει το μοντέλο των Black - Scholes.


$t = 0$
$t = T$
$H(uS)$
$uS$
$V(0, S)$
$dS$
$H(dS))$

Στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτουμε ότι η μετοχή είτε θα ανέβει με ρυθμό $u$ και πιθανότητα $p$ είτε θα κατέβει με ρυθμό $d$ και πιθανότητα $1-p$. Η αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $0$ είναι $V_0 = aS + b$ όπου $a$ είναι το πλήθος των μετοχών και $b$ το ποσό σε χωρίς ρίσκο επένδυση. Αν την χρονική στιγμή οι απολαβές πρέπει να είναι $H(dS)$ και $H(uS)$ τότε

$$a = \frac{H(uS) - H(dS)}{(u-d)S} \quad \text{και} \quad b = \frac{H(dS)u - H(uS)d}{u-d}$$

θεωρώντας για ευκολία μηδενικό επιτόκιο στη χωρίς ρίσκο επένδυση.

Μπορεί να γενικευθεί και για $n$ περιόδους.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
t = k\delta & t = k\delta + \delta \\
 & V(t+\delta, uS) \\
V(t,S) \arrow[ur, "uS"] \arrow[dr, "dS"'] & \\
 & V(t+\delta, dS)
\end{tikzcd}$$

Αν οι αξίες του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $t = k\delta + \delta$ πρέπει να ίσες με $V(t+\delta, uS)$ και $V(t+\delta, dS)$ τότε η ελάχιστη τιμή του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $t = k\delta$ είναι ίση με $V(t,S) = e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\Big)$ όπου $q = \frac{e^{r\delta}-d}{u-d}$ όταν $d \leq e^{r\delta} \leq u$. Σημειώστε ότι $V(t,S) = aS + b$ όπου $a$ είναι το πλήθος των μετοχών την χρονική στιγμή $t$ και $b$ το ποσό την χρονική στιγμή $t$ σε επένδυση χωρίς ρίσκο με επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού $r$. Στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει με πιθανότητα $p$ και θα κατέβει με πιθανότητα $1-p$.

Ξεκινώντας αναδρομικά και προς τα πίσω μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου καθώς βέβαια και την στρατηγική επένδυσης $(a, b)$. Η κατασκευή αυτή είναι πρακτικά εφικτή αλλά έχει ένα σημαντικό μειονέκτημα.

# Είναι πρακτικό το διωνυμικό μοντέλο;

**Παρατηρηση**

*Στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτει κάποιος ότι η επόμενη τιμή της μετοχής θα είναι είτε $uS$ είτε $dS$ αν σήμερα είναι ίση με $S$. Η μαντεψιά αυτή όμως δεν πρόκειται ποτέ να επαληθευτεί επομένως η τελική αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου δεν θα είναι ίση με την απολαβή σχεδόν σίγουρα!*

Επομένως γεννάται το εξής ερώτημα:

**ΕΡΩΤΗΜΑ**

*Αν ανέβει η μετοχή αλλά με ρυθμό $u^* \neq u$ τι ακριβώς σημαίνει για την αξία του χαρτοφυλακίου και της απολαβής; Παρόμοια, αν κατέβει αλλά με ρυθμό $d^* \neq d$.*

# Investors think rationally but not the mathematicians?

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

*Φαίνεται ότι οι δυο βασικές θεωρίες αποτίμησης δεν απαντούν στα ερωτήματα του πωλητή και του αγοραστή. Ακόμη χειρότερα, δεν φαίνεται να είναι χρήσιμες ούτε και για τον σκοπό για τον οποίο κατασκευάσθηκαν!*
*Σε πολλές, αν όχι όλες τις παρόμοιες εργασίες, οι συγγραφείς (μαθηματικοί) υποθέτουν ότι οι επενδυτές σκέφτονται λογικά αλλά δεν φαίνεται οι ίδιοι να το κάνουν!*

# Ιδιότητα Κέρδους I

**Λημμα**

*Έστω ότι ο πωλητής έχει χρησιμοποιήσει το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου για να τιμολογήσει ένα call ή ένα put συμβόλαιο με ρυθμούς $d, u$. Τότε θα επιλέξει τους ρυθμούς έτσι ώστε το $uS_0 > K$ και $dS_0 < K$.*

**Απόδειξη.**

Πράγματι, αν $dS_0 > K$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $a = 1$ και $be^{rT} = -K$. Επομένως, το κέρδος $\Pi$ είναι ως εξής

$$\begin{aligned} \Pi &= aS_T + be^{rT} - (S_T - K)^+ \\ &= S_T - K - (S_T - K)^+ \end{aligned}$$

Αν $S_T > K$ τότε $\Pi = 0$ ενώ αν $S_T \leq K$ τότε $\Pi \leq 0$, δηλαδή ο πωλητής δεν έχει καμία πιθανότητα κέρδους.
Παρόμοια, για το put συμβόλαιο θα επιλέξει $u$ τέτοιο ώστε $uS_0 > K$ (και φυσικά $dS_0 < K$). Πράγματι, αν $uS_0 < K$ τότε $a = -1$ και $be^{rT} = K$ επομένως το κέρδος είναι ως εξής

$$\begin{aligned} \Pi &= aS_T + be^{rT} - (K - S_T)^+ \\ &= K - S_T - (K - S_T)^+ \end{aligned}$$

Αν $S_T < K$ τότε $\Pi = 0$ ενώ αν $S_T \geq K$ και $\Pi \leq 0$, δηλαδή ο πωλητής δεν έχει πάλι καμία πιθανότητα κέρδους. $\square$

# Ιδιότητα Κέρδους III

**ΘΕΩΡΗΜΑ** *(Ιδιότητα Κέρδους για τα συμβόλαια Call και Put)*

*Έστω ότι ο πωλητής έχει χρησιμοποιήσει το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου για να τιμολογήσει ένα call ή ένα put συμβόλαιο με τιμή εξάσκησης $K$ με ρυθμούς $d, u$. Τότε θα έχει κέρδος αν $\frac{S_T}{S_0} \in (d, u)$ ενώ θα έχει ζημιά αν $\frac{S_T}{S_0} \notin (d, u)$.*

# Ιδιότητα Κέρδους IV

**Απόδειξη.**

Ξεκινάμε με το συμβόλαιο call όπου $a \in (0,1)$ σε αυτή την περίπτωση. Υποθέτουμε ότι $uS_0 > K$ και $dS_0 < K$. Τότε το κέρδος είναι ως εξής

$$\begin{aligned} \Pi &= aS_T + be^{rT} - (S_T - K)^+ \\ &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - u\right) S_0 + auS_0 + be^{rT} - (S_T - K)^+ \end{aligned}$$

Αν $S_T > K$ τότε έχουμε ότι $\frac{S_T}{S_0} > d$ και ότι

$$\begin{aligned} \Pi &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - u\right) S_0 + auS_0 + be^{rT} - (uS_0 - K) - \left(\frac{S_T}{S_0} - u\right) S_0 \\ &= \left(\frac{S_T}{S_0} - u\right) S_0(a-1) \end{aligned}$$

αφού $auS_0 + be^{rT} - (uS_0 - K) = 0$. Επομένως στην περίπτωση $\frac{S_T}{S_0} \in (d,u)$ ισχύει ότι $\Pi > 0$ ενώ αν $\frac{S_T}{S_0} > u$ ισχύει ότι $\Pi < 0$.

# Ιδιότητα Κέρδους V

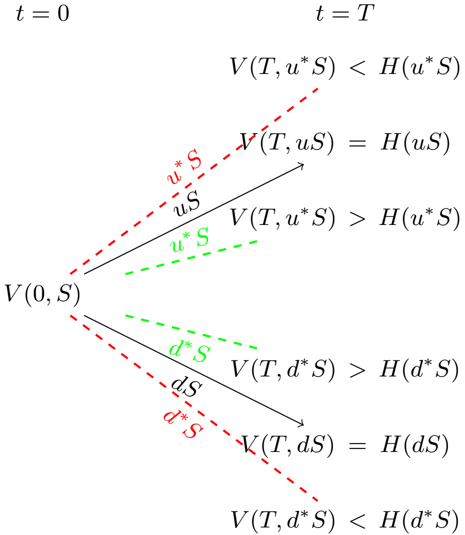
**Απόδειξη.**

Αν $S_T < K$ τότε έχουμε ότι $\frac{S_T}{S_0} < u$ και ότι

$$\begin{aligned} \Pi &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - d\right) S_0 + adS_0 + be^{rT} \\ &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - d\right) S_0 \end{aligned}$$

αφού $adS_0 + be^{rT} = 0$. Πάλι, αν $\frac{S_T}{S_0} \in (d, u)$ ισχύει ότι $\Pi > 0$ ενώ αν $\frac{S_T}{S_0} < d$ ισχύει ότι $\Pi < 0$.
Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για το put συμβόλαιο αφού $a \in (-1, 0)$ σε αυτή την περίπτωση. $\square$

Αν ανέβει με ρυθμό $u^*$ τέτοιο ώστε $u^* \in (d, u)$ ή αν κατέβει με ρυθμό $d^* \in (d, u)$ τότε η τελική αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι μεγαλύτερη από την απολαβή για ένα call ή put συμβόλαιο ενώ διαφορετικά θα είναι μικρότερη.



# Χωρίς την ιδιότητα κέρδους...

Χωρίς την ιδιότητα κέρδους η οποιαδήποτε επιλογή των $u, d$ δεν έχει κανένα νόημα για τον πωλητή! Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι το παρακάτω.

**Ερωτημα**

*Σε ποια άλλα συμβόλαια το διωνυμικό μοντέλο παράγει χαρτοφυλάκια με την ιδιότητα κέρδους;*

# Πιθανότητα κέρδους

Στα συμβόλαια αγοράς και πώλησης ο πωλητής γνωρίζει σε ποιες περιπτώσεις θα έχει κέρδος. Ποια όμως είναι η πιθανότητα κέρδους; Για να απαντήσει σε αυτό το ερώτημα θα πρέπει να υποθέσει κάτι άλλο πιο ρεαλιστικό για την κίνηση της μετοχής. Μια ρεαλιστική υπόθεση είναι ότι η αξία της μετοχής ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown για κάποιες παραμέτρους $m, \sigma$.

### Υπόθεση

*Υποθέτουμε ότι υπάρχουν παράμετροι $m, \sigma$ έτσι ώστε η αξία της μετοχής να είναι η λύση της παρακάτω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$S_t = S_0 + m\int_0^t S_r dr + \sigma \int_0^t S_r dW_r, \quad t \in [0, T]$$

*όπου $S_0$ η σημερινή αξία της μετοχής.*

Τότε μπορεί εύκολα να υπολογίσει την πιθανότητα

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_T}{S_0} \in (d,u)\right)$$

δεδομένων το $d, u$ ή αλλιώς δεδομένης της πιθανότητας κέρδους $p$ να βρεθούν τα κατάλληλα $d, u$. Το παραπάνω μοντέλο το καλούμε ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο λόγω του ότι η υπόθεση που αφορά την κίνηση της μετοχής είναι ρεαλιστική!

# Επιλογή των $d, u$

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

*Αν τα $u, d$ επιλεγούν όπως παρακάτω*

$$u = e^{\sigma z_p \sqrt{T} + (m - \sigma^2/2)T}, \quad d = e^{-\sigma z_p \sqrt{T} + (m - \sigma^2/2)T}$$

*τότε η πιθανότητα κέρδους εφαρμόζοντας το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου είναι ίση με $p$. Εδώ $z_p$ είναι τέτοια ώστε $\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-z_p\sqrt{T}}^{z_p\sqrt{T}} e^{\frac{-t^2}{2T}} dt = p$ με $p \in (0, 1)$ επιλεγμένο από τον πωλητή.*

### Απόδειξη.

Πράγματι, έχουμε αφού $\frac{S_T}{S_0} = e^{\sigma W_T + (m-\sigma^2/2)T}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(d \le \frac{S_T}{S_0} \le u\right) &= \mathbb{P}(-z_p\sqrt{T} \le W_T \le z_p\sqrt{T}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-z_p\sqrt{T}}^{z_p\sqrt{T}} e^{\frac{-t^2}{2T}}\, dt \\
&= p
\end{aligned}$$

□

## Λημμα

*Έστω* $z_{\frac{p+1}{2}}$ *και* $z_p$ *τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_p} e^{\frac{-t^2}{2}}dt &= p\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_{\frac{p+1}{2}}} e^{\frac{-t^2}{2}}dt &= \frac{p+1}{2}\end{aligned}$$

*Ισχύει ότι*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z_{\frac{p+1}{2}}}^{z_{\frac{p+1}{2}}} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_p} e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$

*για οποιοδήποτε* $p \in (0,1)$.

### Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z_{\frac{p+1}{2}}}^{z_{\frac{p+1}{2}}} e^{\frac{-t^2}{2}}dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_{\frac{p+1}{2}}} e^{\frac{-t^2}{2}}dt \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-z_{\frac{p+1}{2}}} e^{\frac{-t^2}{2}}dt \\
&= \frac{p+1}{2}-1+\frac{p+1}{2} \\
&= p
\end{aligned}
$$

□

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Αν ο πωλητής εφαρμόσει το ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο με πιθανότητα κέρδους $p$ τότε θα πρέπει να ισχύει*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt = p$$

*Το $z$ το οποίο ικανοποιεί την παραπάνω ισότητα είναι το $z = z_{\frac{p+1}{2}}$.*

**ΕΡΩΤΗΜΑ**

*Κάτω από την υπόθεση της γεωμετρικής κίνησης Brown μπορείτε να υπολογίσετε την πιθανότητα η αξία της μετοχής να ανέβει στο χρόνο $T$ σε σύγκριση με το χρόνο $0$;*

# Μια ή περισσότερες περίοδοι;

**Ερωτημα**

*Για πόσες περιόδους πρέπει να εφαρμόσουμε το ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο;*

### Παρατηρηση

*Το ρεαλιστικό διωνυμικό μοντέλο είναι πραγματοποιήσιμο στην πράξη όμως ίσως δεν είναι ωφέλιμο για τον πωλητή να το εφαρμόσει για περισσότερες από μια περιόδους. Σε αυτό μπορεί να δει κανείς το θεώρημα 4.9 της εργασίας Option pricing: Examples and open problems. Σημειώστε ότι τόσο το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο του διωνυμικού μοντέλου πολλών περιόδων όσο και αυτό του μοντέλου των Black-Scholes δεν ικανοποιούν την κοινά αποδεκτή αρχή «πούλα ακριβά-αγόρασε φθηνά» αλλά την αντίστροφη* ***«πούλα φθηνά-αγόρασε ακριβά»****!*

# Επιλογή των ρυθμών $d$ και $u$

Προφανώς θα πρέπει να ισχύει $dS_0 < K$ και $uS_0 > K$. Υπάρχουν γενικά δυο τρόποι επιλογής των ρυθμών. Εφόσον έχετε πουλήσει το συμβόλαιο στην τιμή $Y$ θα πρέπει να ισχύει ότι $aS_0 + b = Y$ και αυτή είναι μια πρώτη σχέση που συνδέει τους ρυθμούς $d, u$.

• Ο πρώτος τρόπος είναι να επιλέξετε είτε το $d$ είτε το $u$ και στη συνέχεια με βάση τις προηγούμενες σχέσεις να υπολογίσετε και το άλλο.

• Ο δεύτερος τρόπος είναι, αφού κάνετε μια υπόθεση για την μελλοντική κίνηση της μετοχής όπως για παράδειγμα ότι ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους $m\sigma$, να υπολογίσετε τα $d, u$ έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η πιθανότητα κέρδους, η μέση τιμή κέρδους κ.τ.λ.

Διαπιστώνουμε ότι με τον πρώτο τρόπο ο επενδυτής κάνει μια μαντεψιά για το που θα βρεθεί η τιμή της μετοχής ενώ στον δεύτερο τρόπο κάνει μια μαντεψιά για την κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή $S_T$.

# Τελικά είναι κάπου χρήσιμες οι δυο παραπάνω θεωρίες;

Το συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ότι καμία από τις δυο θεωρίες δεν μπορεί να δώσει έναν πρακτικό ορισμό δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου.
Το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου όμως προτείνει μια στρατηγική αντιστάθμισης η οποία είναι πραγματοποιήσιμη στην πράξη αντίθετα με την στρατηγική αντιστάθμισης που προτείνει το μοντέλο των Black-Scholes.
Θα δούμε παρακάτω πως μπορεί ο επενδυτής να επιλέξει αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο το οποίο να ικανοποιεί συγκεκριμένες προϋποθέσεις.

# Η τιμή πώλησης διαμορφώνεται σύμφωνα με την προσφορά και τη ζήτηση I

Ας υποθέσουμε ότι θέλετε να πουλήσετε ένα συμβόλαιο γραμμένο σε $d$ διαφορετικά υποκείμενα αγαθά με απολαβή $P_T = f(S_1, \cdots, S_d)$. Με ποια τιμή θα ξεκινούσατε το παζάρι; Δηλαδή ποια είναι η τάξη μεγέθους της αξίας αυτού του συμβολαίου;
Ένας τρόπος είναι να μελετήσετε τα ιστορικά δεδομένα των υποκείμενων αγαθών. Με αυτό τον τρόπο θα έχετε τις παρελθοντικές απολαβές του συμβολαίου αυτού, δηλαδή πόσο ακριβώς θα πληρώνατε στο παρελθόν αν το είχατε πουλήσει.
Μπορείτε να κάνετε μια στατιστική μελέτη αυτών των δεδομένων και να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διακύμανση κ.τ.λ. Στη συνέχεια να μαντέψετε ποια μπορεί να είναι η απολαβή στο μέλλον. Παρόμοια μελέτη θα κάνει και ο αγοραστής ο οποίος όμως θα έχει εν γένει διαφορετική άποψη για το μέλλον και επιπλέον έχει τη δυνατότητα να αγοράσει από άλλον πωλητή. Η τελική αξία θα διαμορφωθεί σύμφωνα με την προσφορά και τη ζήτηση.
Δείτε την εργασία On the practical point of view of option pricing για αυτή τη μελέτη παρελθοντικών δεδομένων.

# Η τιμή πώλησης διαμορφώνεται σύμφωνα με την προσφορά και τη ζήτηση II

Το ερώτημα για τον πωλητή είναι: με το ποσό $Y$ που έλαβα από την πώληση του συμβολαίου τι χαρτοφυλάκιο μπορώ να κατασκευάσω έτσι ώστε να έχω κέρδος σε κάποιες περιπτώσεις, να έχω φραγμένη πιθανή ζημιά κ.τ.λ. Το ίδιο ερώτημα καλείται και ο αγοραστής να απαντήσει, αν έχει αγοράσει αυτό το συμβόλαιο για λόγους κερδοσκοπίας.

# Ποιο είναι το καταλληλότερο μοντέλο περιγραφής ιστορικών δεδομένων;

**ΕΡΩΤΗΜΑ**

*Σε ένα συγκεκριμένο συμβόλαιο, ποια είναι η τυχαία μεταβλητή ή στοχαστική διαδικασία που περιγράφει καλύτερα τα παρελθοντικά δεδομένα;*

# Το μέλλον...

Υποθέστε ότι έχει συμβεί πρόσφατα ένα γεγονός το οποίο πρόκειται να έχει σημαντικό αντίκτυπο στις τιμές της απολαβής ενός συγκεκριμένου συμβολαίου. Σίγουρα όμως δεν έχει αφήσει το αντίστοιχο αποτύπωμα του στα παρελθοντικά δεδομένα. Ο επενδυτής θα πρέπει να μαντέψει ποιος θα είναι ακριβώς ο αντίκτυπος αυτού του γεγονότος στις παραμέτρους του μοντέλου που είχε επιλέξει κάτι το οποίο είναι αρκετά δύσκολο και απαιτεί ιδιαίτερη εμπειρία στις επενδύσεις (δεν είναι μαθηματικό πρόβλημα!). Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι το δυσκολότερο μέρος της αντιστάθμισης είναι να μαντέψει ο επενδυτής πως πρόσφατα γεγονότα (ή ακόμη και μελλοντικά) πρόκειται να επιδράσουν στις παραμέτρους του μοντέλου που έχει επιλέξει.

# Είναι χρήσιμη όμως η μελέτη ιστορικών δεδομένων;

Παρόλα αυτά η μοντελοποίηση των παρελθοντικών δεδομένων είναι επιτακτική διότι στη συνέχεια ο επενδυτής θα μεταβάλλει τις παραμέτρους κατάλληλα ανάλογα με την εκτίμηση που έχει για το μέλλον.

# Πλήθος ετών για παρελθοντικά δεδομένα

**ΕΡΩΤΗΜΑ**

*Οι παράμετροι ενός (οποιουδήποτε) μαθηματικού μοντέλου εξαρτώνται και από το πλήθος των ετών από όπου αντλήθηκαν τα παρελθοντικά δεδομένα. Ποιο είναι το καταλληλότερο πλήθος;*

Σε αυτό το ερώτημα θα απαντήσει ο επενδυτής σύμφωνα με την διαίσθηση και την εμπειρία του. Δεν περιμένουμε όλοι οι επενδυτές να χρησιμοποιήσουν τα ίδια παρελθοντικά δεδομένα ή τα ίδια μοντέλα όπως επίσης δεν θα έχουν και την ίδια άποψη για το μέλλον. Επομένως δεν έχει κανένα νόημα η έννοια της δίκαιης τιμής. Αλλωστε ο λόγος που υπάρχει περιθώριο κέρδους αλλά και ζημιάς είναι ακριβώς ότι το μέλλον μας είναι άγνωστο.

# Δίκαιη και άδικη τιμή πώλησης

Όπως είδαμε η έννοια της δίκαιης τιμής δεν μπορεί να ορισθεί. Η έννοια όμως της άδικης τιμής ορίζεται.
Αν ένας πωλητής ενός put option με τιμή εξάσκησης $K$ ζητά περισσότερα από $K$ τότε η τιμή αυτή είναι άδικη για τον αγοραστή.
Παρόμοια, για ένα συμβόλαιο με απολαβή $P_T = \max\{S_1, S_2, K\}$ μια τιμή πώλησης κάτω από $K$ είναι άδικη για τον πωλητή.
Έστω τώρα το συμβόλαιο με $P_T = \max\{S_1 - S_2, 0\}$. Ο πωλητής μπορεί να το πουλήσει στην τιμή $C(S_1, K) + K$ όπου $C(S_1, K)$ είναι ένα call option με τιμή εξάσκησης $K$. Ο πωλητής σε αυτή την περίπτωση θα είναι πάντοτε κερδισμένος (χωρίς ρίσκο!) αλλά δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι άδικη η τιμή αυτή για τον αγοραστή μιας που και αυτός μπορεί να έχει κέρδος και μάλιστα απεριόριστο.
Παρόλα αυτά, αν υπάρχει μεγάλος ανταγωνισμός, θα υπάρξει ένας άλλος πωλητής ο οποίος θα πουλήσει το συμβόλαιο αυτό φθηνότερα αναλαμβάνοντας ένα μικρό ρίσκο.

# Διωνυμικό Μοντέλο και απεριόριστη πιθανή ζημιά

Έστω ότι πουλήσατε ένα call συμβόλαιο με χρόνο λήξης $T$ και τιμή εξάσκησης $K_1$ στη τιμή $Y$. Ας υποθέσουμε ότι εφαρμόσατε το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου για να κατασκευάσετε ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο. Έχουμε δει ότι το χαρτοφυλάκιο αυτό θα έχει κέρδος αν $S_T \in (dS_0, uS_0)$ και ζημιά διαφορετικά. Μάλιστα η πιθανή ζημιά είναι απεριόριστη κάτι το οποίο γενικά δεν αρέσει στους επενδυτές.

# Φράσσοντας την πιθανή ζημιά στο διωνυμικό μοντέλο

Ένας τρόπος για να φράξουμε την πιθανή ζημιά εφαρμόζοντας το διωνυμικό μοντέλο είναι να αγοράσουμε ένα άλλο call συμβόλαιο με τιμή εξάσκησης $K_2 > K_1$ και τον ίδιο χρόνο λήξης. Τα χρήματα που θα περισσέψουν μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου εφαρμόζοντας το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου.

Ποιους ρυθμούς $d, u$ θα επιλέξουμε; Μπορούμε να κάνουμε μια υπόθεση για την κατανομή της $S_T$ και μέσω αυτής να υπολογίσουμε τα $d, u$ έτσι ώστε να μεγιστοποιούν μια ποσότητα που περιέχει την πιθανότητα κέρδους, τη μέση τιμή, την διακύμανση κ.τ.λ. Επίσης, μπορούμε να μαντέψουμε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}_+$ στο οποίο θα βρεθεί η $S_T$ και να μεγιστοποιήσουμε μια ποσότητα που περιέχει την πιθανότητα κέρδους δεδομένου ότι θα βρεθεί σε αυτό το σύνολο κ.τ.λ. για παράδειγμα

$$\max_{d,u} \frac{\mathbb{P}(\Pi > 0 | S_T \in A) \cdot \mathbb{E}(\Pi | S_T \in A)}{\mathrm{Var}(\Pi | S_T \in A)}$$

# Η $\gamma + 1$ στρατηγική

Μπορούμε να εφαρμόσουμε και μια διαφορετική στρατηγική για να έχουμε φραγμένη πιθανή ζημιά αγοράζοντας $\gamma + 1$ μετοχές (με $\gamma \geq 0$) δανειζόμενοι το ποσό $b$ έχοντας πουλήσει στη τιμή $Y$. Τότε η πιθανή ζημιά θα είναι φραγμένη.
Τι είναι καλύτερο, να εφαρμόσουμε το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου αγοράζοντας ένα call συμβόλαιο ή εφαρμόζοντας την $\gamma + 1$ στρατηγική;

# Παράδειγμα αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου για την πώληση ενός call option I

Έστω $S_0 = 2$, $T = 3/12$, $r = 0.01$, $K = 2.5$ και $L = 3$. Υποθέστε ότι έχετε πουλήσει ένα call option με τιμή εξάσκησης $K$ στη τιμή $Y = 0.3$ και έστω ότι μπορείτε να αγοράσετε ένα άλλο call option με τιμή εξάσκησης $L$ στην τιμή $C(L) = 0.2$.
Έστω ότι με το ποσό $0.3$ θέλετε να κατασκευάσετε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να έχει μέγιστη πιθανή ζημιά $D = 3$ Ευρώ. Σε μαθηματικά αυτό σημαίνει: να βρεθούν τα $a, b, c$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} aS_0 + b + c0.2 &= 0.3 \\ aS_T + be^{rT} + c(S_T - 3)^+ - (S_T - 2.5)^+ &\geq -3, \text{ για κάθε } S_T > 0 \end{aligned}$$

Το σύνολο των $(a, b, c)$ με τις παραπάνω ιδιότητες είναι μη κενό αφού κανείς μπορεί να διαλέξει $a = 3/2$, $b = -2.7$ και $c = 0$.

# Παράδειγμα αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου για την πώληση ενός call option II

Μπορούμε να επιλύσουμε το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$
\begin{array}{rcl}
 & \max & \Delta \\
aS_0 + b + 0.2c & = & 0.3 \\
\Pi(0) & \geq & -D \\
\Pi(K) & \geq & -D \\
\Pi(L) & \geq & -D \\
\Pi^{'}(L+) & \geq & 0.1
\end{array}
$$

όπου $\Delta$ μια ποσότητα όπως $\mathbb{E}(\Pi(S_T)|S_T \in A)$. Εδώ η συνάρτηση κέρδους είναι η

$$\Pi(x) = ax + be^{rT} + c(x-3)^+ - (x-2.5)^+$$

Η τελευταία απαίτηση που αφορά την παράγωγο είναι για να επιλέξουμε χαρτοφυλάκιο το οποίο να συγκλίνει στο άπειρο με

# Παράδειγμα αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου για την πώληση ενός call option III

συγκεκριμένη ταχύτητα. Η απαίτηση $\Pi(S_T) \geq -3$ για κάθε $S_T > 0$ μπορεί να επιτευχθεί αν ισχύουν οι τέσσερις πρώτες ανισότητες παραπάνω (η τελευταία απλώς μεγαλύτερη ή ίση από μηδέν) μιας και η συνάρτηση κέρδους είναι τμηματικά γραμμική και επομένως τα ακρότατα βρίσκονται στα άκρα των διαστημάτων.
Έτσι λοιπόν, μεταξύ των χαρτοφυλακίων με ζημιά όχι μεγαλύτερη από $D$ σε κάθε σενάριο, θα διαλέξουμε εκείνο το οποίο έχει τη μεγαλύτερη μέση τιμή κέρδους δεδομένου ότι η τιμή της μετοχής θα βρεθεί στο $A$.

# Παράδειγμα χρήσης των put options I

Έστω $S_0 = 2$ και έστω ότι το put option με τιμή εξάσκησης $L = 1.5$ κοστίζει $0.5$ Ευρώ ενώ το call option με τιμή εξάσκησης $K = 2.5$ κοστίζει $0.2$ Ευρώ. Ας υποθέσουμε ότι προβλέπετε ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει σημαντικά και για αυτό το λόγο θέλετε να αγοράσετε μερικές μετοχές επενδύοντας 1 Ευρώ αλλά δεν θέλετε να έχετε ζημιά μεγαλύτερη του 0.6 Ευρώ. Δηλαδή το χαρτοφυλάκιο σας θέλετε να αξίζει τουλάχιστον 0.4 Ευρώ μετά τη λήξη του put option. Με 1 Ευρώ θα αγοράσετε $1/2$ μετοχές ενώ με το ίδιο ποσό μπορείτε να αγοράσετε $5$ call options. Αν $S_T > 10/9K$ τότε θα ήταν καλύτερο να είχατε αγοράσει call options ενώ αν $S_T < 1.5$ ίσως θα έπρεπε να είχατε τοποθετήσει μερικά χρήματα σε τραπεζικό λογαριασμό ή σε αγορά put options.

# Παράδειγμα χρήσης των put options II

Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει το συμπέρασμα ότι θα πρέπει να κατασκευάσετε ένα χαρτοφυλάκιο της μορφής

$$aS_0 + b + cC(K) + dP(L) = 1$$

όπου $C(K), P(L)$ η σημερινές αξίες των call και put. Το ερώτημα είναι ποιοι πρέπει να είναι οι συντελεστές $a, b, c, d$. Αυτό θα εξαρτηθεί από τους στόχους που θέλετε να πετύχετε. Μετατρέποντας το πρόβλημα αυτό σε μαθηματικό πρόβλημα θα βρεθεί η κατάλληλη τετράδα η οποία ικανοποιεί τους ζητούμενους στόχους. Για παράδειγμα θέλετε η τελική αξία του χαρτοφυλακίου να είναι μεγαλύτερη από 0.4 Ευρώ ή να υπολογίσετε τους κατάλληλους συντελεστές έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η μέση τιμή κέρδους, να ελαχιστοποιηθεί η διακύμανση κ.τ.λ.

# Παράδειγμα χρήσης των put options III

Για να κατασκευάσετε ένα χαρτοφυλάκιο με μέγιστη πιθανή ζημιά τα $0.6$ Ευρώ αρκεί να σκεφτείτε όπως παραπάνω, δηλαδή να βρεθούν τα $(a, b, c, d)$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} aS_0 + b + c0.2 + d0.5 &= 1 \\ aS_T + be^{rT} + c(S_T - 2.5)^+ + d(1.5 - S_T) - e^{rT} &\geq -0.6 \end{aligned}$$

Το σύνολο των $(a, b, c, d)$ που ικανοποιούν τα παραπάνω είναι μη κενό αφού μπορεί να διαλέξει κανείς $a = 1/2$, $b = -1/3$, $c = 0$ και $d = 2/3$. Μάλιστα το πιθανό κέρδος είναι απεριόριστο.

# Παράδειγμα χρήσης των put options IV

Η συνάρτηση κέρδους για τον επενδυτή είναι η

$$\Pi(x) = \begin{cases} ax + be^{rT} + d(L-x) - e^{rT}, & \text{όταν } x < L \\ ax + be^{rT} - e^{rT}, & \text{όταν } x \in [L, K] \\ ax + be^{rT} + c(x-K) - e^{rT} & \text{όταν } x > K \end{cases}$$

Μπορείτε να προσθέσετε και άλλες ιδιότητες που θέλετε να ικανοποιεί η συνάρτηση κέρδους. Για παράδειγμα μπορείτε να απαιτήσετε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Pi(x)}{\gamma x} = 1$$

για κάποιο $\gamma$ της επιλογής σας. Με τον τρόπο αυτό θέλετε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να έχει απεριόριστο κέρδος και μάλιστα να συγκλίνει με συγκεκριμένη ταχύτητα στο $+\infty$.

# Παράδειγμα χρήσης των put options V

Μια άλλη πιθανή ιδιότητα είναι να υπολογίσετε τα $(a, b, c, d)$ (τα οποία μπορεί να είναι περισσότερα από ένα) έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η παρακάτω ποσότητα

$$\int_0^\infty (\Pi(x))^- dx$$

όπου $(\Pi(x))^-$ είναι το αρνητικό μέρος του αριθμού, δηλαδή $a^- = -\min(a, 0)$.

# Παράδειγμα χρήσης των put options VI

Στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα από ένα χαρτοφυλάκια τα οποία ικανοποιούν τέτοιου είδους ντετερμινιστικές ιδιότητες τότε μπορείτε να κάνετε μια υπόθεση είτε για το που θα βρεθεί η τιμή της μετοχής είτε για την κατανομή που ακολουθεί. Στη συνέχεια να επιλέξετε το κατάλληλο χαρτοφυλάκιο το οποίο ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες και ταυτόχρονα μεγιστοποιεί μια ποσότητα όπως την παρακάτω για παράδειγμα

$$\frac{\mathbb{E}(\Pi(S_T))}{\mathrm{Var}(\Pi(S_T)\cdot\mathbb{P}(\Pi(S_T)\in(-0.6,-0.3))}$$

# Παράδειγμα χρήσης των put options VII

Σε αυτό το παράδειγμα διαπιστώνουμε τη σαφή διαφορά της κατασκευής χαρτοφυλακίου με πιθανότητα $a$ να μην έχει ζημιά μεγαλύτερη από $0.6$ Ευρώ από την παραπάνω κατασκευή όπου το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι βέβαιο ότι δεν θα έχει μεγαλύτερη ζημιά και μάλιστα ανεξάρτητα από την κατανομή που ακολουθεί η αξία της μετοχής. Αυτό είναι ένα πλεονέκτημα του να εφοδιάζει κανείς το χαρτοφυλάκιο του με κατάλληλα call και put options.
Προκειμένου να επιτευχθούν οι ντετερμινιστικές ιδιότητες που θα θέσετε θα είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσετε περισσότερα call και put options με διαφορετικές τιμές εξάσκησης. Με τον τρόπο αυτό προσθέτετε περισσότερες ελεύθερες παραμέτρους προκειμένου να βρεθεί η κατάλληλη επιλογή. Το αντίτιμο όμως θα είναι η μαθηματική πολυπλοκότητα και επομένως υποχρεωτικά οι υπολογισμοί θα πρέπει να γίνουν μέσω κατάλληλου μαθηματικού λογισμικού.

# Παράδειγμα χρήσης των put options VIII

Στην περίπτωση που θέλετε να τοποθετήσετε το ποσό $V$ σε $n$ διαφορετικές μετοχές θα σκεφτείτε το ίδιο λαμβάνοντας υπόψη ότι μπορείτε να αγοράσετε και τα αντίστοιχα call και put options. Θα πρέπει να θέσετε κάποιους στόχους, όπως αυτούς που περιγράψαμε, και στη συνέχεια να επιλέξετε το χαρτοφυλάκιο εκείνο που αφενός ικανοποιεί τους στόχους αυτούς αφετέρου μεγιστοποιεί την μέση τιμή κέρδους, ελαχιστοποιεί την διακύμανση και άλλου τέτοιου είδους ποσότητες.

Έχοντας υπολογίσει τις παραμέτρους μπορείτε εύκολα να επαληθεύσετε ότι το χαρτοφυλάκιο που θα κατασκευάσετε έχει τις απαιτούμενες ντετερμινιστικές ιδιότητες. Για την επαλήθευση θα εργαστείτε στην συνάρτηση κέρδους η οποία θα είναι $n$ μεταβλητών όσα δηλαδή και τα υποκείμενα αγαθά.

Η κατασκευή χαρτοφυλακίου όπως την περιγράψαμε παραπάνω έχει συγκεκριμένα πλεονεκτήματα τα οποία είναι ανεξάρτητα της πρόβλεψης του επενδυτή για την κατανομή που ακολουθούν οι τιμές των αγαθών σε αντίθεση με την κλασσική βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου ελαχιστοποιώντας για παράδειγμα την διακύμανση. Δηλαδή με την παραπάνω κατασκευή γνωρίζει ο επενδυτής ότι το χαρτοφυλάκιο του έχει μέγιστη πιθανή ζημιά το ποσό $D$, ότι έχει απεριόριστο κέρδος (αν το έχει απαιτήσει), ότι έχει κέρδος όταν το υποκείμενο αγαθό βρεθεί σε ένα σύνολο κ.τ.λ. Όλα αυτά είναι ανεξάρτητα από την οποιαδήποτε πρόβλεψη για την κατανομή. Αν υπάρχουν πολλά χαρτοφυλάκια με τις απαιτούμενες ιδιότητες τότε μπορεί ο επενδυτής να διαλέξει κάποιο βασιζόμενος σε μια πρόβλεψη του για την κατανομή που ακολουθεί η αξία του υποκείμενου αγαθού.

# Κατασκευή χαρτοφυλακίου το οποίο να είναι κερδοφόρο όταν $S_T \in A \subseteq \mathbb{R}_+$ I

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής προβλέπει ότι η αξία μιας μετοχής θα πέσει κοντά στο μηδέν, δηλαδή θα βρεθεί σε ένα διάστημα της μορφής $(0, \lambda)$ ή θα ανέβει ψηλά, δηλαδή θα βρεθεί σε ένα διάστημα της μορφής $(M, +\infty)$ για κάποια $\lambda, M$. Η πρόβλεψη του αυτή προέκυψε μετά από κάποια σημαντική πρόσφατη εξέλιξη που συνέβη στην αγορά αλλά όμως δεν είναι σίγουρος πως ακριβώς θα επιδράσει στην κίνηση της μετοχής.
Για τον λόγο αυτό συμβουλεύεται δυο χρηματοοικονομικούς συμβούλους. Ο πρώτος του λέει ότι θα χρησιμοποιήσει ιστορικά δεδομένα με τα οποία θα υποθέσει ότι η $S_T$ ακολουθεί μια κατανομή με κάποιες παραμέτρους. Σύμφωνα με αυτό θα κατασκευάσει κατάλληλο χαρτοφυλάκιο μεγιστοποιώντας τη μέση τιμή κέρδους. Ο δεύτερος θα κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα έχει τους εξής στόχους: $\Pi(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \lambda)$ και $\Pi(x) > 0$ για κάθε $x \in (M, +\infty)$ όπου $\Pi(x)$ είναι η συνάρτηση κέρδους όπως την περιγράψαμε σε προηγούμενα παραδείγματα.

# Κατασκευή χαρτοφυλακίου το οποίο να είναι κερδοφόρο όταν $S_T \in A \subseteq \mathbb{R}_+$ II

Το χαρτοφυλάκιο του δεύτερου θα έχει βέβαιο κέρδος αν η πρόβλεψη του επενδυτή προκύψει σωστή σε αντίθεση με το χαρτοφυλάκιο του πρώτου το οποίο μπορεί να μην είναι καν κερδοφόρο σε αυτά τα δυο ενδεχόμενα. Ο δεύτερος επίσης, αν διαπιστώσει ότι υπάρχουν περισσότερα από ένα χαρτοφυλάκια τα οποία ικανοποιούν τους στόχους αυτούς θα επιλέξει εκείνο το οποίο μεγιστοποιεί για παράδειγμα τη μέση τιμή κέρδους έχοντας κάνει μια υπόθεση για την κατανομή της αξίας της μετοχής.

# Κατασκευή χαρτοφυλακίου το οποίο να είναι κερδοφόρο όταν $S_T \in A \subseteq \mathbb{R}_+$ III

Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο είναι το εξής επενδύοντας το ποσό του 1 Ευρώ: $a = 0.1$, $b = 0.1$, $c = 1$ και $d = 1$, θεωρώντας για ευκολία μηδενικό επιτόκιο. Από το γράφημα της συνάρτησης κέρδους διαπιστώνουμε τα εξής: το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι κερδοφόρο στο ενδεχόμενο $S_T \in (0, 0.66) \cup (3.09, +\infty)$. Η μέγιστη πιθανή ζημιά είναι $0.75$ δηλαδή σε κάθε περίπτωση το χαρτοφυλάκιο θα αξίζει τουλάχιστον 0.25 Ευρώ. Στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει ψηλά τότε η συνάρτηση κέρδους έχει την εξής συμπεριφορά $\Pi(x) \geq 1.1x - R$ για κάποιο $R > 0$ δηλαδή η ταχύτητα προς το άπειρο είναι μεγαλύτερη από $1/2$, δηλαδή το κέρδος αυξάνεται γρηγορότερα από το αν είχε αγοράσει μόνο μετοχές.

Είδαμε ότι κατά την εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου μιας περιόδου ο επενδυτής έχει την ευκαιρία να το χρησιμοποιήσει με τέτοιο τρόπο ώστε να έχει κέρδος όταν η τιμή της μετοχής βρεθεί σε ένα συγκεκριμένο διάστημα. Παρόμοια λογική έχει και η στρατηγική Butterfly spread και όλες οι παρόμοιες. Ο επενδυτής μπορεί να κατασκευάσει κατάλληλο χαρτοφυλάκιο για να έχει κέρδος στην περίπτωση που η μετοχή βρεθεί σε κάποιο σύνολο. Σε αυτή τη στρατηγική ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει ένα call option με τιμή εξάσκησης $K_1 = S_0 - a$, ένα call option με τιμή εξάσκησης $K_3 = S_0 + a$ και να πουλήσει δυο call options με τιμή εξάσκησης $K_2 = S_0$ όπου $S_0$ η σημερινή τιμή της μετοχής. Το χαρτοφυλάκιο αυτό θα έχει κέρδος όταν η τιμή της μετοχής βρεθεί σε κάποιο σύνολο ενώ η πιθανή ζημιά είναι φραγμένη. Στο βιβλίο Mathematics of Finance μπορεί να δει κανείς στο κεφάλαιο 9 και άλλες τέτοιες στρατηγικές.

Ίσως υπάρχουν και άλλοι συνδυασμοί με κατάλληλα call και put συμβόλαια που έχουν κέρδος στο ίδιο σύνολο και φραγμένη πιθανή ζημιά από τον ίδιο αριθμό επομένως κατασκευάζοντας το κατάλληλο πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορούμε να διαλέξουμε εκείνο το οποίο μεγιστοποιεί μια συγκεκριμένη ποσότητα, δείτε την εργασία στην οποία περιγράφουμε πως κανείς μπορεί να κατασκευάσει πολύπλοκα χαρτοφυλάκια διαλέγοντας κατάλληλα το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}_+$ στο οποίο προβλέπουμε ότι θα βρεθεί η αξία της μετοχής. Συνεπώς όλες οι παρόμοιες στρατηγικές ανήκουν στην πραγματικότητα σε ένα τέτοιο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

# Όλα τα αγαθά είναι διαπραγματεύσιμα στην αγορά;

Το προηγούμενο σκεπτικό αντιστάθμισης έχει ρεαλιστική σημασία για τον πωλητή. Μάλιστα, στην περίπτωση που τα υποκείμενα αγαθά (ή κάποια από αυτά) δεν *είναι διαπραγματεύσιμα* στην αγορά μπορεί να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο με $k \neq d$ εν γένει το πλήθος αγαθά τα οποία να είναι διαπραγματεύσιμα στην αγορά.

# Μερικά τελευταία σχόλια I

Ο επενδυτής που θα κατασκευάσει ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο με χρονικό ορίζοντα το $T$ ίσως είναι καλύτερα να κάνει συχνές αναδιαρθρώσεις κάνοντας νέες μαντεψιές και ξανά λύνοντας το πρόβλημα βελτιστοποίησης σε κάθε υποπερίοδο έτσι ώστε να εκμεταλλευθεί τις νέες πληροφορίες που έρχονται από την αγορά. Η συχνότητα των αναδιαρθρώσεων εξαρτάται από την αποδοτικότητα του «εργαλείου» πρόβλεψης που έχει στη διάθεση του, αν δηλαδή μπορεί να προβλέπει πολύ καλά για τις επόμενες δυο μέρες τότε καλό θα ήταν η αναδιάρθρωση να γίνεται με αυτή την συχνότητα. Στο ενδιάμεσο θα μπορούσε να εφαρμόσει μια στρατηγική του τύπου «πούλα ακριβά - αγόρασε φθηνά».

# Μερικά τελευταία σχόλια II

Στο εδάφιο 9.3 του βιβλίου Mathematics for Finance μπορεί να δει κάποιος πως μπορεί να κατασκευάσει χαρτοφυλάκια τα οποία να έχουν κέρδος στην περίπτωση που η $S_T$ βρεθεί σε συγκεκριμένα σύνολα κάτι το οποίο είναι στενά συνδεδεμένο με αυτά που έχουμε αναφέρει προηγούμενα. Η προηγούμενη όμως μαθηματική μοντελοποίηση είναι σαφώς γενικότερη μιας και δύναται να κατασκευάσει χαρτοφυλάκια για πολύ γενικότερα σύνολα.

# Μερικά τελευταία σχόλια III

Επίσης, συχνά έχουμε αναφέρει την γεωμετρική κίνηση Brown ως ένα τρόπο μοντελοποίησης της κίνησης της αξίας μιας μετοχής. Υπάρχουν και άλλα μοντέλα τα οποία όμως είναι περίπλοκα και σπάνια έχουμε τη λύση τους σε κλειστή μορφή. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να εφαρμόσουμε κάποια αριθμητική μέθοδο προκειμένου μέσω κατάλληλης προσομείωσης να λύσουμε τα παραπάνω προβλήματα βελτιστοποίησης. Το πρόβλημα με αυτό είναι ότι οι κλασικές αριθμητικές μέθοδοι παράγουν λύσεις και με αρνητικές τιμές παρόλο που η πραγματική λύση είναι παντού θετική. Σε αυτό το πνεύμα μπορεί να δει κάποιος την εργασία On the construction of boundary preserving numerical schemes.

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου I

Η πρώτη προσπάθεια ορισμού δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου έγινε, μάλλον, από τον Louis Bachelier. Στη συνέχεια, έγινε ακόμη μια προσπάθεια με το γνωστό μοντέλο των Black-Scholes και αργότερα με το διωνυμικό, τριωνυμικό μοντέλο κ.τ.λ. Σε όλες αυτές τις προσπάθειες πρέπει κάποιος να δεχθεί μια υπόθεση για την κίνηση της αξίας του υποκείμενου αγαθού η οποία δεν είναι καθολικά αποδεκτή. Για παράδειγμα, η μεταβλητότητα στο μοντέλο των Black-Scholes δεν είναι παγκόσμια σταθερά και επομένως είναι υπό διαπραγμάτευση μεταξύ του αγοραστή και του πωλητή. Ακόμη και αν συμφωνήσουν σε αυτό, ο πωλητής δεν θα είναι σε θέση να κατασκευάσει το προτεινόμενο χαρτοφυλάκιο συνεπώς δεν πρόκειται να αποδεχθεί αυτή την τιμή ως δίκαιη. Ως εκ τούτου η έννοια της δίκαιης τιμής δεν είναι καλά ορισμένη και επομένως οι προσπάθειες αυτού του είδους είναι αποτυχημένες.

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου II

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα ορισμό δίκαιης τιμής ενός συμβολαίου ο οποίος είναι καθολικά αποδεκτός με την έννοια ότι δεν θα κάνουμε καμία υπόθεση για την κίνηση του υποκείμενου αγαθού.

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου III

Η βασική ιδέα είναι να βρούμε μια τιμή πώλησης $Y$ με την οποία ο πωλητής και ο αγοραστής να μπορούν να κατασκευάσουν αντισταθμιστικά χαρτοφυλάκια τα οποία να είναι πραγματοποιήσιμα στην πράξη ενώ ταυτόχρονα να μην κάνουμε καμία υπόθεση για την κίνηση του υποκείμενου αγαθού.

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου IV

Ας υποθέσουμε ότι ο πωλητής ενός συμβολαίου με συνάρτηση απολαβής $f(x)$ (π.χ. $(f(x) = (x-K)^+)$ θέλει να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να περιέχει το συμβόλαιο αυτό χρησιμοποιώντας το ποσό $Y$ από την πώληση του συμβολαίου. Μια βασική ιδιότητα που θα ήθελε να ικανοποιεί το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι να έχει πεπερασμένη πιθανή ζημιά σε οποιοδήποτε σενάριο.

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου V

Για ευκολία ας υποθέσουμε ότι στην αγορά είναι διαπραγματεύσιμα ένα call και ένα put με τιμές εξάσκησης $K, L$ αντίστοιχα και χρόνο λήξης τον ίδιο με το συμβόλαιο που έχει πουλήσει. Με το ποσό $Y$ θέλει να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο ως εξής

$$aS_0 + b + cC(K) + dP(L) = Y$$

όπου $C(K)$ και $P(L)$ οι σημερινές τιμές των call και put.

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου VI

Στόχος του πωλητή είναι η συνάρτηση κέρδους, δηλαδή η

$$\Pi^{writer}(x) = ax + be^{r_1 T} + c(x-K)^+ + d(L-x)^+ - f(x)$$

να είναι τέτοια ώστε να υπάρχει κάποιο $D \geq 0$ έτσι ώστε $\Pi(x) \geq -D$ για κάθε $x > 0$. Για να το πετύχει αυτό αρκεί να λύσει το παρακάτω πρόβλημα

$$\max_{a,b,c,d} \min_{x>0} \Pi(x; a, b, c, d)$$

όπου $b = Y - (aS_0 + cC(L) + dP(L))$.

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου VII

Με την επίλυση του παραπάνω προβλήματος ο πωλητής θα έχει στα χέρια του ένα χαρτοφυλάκιο με την μικρότερη πιθανή ζημιά. Η τιμή

$$D^{writer} = -\max_{a,b,c,d} \min_{x>0} \Pi^{writer}(x; a, b, c, d)$$

είναι αυτή η μέγιστη πιθανή ζημιά ενώ ο πωλητής ελπίζει να είναι πεπερασμένη.

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου VIII

Παρομοίως, ο αγοραστής μπορεί να κατασκευάσει ένα παρόμοιο χαρτοφυλάκιο

$$aS_0 + b + cC(K) + dP(L) = -Y$$

προκειμένου να αγοράσει το συμβόλαιο με συνάρτηση απολαβής $f(x)$.
Δηλαδή μπορεί να χρειαστεί να δανεισθεί ένα ποσό $b$, να δανεισθεί μερικές μετοχές και να τις πουλήσει κ.τ.λ.
Η συνάρτηση κέρδους θα είναι

$$\Pi^{buyer}(x) = ax + be^{r_2 T} + c(x-K)^+ + d(L-x)^+ + f(x)$$

όπου $b = -Y - (aS_0 + cC(K) + dP(L))$.
Στη συνέχεια επιλύει το παρακάτω πρόβλημα

$$\max_{a,b,c,d} \min_{x>0} \Pi^{buyer}(x; a, b, c, d)$$

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου IX

Προφανώς οι συντελεστές του βέλτιστου χαρτοφυλακίου θα διαφέρουν μεταξύ πωλητή και αγοραστή. Εδώ η μέγιστη πιθανή ζημιά θα είναι

$$D^{buyer} = - \max_{a,b,c,d} \min_{x>0} \Pi^{buyer}(x; a, b, c, d)$$

και ο αγοραστής ελπίζει επίσης να είναι πεπερασμένη.

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου X

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

*Ορίζουμε ως δίκαιη τιμή πώλησης την τιμή $Y$ (αν υπάρχει) για την οποία ισχύει ότι*

$$D^{writer} = D^{buyer}$$

*δηλαδή το ποσό με το οποίο και οι δυο μπορούν να κατασκευάσουν αντισταθμιστικά χαρτοφυλάκια με την ίδια μέγιστη πιθανή ζημιά.*

Τα αντισταθμιστικά χαρτοφυλάκια που προτείνουμε είναι πραγματοποιήσιμα και εφικτά στην πράξη. Επίσης δεν έχουμε κάνει καμία υπόθεση για την κίνηση της μετοχής. Σημειώστε ότι μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα χαρτοφυλάκια με την ίδια μέγιστη πιθανή ζημιά.

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου XI

Μια ακόμη ιδιότητα την οποία οι επενδυτές θα ήθελαν να ισχύει είναι τα χαρτοφυλάκια αυτά να έχουν απεριόριστο πιθανό κέρδος. Μπορούμε να δούμε αν ισχύει αυτή η ιδιότητα αν

$$\lim_{x \to +\infty} \Pi(x) = +\infty$$

Αν τα δυο αντισταθμιστικά χαρτοφυλάκια έχουν αυτή την ιδιότητα τότε η δίκαιη τιμή πώλησης που ορίσαμε παραπάνω θα είναι ακόμη ισχυρότερη αν ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Pi^{writer}(x)}{\Pi^{buyer}(x)} = 1 \text{ (ή περίπου ίσο με 1)}$$

Προφανώς ο ίδιος ορισμός δίκαιης τιμής μπορεί να δοθεί σε συμβόλαια με πολλά υποκείμενα αγαθά.

# Καθολικά αποδεκτός ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου XII

Ο ορισμός της δίκαιης τιμής που δώσαμε δεν σημαίνει ότι η τιμή πώλησης στην πραγματική αγορά θα είναι ίση με αυτή.
Ο επενδυτής, με τον υπολογισμό της δίκαιης τιμής υπολογίζει ταυτόχρονα και ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο το οποίο μπορεί να του είναι χρήσιμο. Από την άλλη πλευρά υπολογίζοντας την δίκαιη τιμή μπορεί να γνωρίζει την τάξη μεγέθους της αξίας αυτού του συμβολαίου έτσι ώστε να την χρησιμοποιήσει για το παζάρι κατά την αγοραπωλησία. Η τελική τιμή θα προέλθει σύμφωνα με το νόμο της προσφοράς και της ζήτησης.

Ακόμη και αν πουληθεί στη δίκαιη τιμή τόσο ο πωλητής όσο και ο αγοραστής μπορούν να χρησιμοποιήσουν το ποσό αυτό κατασκευάζοντας κατάλληλο (για αυτούς) χαρτοφυλάκιο το οποίο να είναι κερδοφόρο σε ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο και ταυτόχρονα να έχει φραγμένη πιθανή ζημιά όπως έχουμε περιγράψει προηγούμενα. Για παράδειγμα, ο επενδυτής μπορεί να κάνει μια πρόβλεψη είτε για το σύνολο στο οποίο πιστεύει ότι θα βρεθεί η αξία του υποκείμενου αγαθού είτε/και για την κατανομή που ακολουθεί αυτή η τυχαία μεταβλητή και να κατασκευάσει το χαρτοφυλάκιο έτσι ώστε να είναι κερδοφόρο αν η πρόβλεψη του προκύψει σωστή.

# Παράδειγμα στον υπολογισμό δίκαιης τιμής πώλησης ενός call option I

Έστω ότι $S_0 = 2$, $r = 0$ και έστω ότι στην αγορά υπάρχει διαθέσιμο ένα call option με τιμή εξάσκησης $L = 3$ ενώ η τιμή πώλησης του είναι $0.2$. Επενδυτής ενδιαφέρεται να πουλήσει ένα άλλο call option με τιμή εξάσκησης $K = 2.5$. Θα υπολογίσουμε την δίκαιη τιμή πώλησης σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό.
Ο πωλητής με το ποσό $Y$ που θα εισπράξει μπορεί να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο τέτοιο ώστε να έχει την μικρότερη πιθανή ζημιά σε κάθε σενάριο. Δηλαδή θα κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο ως εξής $aS_0 + b + 0.2c = Y$ και τέτοιο ώστε $\Pi(x) \geq -D$ για κάθε $x > 0$ όπου $\Pi_{writer}(x) = ax + b + c(x - L)^+ - (x - K)^+$.

# Παράδειγμα στον υπολογισμό δίκαιης τιμής πώλησης ενός call option II

Προκειμένου να υπολογίσει το κατάλληλο χαρτοφυλάκιο το οποίο να έχει τη μικρότερη δυνατή ζημιά σε όλα τα σενάρια αρκεί να λύσει το παρακάτω πρόβλημα, αφού η συνάρτηση κέρδους $\Pi(x)$ είναι τμηματικά γραμμική,

$$\min D$$
$$\begin{array}{rcl} aS_0 + b + 0.2c & = & Y \\ \Pi_{writer}(0) + D & \geq & 0 \\ \Pi_{writer}(K) + D & \geq & 0 \\ \Pi_{writer}(L) + D & \geq & 0 \\ \Pi'_{writer}(L+) & \geq & 0.3 \end{array}$$

Η τελευταία απαίτηση σημαίνει ότι θέλουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να έχει την εξής ιδιότητα $\Pi(x) \geq 0.3x - C$ για μεγάλα $x$ δηλαδή να συγκλίνει στο $+\infty$ με συγκεκριμένη ταχύτητα.

# Παράδειγμα στον υπολογισμό δίκαιης τιμής πώλησης ενός call option III

Παρόμοια ο αγοραστής με το ποσό $Y$ μπορεί να κατασκευάσει ένα παρόμοιο χαρτοφυλάκιο λύνοντας το επόμενο πρόβλημα

$$\begin{array}{rcl} & \min D & \\ aS_0 + b + 0.2c & = & -Y \\ \Pi_{buyer}(0) + D & \geq & 0 \\ \Pi_{buyer}(K) + D & \geq & 0 \\ \Pi_{buyer}(L) + D & \geq & 0 \\ \Pi'_{buyer}(L+) & \geq & 0.3 \end{array}$$

όπου $\Pi_{buyer}(x) = ax + b + c(x-L)^+ + (x-K)^+$.

# Παράδειγμα στον υπολογισμό δίκαιης τιμής πώλησης ενός call option IV

Για την τιμή $Y = 2.5$ βρίσκουμε ότι και οι δυο μπορούν να κατασκευάσουν χαρτοφυλάκια με μέγιστη πιθανή ζημιά $D = 0.31$ και ταυτόχρονα και τα δυο συγκλίνουν στο άπειρο με συγκεκριμένη ταχύτητα. Τα χαρτοφυλάκια είναι τέτοια ώστε οι αντίστοιχες συναρτήσεις κέρδους να είναι οι εξής

$$\begin{aligned} \Pi_{writer}(x) &= 0.1667x - 0.31 + 1.133(x-3)^+ - (x-2.5)^+ \\ \Pi_{buyer}(x) &= -0.31 + 0.3(x-3)^+ + (x-2.5)^+ \end{aligned}$$

Από το γράφημα των συναρτήσεων διαπιστώνουμε ότι και τα δύο έχουν την ίδια μέγιστη ζημιά και ταυτόχρονα συγκλίνουν στο άπειρο με την ίδια ταχύτητα.

# Παράδειγμα στον υπολογισμό δίκαιης τιμής πώλησης ενός call option V

Υπό αυτή την έννοια τα δυο χαρτοφυλάκια είναι ισοδύναμα επομένως αν τα δυο μέρη συμφωνούν σε αυτό το κριτήριο τότε υποχρεωτικά θα συμφωνήσουν και στην τιμή $Y = 2.5$.
Ελαχιστοποιώντας την ποσότητα $D + \int_0^\infty (\Pi(x))^- dx$ κάτω από τους ίδιους περιορισμούς θα καταλήξουμε σε μια διαφορετική δίκαιη τιμή.
Μπορούμε να ορίσουμε άπειρες τέτοιου είδους δίκαιες τιμές ενώ λύνοντας τα αντίστοιχα προβλήματα θα πάρουμε και το αντίστοιχο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο. Οι δίκαιες αυτές τιμές θα είναι, εν γένει, διαφορετικές μεταξύ τους αλλά δίνουν στον επενδυτή μια τάξη μεγέθους της αξίας του συμβολαίου.

# Παράδειγμα στον υπολογισμό δίκαιης τιμής πώλησης ενός call option VI

Η δίκαιη τιμή που προτείνει το μοντέλο των Black-Scholes στηρίζεται σε μια υπόθεση για την κίνηση του υποκείμενου αγαθού και συγκεκριμένα στην μεταβλητότητα. Ο υπολογισμός όμως αυτής της παραμέτρου δεν είναι καθολικά αποδεκτός μιας και πρόκειται για μια πρόβλεψη για την μελλοντική κίνηση της μετοχής. Ακόμη και αν συμφωνήσουν σε μια τιμή της μεταβλητότητας ο πωλητής δεν θα μπορέσει ποτέ να κατασκευάσει το προτεινόμενο χαρτοφυλάκιο στην πράξη επομένως δεν θα αποδεχθεί την τιμή αυτή ως δίκαιη.
Σημειώστε ότι η έννοια της δίκαιης τιμής που ορίσαμε παραπάνω εξαρτάται από τις τιμές όλων των call και put options. Οι τιμές αυτές καθορίζονται σύμφωνα με το νόμο της προσφοράς και της ζήτησης όπως και οι τιμές των μετοχών. Η έννοια της δίκαιης τιμής δεν θα πρέπει να συγχέεται με την πρόβλεψη της μελλοντικής τιμής πώλησης ενός συμβολαίου. Είναι λογικό ότι οι τιμές πώλησης θα διαφέρουν από οποιαδήποτε δίκαιη τιμή και να ορίσουμε.
Για ένα συμβόλαιο με πολύπλοκο τύπο απολαβής αλλά τμηματικά γραμμικό μπορούμε να ορίσουμε την δίκαιη τιμή όπως παραπάνω

# Παράδειγμα στον υπολογισμό δίκαιης τιμής πώλησης ενός call option VII

χρησιμοποιώντας όλα τα υπάρχοντα call και put options που αφορούν το υποκείμενο αγαθό. Σε μια τέτοια περίπτωση μάλιστα μπορεί να είναι χρήσιμη αυτή η τιμή για τον επενδυτή προκειμένου να γνωρίζει την τάξη μεγέθους της αξίας αυτού του συμβολαίου αλλά και ταυτόχρονα ένα πρακτικά εφαρμόσιμο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο το οποίο μπορεί να κατασκευαστεί με αυτό το ποσό. Ακόμη μια χρήσιμη πληροφορία για τον επενδυτή θα είναι η μέση τιμή και η διακύμανση των παρελθοντικών απολαβών του συμβολαίου αυτού. Οι πληροφορίες αυτές θα είναι χρήσιμες κατά τη διάρκεια της διαπραγμάτευσης.

# Υπολογισμός μέσης τιμής και διακύμανσης της απολαβής μέσω πρόβλεψης I

Ένας επενδυτής θα ήθελε να γνωρίζει την μέση τιμή και την διακύμανση της απολαβής ενός συμβολαίου. Ας υποθέσουμε ότι η απολαβή έχει την μορφή $f(S_T)$ για μια δοσμένη συνάρτηση $f$. Προκειμένου να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και την διακύμανση της απολαβής θα πρέπει να γίνει μια πρόβλεψη, δηλαδή να υποθέσουμε για παράδειγμα ότι η $S_t$ είναι λύση μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης της μορφής

$$S_t = S_0 + \int_0^t f(s, S_s)ds + \int_0^t g(s, S_s)dW_s, \quad t \in [0, T]$$

# Υπολογισμός μέσης τιμής και διακύμανσης της απολαβής μέσω πρόβλεψης II

Μια απλή τέτοια περίπτωση είναι η γεωμετρική κίνηση Brown οπότε σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε τις ζητούμενες ποσότητες αναλυτικά. Αν όμως υποθέσουμε κάτι πιο πολύπλοκο για την κίνηση της μετοχής ενδέχεται να πρέπει να υπολογίσουμε τις ποσότητες αυτές χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους. Αν ο επενδυτής έχει μια καλή προγνωστική μέθοδο τότε η παραπάνω πληροφορία θα του είναι επίσης χρήσιμη, μαζί βέβαια με την μέση τιμή των παρελθοντικών απολαβών καθώς και τις δίκαιες τιμές.

# Υπολογισμός μέσης τιμής και διακύμανσης της απολαβής μέσω πρόβλεψης III

Αν χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική κίνηση Brown μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την μέση τιμή της απολαβής όπως είναι εύκολο να δούμε διότι γνωρίζουμε τη μορφή της λύσης της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Θα μπορούσαμε άραγε να ορίσουμε αυτή τη μέση τιμή ως δίκαιη τιμή πώλησης του συμβολαίου αυτού; Προφανώς όχι διότι ο κάθε επενδυτής θα έχει μια διαφορετική πρόβλεψη και επομένως μια διαφορετική μέση τιμή.

# Υπολογισμός μέσης τιμής και διακύμανσης της απολαβής μέσω πρόβλεψης IV

Αν αλλάξουμε μέτρο πιθανότητας σε ένα άλλο ισοδύναμο μέτρο τότε πάλι μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή κάτω από το νέο μέτρο πιθανότητας. Όμως το νέο αυτό μέτρο πιθανότητας θα εξαρτάται από το παλιό και επομένως πάλι δεν έχει νόημα να ορίσουμε την έννοια της δίκαιης τιμής με βάση το νέο ισοδύναμο μέτρο. Στην θεωρία των Black-Scholes γίνεται ακριβώς αυτό!
Υπάρχει άραγε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση (πιο περίπλοκη από την γεωμετρική κίνηση Brown) με βάση την οποία να υπολογίσουμε τη μέση τιμή των απολαβών και να την ορίσουμε ως δίκαιη τιμή; Αν υπάρχει, τότε δεν θα πρέπει να περιέχει ελεύθερες παραμέτρους διότι τότε θα υπάρχει ασυμφωνία στους επενδυτές όσον αφορά τις τιμές των παραμέτρων. Στην περίπτωση που δεν έχει ελεύθερες παραμέτρους τότε κάθε μετοχή θα χαρακτηρίζεται πλήρως από μια τέτοια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Αυτό όμως δεν πρόκειται να γίνει διότι η συμπεριφορά της τιμής μιας μετοχής αλλάζει με τον χρόνο και μάλιστα απρόβλεπτα.

# Μετάθεση Ρίσκου I

Είδαμε ότι η κατασκευή κατάλληλου χαρτοφυλακίου θα πρέπει να στηριχθεί τόσο σε αγορά μετοχών αλλά επίσης και σε κατάλληλη αγορά συμβολαίων προαίρεσης προκειμένου να επιτευχθούν ντετερμινιστικοί στόχοι. Μεταξύ των χαρτοφυλακίων που ικανοποιούν τους στόχους αυτούς θα επιλεγεί εκείνο το χαρτοφυλάκιο το οποίο μεγιστοποιεί μια ποσότητα η οποία θα στηρίζεται σε ένα υποκειμενικό μέτρο πιθανότητας. Ο λόγος που στην πραγματική ζωή δεν στηριζόμαστε εξ ολοκλήρου σε αποτελέσματα που εξαρτώνται από την επιλογή του μέτρου πιθανότητας είναι ακριβώς επειδή είναι υποκειμενικό!

Το ίδιο σκεπτικό ισχύει και στον Αναλογισμό μέσω της έννοιας του Reinsurance (δείτε το βιβλίο Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects, Wiley, 2017) για παράδειγμα. Η ασφαλιστική εταιρεία μεταθέτει μέρος του ρίσκου σε άλλες ασφαλιστικές εταιρείες και το πρόβλημα που προκύπτει είναι πάλι ένα μαθηματικό πρόβλημα προκειμένου να επιλεχθεί η κατάλληλη στρατηγική.

# Αντικειμενικό και υποκειμενικό μέτρο πιθανότητας I

Έστω ότι έχουμε στα χέρια μας ένα ζάρι. Προκειμένου να δούμε αν είναι δίκαιο θα πρέπει να κάνουμε τα αντίστοιχα πειράματα, δηλαδή να το ρίξουμε πολλές φορές και να δούμε αν όντως τα αποτελέσματα είναι μοιρασμένα. Αν είναι, τότε το ζάρι θεωρείτε δίκαιο και επομένως κατασκευάζουμε το αντίστοιχο ΄μέτρο πιθανότητας το οποίο είναι αντικειμενικό. Με αυτό εννοούμε ότι οποιοσδήποτε πειραματιστεί με αυτό το ζάρι θα βρει το ίδιο αποτέλεσμα. Παρομοίως και αν το ζάρι δεν είναι δίκαιο θα κατασκευάσουμε ένα διαφορετικό μέτρο πιθανότητας το οποίο θα είναι επίσης αντικειμενικό.

Ας φανταστούμε τώρα ένα άλλο ζάρι το οποίο έχει κάποιες μαγικές ιδιότητες. Αλλάζει η συμπεριφορά του ανάλογα με τις συνθήκες που επικρατούν στο περιβάλλον του εκείνη τη χρονική στιγμή. Οι παράγοντες που επηρεάζουν την συμπεριφορά αυτού του ζαριού είναι ότι μπορείτε να φανταστείτε. Το πόσοι άνθρωποι βρίσκονται γύρω του, η θερμοκρασία και οτιδήποτε άλλο.

# Αντικειμενικό και υποκειμενικό μέτρο πιθανότητας II

Ο πρώτος ο οποίος θα πειραματιστεί πάνω σε αυτό το ζάρι θα καταλήξει σε κάποια συμπεράσματα και θα φτιάξει ένα μέτρο πιθανότητας. Προφανώς όμως το μέτρο αυτό εξαρτάται από τις συνθήκες που επικρατούσαν κατά την διάρκεια των πειραμάτων. Κάποιος άλλος, θα καταλήξει σε άλλα συμπεράσματα διότι τα πειράματα του θα γίνονται εν γένει κάτω από διαφορετικές συνθήκες. Κάποια στιγμή θα διαπιστώσουν όλοι ότι το μέτρο πιθανότητας που έχουν κατασκευάσει διαφέρει από πείραμα σε πείραμα άλλοτε λίγο και άλλοτε πολύ. Δηλαδή το μέτρο πιθανότητας είναι υποκειμενικό σε αυτή την περίπτωση.

Αν κάποιος το έχει αντιληφθεί αυτό θα προσπαθήσει να προβλέψει τις συνθήκες που θα επικρατούν κατά το μελλοντικό χρονικό διάστημα που θα γίνουν οι ρίψεις και επομένως να προβλέψει το μέτρο πιθανότητας που θα ταιριάζει σε αυτές τις ρίψεις. Ανάλογα με τις προβλέψεις του θα προσπαθήσει να ποντάρει αναλόγως σε ένα τυχερό παιχνίδι το οποίο στηρίζεται σε αυτό ζάρι.

Η μελλοντική αξία μιας μετοχής είναι ακριβώς μια τέτοια περίπτωση όπου εξαρτάται από οτιδήποτε μπορεί να φανταστεί κανείς και για

# Αντικειμενικό και υποκειμενικό μέτρο πιθανότητας III

αυτό το λόγο οποιοδήποτε μέτρο πιθανότητας ορίσει κάποιος θα είναι υποκειμενικό. Αυτό σημαίνει ότι όταν επενδύεις πραγματικά χρήματα θα πρέπει ταυτόχρονα να εξασφαλίζεσαι απέναντι στον κίνδυνο και να μην στηρίζεσαι εξ ολοκλήρου στην επιλογή του μέτρου πιθανότητας που έχεις επιλέξει!

# Βιβλιογραφία


- H. Albrecher - J. Beirlant - J. Teugels, *Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects*, Wiley, 2017.
- F. Black - M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy, 81, 637 - 659, 1973.
- J. Cox - S. Ross - M. Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, Journal of Financial Economics, 7, 229 - 264, 1979.
- N. Halidias, *On the practical point of view of option pricing*, Monte Carlo Methods and Applications, 2022.
- N. Halidias, *Option Pricing: Examples and Open Problems*, Monte Carlo Methods and Applications, 2024.
- N. Halidias, *A novel portfolio optimization method and its application to the hedging problem*, ResearchGate.
- N. Halidias, *On the construction of boundary preserving numerical schemes*, Monte Carlo Methods and Applications, vol. 22, n. 4, 2016.