

Εργασία - Μέρος Β

Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά II

Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

Πρώτο Θέμα

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και μια κίνηση Brown στο χώρο αυτό. Έστω ότι η τιμή της μετοχής στο χρόνο εξελίσσεται σύμφωνα με την παρακάτω стоχαστική διαφορική εξίσωση

$$S_t = 2.1 + 0.01 \int_0^t S_s ds + 0.3 \int_0^t S_s dW_s$$

Υποθέστε ότι θέλετε να πουλήσετε ένα call option με τιμή εξάσκησης 2.2 το οποίο να λήγει σε 6 μήνες από τώρα. Έστω ότι το επιτόκιο σε χωρίς ρίσκο επένδυση είναι $r = 0.001$ και είναι ετήσιο συνεχούς ανατοκισμού. Τι τιμή θα δίνετε σε έναν αγοραστή και γιατί; Πως θα είσαπτε εξασφαλισμένοι σε μια απότομα ανοδική πορεία της μετοχής; Τι μπορείτε να κάνετε αν το υποκείμενο αγαθό δεν είναι διαπραγματεύσιμο στην αγορά; Τα ίδια ερωτήματα για την περίπτωση που θα θέλατε να αγοράσετε ένα τέτοιο συμβόλαιο. Τέλος, τα ίδια ερωτήματα για ένα put option με την ίδια τιμή εξάσκησης.

Δεύτερο Θέμα

Έστω ότι οι τιμές δυο αγαθών ακολουθούν τις παρακάτω стоχαστικές διαφορικές εξισώσεις.

$$\begin{aligned} S_t^1 &= 2.1 + 0.01 \int_0^t S_s^1 ds + 0.3 \int_0^t S_s^1 dW_s \\ S_t^2 &= 2.0 + 0.02 \int_0^t S_s^2 ds + 0.6 \int_0^t S_s^2 dW_s \end{aligned}$$

Έστω το συμβόλαιο με απολαβή $P_T = \max\{S_T^1 - S_T^2, 0\}$ με χρόνο λήξης 6 μήνες και έστω ότι το επιτόκιο σε χωρίς ρίσκο επένδυση είναι $r = 0.001$. Τι τιμή θα δίνετε σε έναν υποψήφιο αγοραστή και γιατί; Διατρέχετε κίνδυνο χρεοκοπίας και γιατί; Πως μπορείτε να εξασφαλιστείτε έναντι αυτού το κινδύνου; Αν θέλατε να το αγοράσετε, σε ποια τιμή θα το κάνατε και γιατί; Παρόμοια ερωτήματα και για το συμβόλαιο με απολαβή $P_T = \max\{S_T^1, S_T^2, 2.05\}$.

Παρατήρηση 1 Αλλάξτε κατά 20% το πολύ όλα τα παραπάνω νούμερα εκτός από τις σημερινές τιμές των μετοχών. Η διαφοροποίηση αυτή μεταξύ σας προέρχεται από την διαφορετική «μαντεψιά» που κάνει ο καθένας σας για το μέλλον και άρα χρησιμοποιείται διαφορετικά ιστορικά δεδομένα. \square

Τρίτο Θέμα

Ποιοι άλλοι τύποι [συμβολαίων προαίρεσης](#) υπάρχουν; Δείτε το βιβλίο [Algorithmic trading and quantitative strategies](#) και περιγράψτε τα αντικείμενα τα οποία πραγματεύεται. Μπορείτε να βρείτε άλλα παρόμοια βιβλία τα οποία αναφέρονται σε προβλήματα που συναντώνται στην πράξη όσον αφορά τα χρηματοοικονομικά μαθηματικά;

Τέταρτο Θέμα

[Επιλέξτε](#) μια εταιρεία η οποία βρίσκεται στο Ελληνικό χρηματιστήριο, [κατεβάστε](#) παρελθοντικές τιμές της μετοχής και γράψτε την αξία της μετοχής στην παρακάτω μορφή

$$S_t = S_0 + m \int_0^t S_r dr + \sigma \int_0^t S_r dW_r, \quad t \in [0, T]$$

για κατάλληλες σταθερές S_0, m, σ και για $T = 30$ ημέρες. Στη συνέχεια επιλέξτε δυο μετοχές και υπολογίστε τη μέση τιμή και διακύμανση της απόδοσης της κάθε μετοχής καθώς και την συνδιακύμανση τους, ανά ημέρα.

Πέμπτο Θέμα

Η αναλογία αγοράς - πώλησης είναι η $C - P = S_0 - Ke^{-rT}$ όπου C η τιμή ενός call option, P η τιμή ενός put option, K η τιμή εξάσκησης, T ο χρόνος λήξης του συμβολαίου και r το επιτόκιο της χωρίς ρίσκο επένδυσης. Λύνοντας ως r έχουμε ότι

$$r = \frac{\ln K - \ln(S_0 + P - C)}{T}$$

Μπορούμε να κάνουμε ένα πείραμα λαμβάνοντας δεδομένα από το χρηματιστήριο και να υπολογίσουμε το επιτόκιο r από την παραπάνω σχέση. Τα δεδομένα θα αφορούν συμβόλαια με διάφορες υποκείμενες μετοχές, τιμές εξάσκησης και χρόνους λήξης. Αν κάνετε ένα τέτοιο πείραμα θα προκύψει σταθερός αριθμός r ; Αν όχι, τι σημαίνει αυτό για την αναλογία αγοράς - πώλησης;

Έκτο Θέμα

Στο πρώτο και στο δεύτερο μέρος της εργασίας έχουμε υποθέσει ότι η κίνηση της μετοχής ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους m, σ . Η υπόθεση αυτή είναι ουσιαστικά το πως βλέπει ο επενδυτής το μέλλον όσον αφορά την κίνηση της συγκεκριμένης μετοχής και είναι στην πραγματικότητα μια μαντεψιά. Κάθε επενδυτής μπορεί να κάνει την ίδια ή διαφορετική υπόθεση για την ίδια μετοχή.

Σε κάθε ένα από τα παραπάνω συμπεράσματα που έχετε εξάγει σκεφτείτε ποια είναι ανεξάρτητα της υπόθεσης αυτής, ποια είναι εξαρτημένα από αυτή την υπόθεση και πόσο. Για παράδειγμα η μέση τιμή της μετοχής εξαρτάται από την υπόθεση αυτή και μπορούμε να δούμε με ποιον ακριβώς τρόπο. Ένα παράδειγμα συμπεράσματος το οποίο είναι ανεξάρτητο αυτής της υπόθεσης είναι για παράδειγμα η εφαρμογή της $(\gamma + 1)$ - στρατηγικής αντιστάθμισης σε ένα call option όπου μπορούμε να υπολογίσουμε την μέγιστη δυνατή ζημιά που μπορεί να έχει ο πωλητής. Η μέγιστη αυτή ζημιά είναι ανεξάρτητη της υπόθεσης που έχουμε κάνει!