

# Εργασία - Μέρος Α

## Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά II

### Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

#### Πρώτο Θέμα

Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  χώρος πιθανότητας και  $W_t$  μια κίνηση Brown ορισμένη σε αυτόν και έστω ότι η τιμή της μετοχής της εταιρείας  $A$  ακολουθεί την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$X_t = 2.1 + 0.02 \int_0^t X_s ds + 0.2 \int_0^t X_s dW_s, \quad t \in [0, T]$$

όπου  $T = 3$  μήνες. Υπολογίστε τη μέση της τιμής της μετοχής στον χρόνο  $T$  και βρείτε έναν άλλο χώρο πιθανότητας στον οποίο η τιμή της μετοχής ακολουθεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$X_t = 2.1 + 0.2 \int_0^t X_s d\hat{W}_s$$

Ποια είναι η μέση τιμή της μετοχής στο χώρο αυτό; Τι σχέση έχει με την πραγματικότητα; Υπολογίστε και την διακύμανση της  $X_T$  τόσο ως προς το πραγματικό μέτρο όσο και με το ισοδύναμο μέτρο.

Μπορείτε να υπολογίσετε την πιθανότητα η τιμή της μετοχής να ανέβει, δηλαδή την πιθανότητα  $\mathbb{P}\left(\frac{X_T}{X_0} > 1\right)$ ; Δεδομένων των  $0 < d < u$  μπορείτε να υπολογίσετε την πιθανότητα  $\mathbb{P}\left(\frac{X_T}{X_0} \in (d, u)\right)$ ; Υπολογίστε το κατάλληλο  $z$  έτσι ώστε

για  $p = 0.7$  να ισχύει  $\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-z\sqrt{T}}^{z\sqrt{T}} e^{-\frac{t^2}{2T}} dt = p$ . Στη συνέχεια αποδείξτε ότι

$$\mathbb{P}\left(e^{-z \cdot 0.2\sqrt{T} + (0.02 - \frac{0.2^2}{2})T} \leq \frac{X_T}{X_0} \leq e^{z \cdot 0.2\sqrt{T} + (0.02 - \frac{0.2^2}{2})T}\right) = 0.7$$

#### Δεύτερο Θέμα

Ένας επενδυτής θέλει να επενδύσει το ποσό των  $V_0 = 1.000$  Ευρώ στις εταιρείες  $A, B$  με χρονικό ορίζοντα τα 2 χρόνια. Έστω ότι το ετήσιο επιτόκιο μιας χωρίς ρίσκο επένδυσης είναι  $r = 0.01$ . Πως είναι καλύτερο να επενδύσει τα χρήματά του;

Προφανώς θα χρειαστεί μια μελέτη παρελθοντικών δεδομένων. Σημειώστε ότι αν μια εταιρεία είναι σε φάση συγχώνευσης, εξαγοράς, ανάπτυξης κ.τ.λ. τότε η τιμή της μετοχής συμπεριφέρεται διαφορετικά από ότι στις «ομαλές» χρονικές περιόδους. Προκειμένου ο επενδυτής να επιλέξει τα κατάλληλα παρελθοντικά δεδομένα θα πρέπει να μαντέψει αν στο προσεχές διάστημα οι εταιρείες  $A, B$  θα βρίσκονται σε κάποια παρόμοια φάση ή όχι. Αν ναι, καλό ίσως θα είναι να επιλέξει τα παρελθοντικά δεδομένα των χρονικών περιόδων στις οποίες βρισκόταν σε παρόμοια φάση. Αν όχι, θα πρέπει να επιλέξει τα παρελθοντικά δεδομένα τα οποία αντιστοιχούσαν σε «ομαλές» χρονικές περιόδους.

Υποθέτουμε ότι κάποιος επενδυτής μετρώντας τα κατάλληλα (όπως αυτός νομίζει!) παρελθοντικά δεδομένα κατέληξε στις παρακάτω παραμέτρους για την απόδοση της κάθε μετοχής, δηλαδή της  $\mu$  τέτοιας ώστε  $\left(\frac{S^T}{S^0} = 1 + \mu\right)$

$$\begin{aligned} m_A &= 0.1 & \sigma_A &= 0.3 \\ m_B &= 0.2 & \sigma_B &= 0.7 \\ \sigma_{AB} &= 0.002 \end{aligned}$$

Αλλάξτε λίγο τις παραπάνω παραμέτρους, δηλαδή το πολύ κατά 10% πάνω ή κάτω, και καταγράψτε την κατάλληλη (για εσάς) στρατηγική επένδυσης. Οι διαφορές των παραμέτρων οφείλονται στην διαφορετική «μαντεψιά» που έχει κάνει ο καθένας σας για το μέλλον και χρησιμοποιώντας διαφορετικά παρελθοντικά δεδομένα.

Τέλος, απαντήστε στα τέσσερα παρακάτω ερωτήματα.

- (i) Στη χρονική περίοδο των 2 ετών ποια είναι η μέγιστη ζημιά; Απαντήστε με πιθανότητα 0.99
- (ii) Στη χρονική περίοδο των 2 ετών ποια είναι η πιθανότητα να έχετε ζημιά μεγαλύτερη των 50 Ευρώ;
- (iii) Ποια είναι η μέση τιμή της ζημιάς δεδομένου ότι θα είναι μεγαλύτερη των 50 Ευρώ;
- (iv) Η υπόθεση που έχουμε κάνει για την απόδοση  $\mu$  του χαρτοφυλακίου είναι λογική; Μάλλον είναι η απλούστερη δυνατή προκειμένου να γίνουν εύκολα κάποιοι υπολογισμοί. Δείτε για παράδειγμα το αντικείμενο [Value at Risk](#).