Σημειώσεις Μαρκοβιανών Αλυσίδων

0.0.1 Δυναμοσειρές

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 ***Δυναμοσειρά*** *με κέντρο το* $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ *ονομάζεται η σειρά της μορφής*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Θα εξετάσουμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις (για ποια x εκτός του $x = x_0$ που είναι προφανές) συγκλίνει μια δυναμοσειρά.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 *Έστω η δυναμοσειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Αν $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = b$ *και* $b = 0$ *τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε* $x \in \mathbb{R}$*. Αν* $b = \infty$ *τότε συγκλίνει μόνο για* $x = 0$*. Αν* $b \in (0, \infty)$ *τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε* $x \in \left(-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right)$ *ενώ αποκλίνει για όλα τα υπόλοιπα εκτός των άκρων του διαστήματος. Για τα άκρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Μια δυναμοσειρά δεν είναι τίποτε άλλο από μια σειρά αριθμών όταν κάποιος έχει σταθερό το x. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της n-οστής ρίζας μιας και είναι ισχυρότερο κριτήριο από αυτό του λόγου. Ξεχωρίζουμε τις εξής περιπτώσεις.

- Αν $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = b = 0$ τότε αφού

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| b = 0$$

προκύπτει ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x.

• Αν $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = b = \infty$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για την προφανή επιλογή $x = 0$.

• Αν $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = b \in (0, \infty)$ τότε αφού

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| b$$

η δυναμοσειρά θα συγκλίνει όταν $|x| < \frac{1}{b}$ και θα αποκλίνει όταν $|x| > \frac{1}{b}$. Για την περίπτωση όπου $|x| = \frac{1}{b}$ το κριτήριο της n-οστής ρίζας δεν μπορεί να αποφανθεί. □

Στην πράξη, αν είναι βολικό, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει το κριτήριο του λόγου διότι

$$|x| \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Longrightarrow |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

αλλά και

$$|x| \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Longrightarrow |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

Προταση 3 *Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R. Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon] \subseteq (-R, R)$ όπου $\varepsilon > 0$ όταν το $R < +\infty$ και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής $[-r, r]$ για οποιοδήποτε $r \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, το όριο της δυναμοσειράς είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $x \in (-R, R)$. Η συνάρτηση όριο είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε κάθε διάστημα $[a, b] \subseteq (-R, R)$ και ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

Τέλος, η συνάρτηση όριο είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (-R, R)$ και ισχύει ότι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Η ακτίνα σύγκλισης της σειράς των παραγώγων είναι επίσης R.

Αποδειξη. Προφανώς ισχύει ότι

$$|a_n x^n| \leq |a_n|(R-\varepsilon)^n \text{ για κάθε } x \in [-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$$

Αφού η σειρά της $|a_n|(R-\varepsilon)^n$ συγκλίνει τότε και η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα (κριτήριο Weierstrass). Οι συναρτήσεις $a_n x^n$ είναι συνεχείς στο $(-R, R)$ και επομένως λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης και η συνάρτηση όριο θα είναι συνεχής. Λόγω του ότι οι $a_n x^n$ είναι ολοκληρώσιμες τότε και η συνάρτηση όριο είναι ολοκληρώσιμη (δες πρόταση ;;) και ισχύει η ζητούμενη σχέση.

Θα εξετάσουμε την ακτίνα σύγκλισης της σειράς των παραγώγων (στην πραγματικότητα της σειράς $\sum n a_n x^n$ η οποία έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την σειρά των παραγώγων) και θα αποδείξουμε ότι συμπίπτει με αυτήν της αρχικής σειράς.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{}$$

Αφού οι συναρτήσεις $a_n x^n$ είναι παραγωγίσιμες και η σειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-R+\varepsilon, R+\varepsilon]$ τότε (δες πρόταση ;;)

$$f^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$\square$

Σημαντικό πόρισμα είναι το παρακάτω.

Προταση 4 *Αν $f(x) = \sum a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης το R τότε η συνάρτηση f έχει παραγώγους όλων των τάξεων στο $(-R, R)$ και ισχύει*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

Προταση 5 (Θεωρημα Abel) *Αν $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a \in (-\infty, \infty)$ τότε*

$$\lim_{x \uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$$

Αν $a_k \geq 0$ και

$$\lim_{x \uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a \leq \infty$$

τότε και

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a \in (-\infty, \infty)$ και θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \uparrow 1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k - 1) \right| = 0$$

Αφού η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a \in (-\infty, \infty)$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε N τ.ω.

$$\left| \sum_{k=N}^{M} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

για κάθε $M > N$. Όμως

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k - 1) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{N} a_k (x^k - 1) + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k (x^k - 1) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{N} a_k (x^k - 1) \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k (x^k - 1) \right| \end{aligned}$$

Για $0 \leq x < 1$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=0}^{N} a_k(x^k - 1)\right| \leq CN|x-1|$$

όπου C φράσσει από πάνω κατά απόλυτη τιμή την μηδενική ακολουθία a_n. Επομένως για x κοντά στο 1 έχουμε ότι

$$\left|\sum_{k=0}^{N} a_k(x^k - 1)\right| < \varepsilon/2$$

Θέτουμε $A_k = \sum_{r=k}^{\infty} a_r$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(x^k - 1)\right| &= \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} (A_k - A_{k+1})(x^k - 1)\right| \\ &= \left|A_{N+1}(x^{N+1} - 1) + \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k(x^k - x^{k-1})\right|\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(x^k - 1)\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}|x^{N+1} - 1| + \frac{\varepsilon}{4}x^{N+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Τελικά, για x κοντά στο 1 προκύπτει ότι

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x^k - 1)\right| < \varepsilon$$

Στην περίπτωση που $a_k \geq 0$ ισχύει προφανώς

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

για $0 \leq x < 1$. Δηλαδή

$$\lim_{x\uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = +\infty \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$$

Αν όμως

$$\lim_{x\uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a < \infty$$

τότε σημαίνει ότι η ακολουθία $\sum_{k=0}^{n} a_k$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει και χρησιμοποιώντας το πρώτο μέρος του θεωρήματος το όριο θα είναι ίσο με a. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 6 *Αν* $a_k \geq 0$ *και* $a \leq +\infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a \Longleftrightarrow \lim_{x \uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7 *Όλα τα αποτελέσματα που αφορούν τις δυναμοσειρές της μορφής* $\sum a_n x^n$ *ισχύουν και για τις δυναμοσειρές της μορφής* $\sum a_n (x - x_0)^n$ *θέτοντας* $y = x - x_0$ *και μελετώντας την δυναμοσειρά* $\sum a_n y^n$.

0.0.2 Παραδείγματα

• Θα εξετάσουμε την δυναμοσειρά

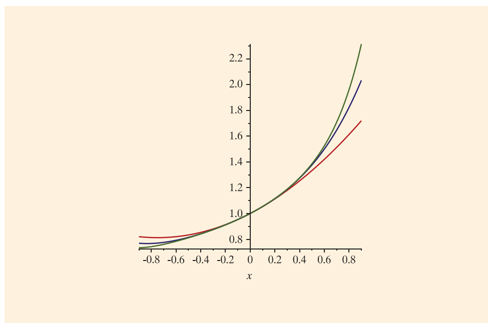
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

Παίρνουμε το όριο

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1$$

Επομένως $R = 1$ άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $(-1, 1)$. Κοιτάμε ξεχωριστά τα άκρα $-1, 1$. Για $x = 1$

έχουμε την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$. Αν $x = -1$ έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει (χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Leibnitz) οπότε τελικά η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in [-1, 1)$. Εξετάστε την δυναμοσειρά των παραγώγων και δείξτε ότι συγκλίνει για $x \in (-1, 1)$.



Σχήμα 1: Γραφήματα των συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n+1}$ για $m = 2, 4, 8$ με κόκκινο, μπλε και πράσινο χρώμα αντίστοιχα.

- Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

συγκλίνει απολύτως για κάθε $|x| < 1$ ενώ αποκλίνει για $|x| > 1$. Για $x = 1$ συγκλίνει χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Leibnitz ενώ για $x = -1$ αποκλίνει. Επομένως συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $I \subseteq (-1, 1)$.

• Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

συγκλίνει απολύτως για κάθε $|x| < 1$ και αποκλίνει για $|x| \geq 1$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $I \subseteq (-1, 1)$. Το ίδιο ισχύει για την δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (\text{γεωμετρική σειρά})$$

ενώ το όριο είναι $\frac{1}{1-x}$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $I \subseteq (-1, 1)$ επομένως ισχύει ότι

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Για παράδειγμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{1/4} = 2$$

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $I \subseteq (-1,1)$ επομένως η σειρά των παραγώγων έχει το ίδιο διάστημα σύγκλισης και ισχύει ότι

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

Για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο της δυναμοσειράς

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= x + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^n \\
&= x + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1} \\
&= x + x^2 \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' + x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} - 1\right) \\
&= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$$

Χρησιμοποιώντας το γνωστό όριο της γεωμετρικής σειράς μπορούμε να υπολογίσουμε ορισμένα όρια σειρών που σχετίζονται με αυτή. Κάποια άλλα όρια σειρών προκύπτουν από την χρήση των δυναμοσειρών που παράγουν άλλες συναρτήσεις όπως η εκθετική, η λογαριθμική κ.τ.λ. τις οποίες θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

0.1 Σειρές Taylor

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε το ερώτημα κατά πόσο μια δοσμένη συνάρτηση μπορεί να γραφεί σαν μια δυναμοσειρά.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 *Έστω η f η οποία έχει παραγώγους όλων των τάξεων. Κατασκευάζουμε την δυναμοσειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

*Η δυναμοσειρά αυτή ονομάζεται **σειρά Taylor** της f γύρω από το x_0.*

Για παράδειγμα μπορούμε να κατασκευάσουμε την σειρά Taylor της $\sin x$ γύρω από το 0. Υπολογίζοντας τις παραγώγους της $\sin x$ στο σημείο 0 προκύπτει τελικά ότι η σειρά Taylor της $\sin x$ είναι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 *Αν η συνάρτηση f έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξεως n στο διάστημα $[a,b]$ και η $f^{(n+1)}(x)$ υπάρχει στο ανοικτό (a,b) τότε για κάθε $x, y \in [a,b]$ υπάρχει ξ μεταξύ του x και y τ.ω.*

$$f(y) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(y-x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y-x)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ο αριθμός A ο οποίος ικανοποιεί την σχέση

$$f(y) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(y-x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n + (y-x)^{n+1}A$$

Η συνάρτηση $F(r)$ η οποία ορίζεται ως εξής

$$F(r) = f(r) + \frac{f'(r)}{1!}(y-r) + \cdots + \frac{f^{(n)}(r)}{n!}(y-r)^n + (y-r)^{n+1}A$$

είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) και επίσης $F(y) = F(x) = f(y)$. 'ρα υπάρχει ξ μεταξύ του

x και του y έτσι ώστε $F^{'}(\xi) = 0$. Παρατηρούμε όμως ότι

$$F^{'}(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(y-\xi)^n + (n+1)(y-\xi)^n A$$

οπότε προκύπτει ότι

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$\square$

Για την μελέτη της σειράς Taylor γύρω από το x_0 χρήσιμη είναι η παράσταση

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \text{ (συνάρτηση υπόλοιπο)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 *Έστω ότι η f έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα ανοικτό διάστημα $I = (a, b)$ και έστω $x_0 \in I$. Τότε*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

για κάθε $x \in (a, b)$ **ανν** $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις μπορούμε να γράψουμε

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

όπου $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ και $\xi \in [a, b]$. Για ένα οποιοδήποτε σημείο $u \in (a, b)$ έχουμε ότι

$$R_n(u) = f(u) - S_n(u)$$

όπου

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(u - x_0)^k$$

Έστω ότι ισχύει

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

τότε από την σχέση

$$R_n(u) = f(u) - S_n(u)$$

προκύπτει λαμβάνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ ότι $\lim_{n\to\infty} R_n(u) = 0$ για κάθε $u \in (a, b)$.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι για κάθε $u \in (a, b)$ έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} R_n(u) = 0$$

τότε από την σχέση

$$R_n(u) = f(u) - S_n(u)$$

προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} S_n(u) = f(u) \text{ για κάθε } u \in (a, b)$$

$\square$

Έτσι, αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η σειρά Taylor συγκλίνει στην $f(x)$ θα κοιτάξουμε το όριο του υπολοίπου το οποίο πρέπει να είναι μηδέν. Ένας τρόπος να το αποδείξουμε αυτό είναι να κοιτάξουμε την σειρά που παράγει το υπόλοιπο, δηλαδή την

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$

και αν διαπιστώσουμε (με το κριτήριο ρίζας ή του λόγου για παράδειγμα) ότι συγκλίνει τότε αναγκαστικά η ακολουθία $R_n(x) \to 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11 *Αν η συνάρτηση f έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης στο διάστημα $I = (x_0 - R, x_0 + R)$ και υπάρχει αριθμός $M > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$ να ισχύει $|f^{(n)}(x)| \leq M$, τότε*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in I$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το υπόλοιπο έχει την μορφή $R_n(x) =$

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ επομένως έχουμε ότι

$$|R_n(x)| = \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)(\xi)}| \leq M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\lim \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Ένας βολικός τρόπος είναι να αποδείξουμε ότι η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει το οποίο αναγκαστικά σημαίνει ότι οι όροι της ακολουθίας τείνουν στο μηδέν. Για να το κάνουμε αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο λόγου για παράδειγμα από όπου πολύ εύκολα διαπιστώνουμε ότι η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει και επομένως $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά Taylor συγκλίνει στην $f(x)$ στο διάστημα I. $\square$

Στο επόμενο πόρισμα ουσιαστικά αποδεικνύουμε ότι το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά μιας συνάρτησης f είναι μοναδικό και επιτυγχάνεται μέσω της σειράς Taylor.

ΠΟΡΙΣΜΑ 12 *Έστω ότι*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad \text{ομοιόμορφα για } |x-x_0| < r$$

Τότε

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

και επομένως η σειρά αυτή είναι η σειρά Taylor της $f(x)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτοντας $x = x_0$ εύκολα βλέπουμε ότι $a_0 = f(x_0)$. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης μπορούμε να παραγωγίσουμε διαδοχικά όρο προς όρο την ισότητα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

και να πάρουμε, για την πρώτη παράγωγο

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

για την δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}$$

και ούτω κάθε εξής. Θέτοντας $x = x_0$ στις παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

□

Παρατηρηση 13 (Μοναδικότητα Δυναμοσειρών) *Με το ίδιο σκεπτικό με το προηγούμενο πόρισμα αποδεικνύεται ότι αν δυο δυναμοσειρές είναι ίσες, δηλαδή*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad \text{για κάθε } |x| < R$$

τότε και $a_n = b_n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \cdots$.

Στο θεώρημα 9 είδαμε ότι το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το x_0 n βαθμού δίνει υπόλοιπο $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ όπου ξ είναι μεταξύ του x και του x_0. Η μορφή αυτή του υπολοίπου ονομάζεται `μορφή του Lagrange`. Θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι μπορεί να γραφεί και σε διαφορετική μορφή όπως

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0), \quad (\texttt{μορφή του Cauchy}) \\
R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt, \quad (\texttt{ολοκληρωτική μορφή})
\end{aligned}
$$

όπου ξ βρίσκεται μεταξύ του x και του x_0.

Θα αποδείξουμε πρώτα την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου. Υποθέτουμε ότι η f είναι $n+1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Για $n = 0$ ισχύει διότι

$$
f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \tag{1}
$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για το $n-1$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για n. Αφού ισχύει για το $n-1$ θα έχουμε

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dx
$$

Όμως

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dx \\
= \; & -\frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!}\Big|_{x=x_0}^{x} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \\
= \; & \frac{f^{(n)}(t)(x-x_0)^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην ισότητα 1 προκύπτει το ζητούμενο.

Για να πάρουμε την μορφή του Cauchy αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα στην ολοκληρωτική μορφή. Δηλαδή

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\int_{x_0}^{x}dt \\
&= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)
\end{aligned}$$

0.1.1 Παραδείγματα

• Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x}$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor ως εξής

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ σε κάθε κλειστό διάστημα $I \subseteq (-1,1)$ και επομένως μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο και να σχηματίσουμε την δυναμοσειρά,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^t t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \qquad (2) \end{aligned}$$

Αντίστοιχα υπολογίζουμε

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad x \in (-1,1)$$

Στην προηγούμενη ενότητα είχαμε αποδείξει ότι η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

συγκλίνει για $x \in (-1, 1)$. Παρατηρούμε ότι

$$-\ln(1-x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

επομένως το όριο της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x} \quad \text{όταν } x \in (-1, 1)$$

Για να υπολογίσουμε το $\ln 2$ θα αφαιρέσουμε τις δυο παραπάνω δυναμοσειρές, δηλαδή

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

σχηματίζοντας έτσι την δυναμοσειρά του δεξιού μέλους. Διαλέγοντας $x = 1/3$ σε αυτή την δυναμοσειρά έχουμε την τιμή του $\ln 2$.

• Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά ως εξής

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) x^{2n}$$

διότι είναι πάλι μια γεωμετρική σειρά αν αντικαταστήσουμε το x με το x^2. Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $I \subseteq (-1,1)$ και επομένως μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο και να σχηματίσουμε την δυναμοσειρά της $\arctan x$, δηλαδή

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

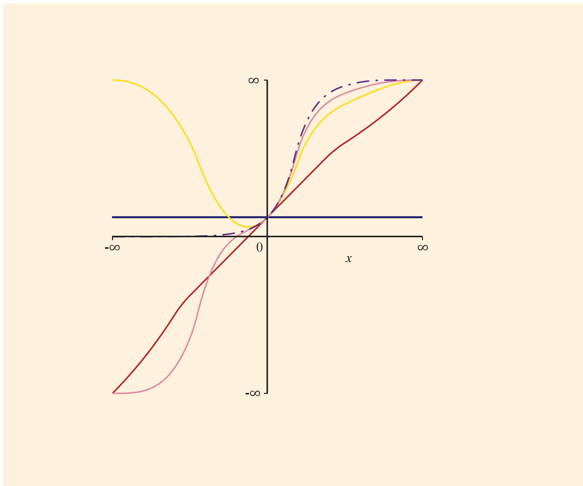
Αν παραγωγίσουμε όρο προς όρο λαμβάνουμε

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$$

• Η σειρά Taylor της e^x είναι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $(-M, M)$.



Σχήμα 2: Με μπλε γραμμή είναι η συνάρτηση $y = 1$, με κόκκινη γραμμή είναι η συνάρτηση $y = 1 + x$, με κίτρινο η συνάρτηση $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, με ροζ η συνάρτηση $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ και με μοβ χρώμα η συνάρτηση e^x.

Αντικαθιστώντας στην σειρά Taylor της e^x το x με το $-\frac{x^2}{2}$ προκύπτει ότι

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $(-M, M)$ στην συνάρτηση $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση

$$\int_0^x e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

ολοκληρώνοντας όρο προς όρο την δυναμοσειρά της $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Έτσι προκύπτει ότι

$$\int_0^x e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!2^n}$$

η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $\int_0^x e^{-\frac{r^2}{2}} dr$ σε κάθε διάστημα της μορφής $(-M, M)$. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\int_0^1 e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

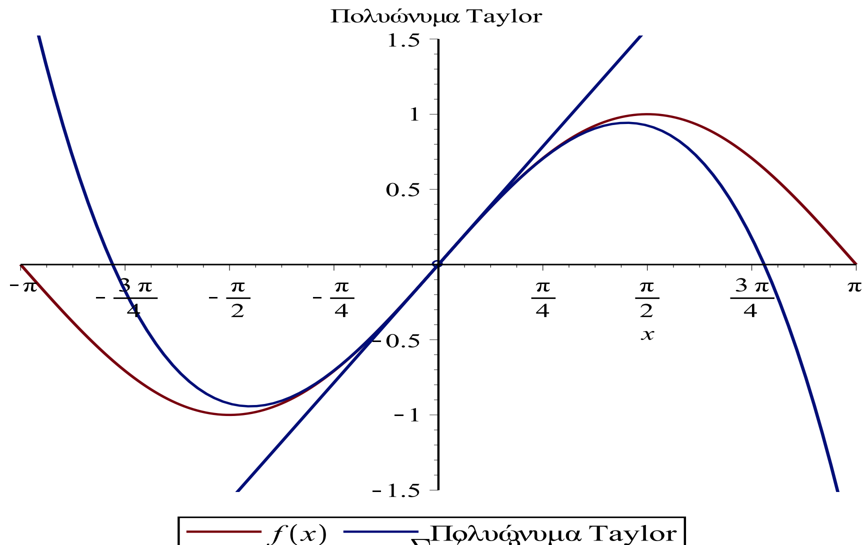
με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων, μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Leibnitz (δες ;;). Έτσι, υπολογίζουμε το ελάχιστο n έτσι ώστε

$$\frac{1}{n!2^n(2n+1)} < 10^{-2}$$

και αθροίζουμε την σειρά
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!2^n(2n+1)}$$
μέχρι το n που έχουμε υπολογίσει.

• Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις αναπτύσσονται σε σειρά Taylor ως εξής
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

• Η συνάρτηση $f(x)=(1+x)^k$ όπου $k\in\mathbb{R}$ αναπτύσσεται ως εξής σε σειρά Taylor γύρω από το μηδέν
$$(1+x)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}k\\ n\end{array}\right)x^n \tag{3}$$
όπου
$$\left(\begin{array}{c}k\\ n\end{array}\right)=\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\quad \text{και}\quad \left(\begin{array}{c}k\\ 0\end{array}\right)=1$$
Η σειρά συγκλίνει για $|x|<1$ και για να το αποδείξουμε αυτό θα εργαστούμε στο υπόλοιπο
$$R_n(x)=\frac{(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1}f^{(n+1)}(\theta x)$$



Σχήμα 3

Στο $x = 0$, για τη συνάρτηση $f(x) = \sin(x)$, γράφημα της $f(x)$ και το(α) προσεγγιστικό(ά) πολυώνυμο(α) Taylor τάξεως 1 ..3.

όπου $\theta \in [0, 1]$. Αφού $|x| < 1$ τότε

$$0 \leq \frac{1-\theta}{1+\theta x} \leq 1$$

οπότε

$$|R_n(x)| \leq (1+\theta x)^{k-1}|kx||(1-\frac{k}{1})x|\cdots|(1-\frac{k}{n})x|$$

Αν διαλέξουμε $|x| < q < 1$ τότε για αρκετά μεγάλο

$n > N$ ισχύει ότι

$$|R_n(x)| \leq (1+\theta x)^{k-1}|k|(1+|k|)^N q^{n-N} \quad n > N$$

οπότε το $R_n \to 0$. Μπορούμε να διαλέξουμε $k = -\frac{1}{2}$ και στην θέση του x να βάλουμε το $-x^2$ (αποδείξτε με επαγωγή ότι $\left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right) \frac{1}{2^{2n}} = (-1)^n \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ n \end{array}\right)$) οπότε θα προκύψει

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right)\frac{1}{2^{2n}}x^{2n} + \cdots, \quad \text{για } |x| < 1$$

και λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο και να σχηματίσουμε την σειρά Taylor της $\arcsin x$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots, \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

• Έστω $f(x) = e^{x^2}$. Θα υπολογίσουμε την $f^{(n)}(0)$ για $n = 0, 1, \cdots$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά μιας συνάρτησης είναι μοναδικό και είναι ίσο με την σειρά Taylor της συνάρτησης (δες πόρισμα 12).

Η σειρά Taylor γύρω από το 0 της δοσμένης συνάρτησης είναι της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Επειδή είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τις παραγώγους της συνάρτησης αυτής, θα υπολογίσουμε την σειρά Taylor χρησιμοποιώντας την μορφή της σειράς της e^x. Εφόσον

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{ομοιόμορφα για } x \in \mathbb{R}$$

αντικαθιστώντας όπου x το x^2 θα προκύψει

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, \quad \text{ομοιόμορφα για } x \in \mathbb{R}$$

Όμως

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\cdots(2n)}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n!} x^n$$

όπου

$$g_n = \begin{cases} 0, & \text{όταν } n = 2k+1 \\ (k+1)\cdot(k+2)\cdots(k+k), & \text{όταν } n = 2k \end{cases}$$

Λόγω του πορίσματος 12 θα πρέπει να ισχύει ότι

$$f^{(n)}(0) = g_n$$

ή αλλιώς $f^{(2n+1)}(0) = 0$ και $f^{(2n)}(0) = (n+1)\cdots(2n) = \frac{(2n)!}{n!}$ για $n = 0, 1, \cdots$.

• Θα υπολογίσουμε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k^n}, \quad k > 1$$

Επειδή

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

έχουμε ότι

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad |x| < 1$$

Διαλέγοντας $x = \frac{1}{k}$ έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k^n} = \frac{k}{(k-1)^2}$$

• Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+x^3} dx$$

με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Για $|x| < 1$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

και συνεπώς

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$$

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο και να πάρουμε

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+x^3}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{3n+1}$$

Επειδή είναι εναλλάσσουσα σειρά, για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με την απαιτούμενη ακρίβεια αρκεί να υπολογίσουμε τον μικρότερο n έτσι ώστε

$$\frac{1}{(3n+1)(3^{3n+1})} < 10^{-3}$$

Έπειτα θα προσθέσω τους n πρώτους όρους της εναλλάσσουσας σειράς.

• Θα υπολογίσουμε το $\arctan\frac{1}{2}$ με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων. Επειδή

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

έχουμε ότι

$$\arctan\frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$$

Λόγω του ότι η σειρά είναι εναλλάσσουσα θα υπολογίσουμε το μικρότερο n τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} < 10^{-2}$$

Έπειτα, ως γνωστό, θα αθροίσουμε τους n πρώτους όρους της σειράς.

• Θα υπολογίσουμε την σειρά Taylor των συναρτήσεων $\sinh x$ και $\cosh x$. Επειδή

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

και

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

έχουμε ότι

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $(-M, M)$ επομένως μπορούμε να παραγωγίσουμε όρο προς όρο για να πάρουμε την σειρά Taylor της $\sinh x$. 'ρα

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

• Θα υπολογίσουμε την σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = 2^x$. Επειδή $2^x = e^{x\ln 2}$ έχουμε ότι

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n$$

$\square$

[Η Στοχαστική Διαδικασία Poisson]Η Στοχαστική Διαδικασία **Poisson**

Υποθέστε ότι μελετούμε την άφιξη πελατών σε ένα κατάστημα καταγράφοντας τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δυο αφίξεων. Ο χρόνος αυτός είναι προφανώς μια τυχαία μεταβλητή η τιμή της οποίας εξαρτάται από πολλούς παράγοντες τους οποίους δεν μπορούμε να καταγράψουμε και να αξιολογήσουμε. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουν έρθει 10 πελάτες στο κατάστημα μετά από 30 λεπτά παρατήρησης;

Γενικά υπάρχουν πολλά φαινόμενα (φυσική, οικονομικά κ.α.) τα όποια έχουν παρόμοια συμπεριφορά. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το μαθηματικό πρόβλημα που προκύπτει από τα φαινόμενα αυτά. Θα περιγράψουμε την κατασκευή της στοχαστικής διαδικασίας Poisson και θα μελετήσουμε βασικές της ιδιότητες. Πρόκειται για την απλούστερη διαδικασία συνεχούς χρόνου με άπειρες καταστάσεις η οποία φαίνεται να μοντελοποιεί καλά τέτοιου είδους φαινόμενα.

Στην επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε την εκθετική κατανομή η οποία διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κατασκευή της διαδικασίας Poisson.

1 Η Εκθετική κατανομή

ΟΡΙΣΜΟΣ 14 (Εκθετική Κατανομή) *Θα λέμε ότι μια απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την* **εκθετική κατανομή παραμέτρου** $\lambda > 0$ *αν η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από*

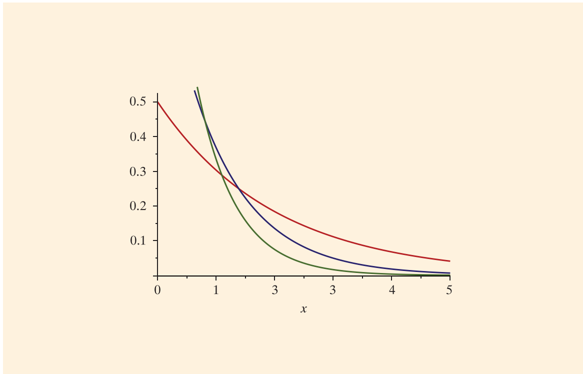
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \textit{όταν } x \geq 0 \\ 0, & \textit{όταν } x < 0 \end{cases}$$

Όταν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή τότε η συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ δίνεται από την

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε την μέση τιμή μιας τέτοιας τυχαίας μεταβλητής. Πράγματι,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$



Σχήμα 4: Τα γραφήματα της συνάρτησης πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Με κόκκινο είναι για $\lambda = 0.5$ με μπλε για $\lambda = 1$ και με πράσινο για $\lambda = 1.5$.

Παρόμοια, η μέση τιμή του τετραγώνου είναι

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

και συνεπώς $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Στην συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό των **χωρίς μνήμη** τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμος 15 *Θα λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X έχει την ιδιότητα* **έλλειψης μνήμης** *αν*

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s), \qquad \text{για κάθε } s, t \geq 0 \tag{4}$$

Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 16 *Η απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή X με $P(X > 0) = 1$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda > 0$* **ανν** *είναι τυχαία μεταβλητή με την ιδιότητα έλλειψης μνήμης.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η σχέση 4 είναι ισοδύναμη με την

$$P(X > s + t) = P(X > s) \cdot P(X > t), \qquad \text{για κάθε } s, t \geq 0$$

. (Ευθύ) Έστω ότι η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Θα αποδείξουμε τότε ότι έχει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης ή αλλιώς ικανοποιεί την παραπάνω ισότητα.

Έχουμε ότι, για $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(X > t) &= 1 - P(X \leq t) = e^{-\lambda t} \\ P(X > s) &= 1 - P(X \leq s) = e^{-\lambda s} \\ P(X > s + t) &= 1 - P(X \leq s + t) = e^{-\lambda(s+t)} \end{aligned}$$

άρα

$$P(X > s) \cdot P(X > t) = e^{-\lambda(s+t)} = P(X > s + t)$$

και επομένως είναι μια τυχαία μεταβλητή που έχει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης.

. (**Αντίστροφο**) Έστω X μια απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία έχει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης ή αλλιώς ικανοποιεί την σχέση

$$P(X > s+t) = P(X > s) \cdot P(X > t), \quad \text{για κάθε } s, t \geq 0$$

Θα αποδείξουμε καταρχάς ότι δεν υπάρχει $s \geq 0$ τ.ω. $P(X > s) = 0$. Αν υπάρχει συμβολίζουμε με s^* το μικρότερο από αυτά και επιπλέον συμπεραίνουμε ότι $P(X > s) = 0$ για κάθε $s \geq s^*$. Όμως $P(X > s)P(X > t) > 0$ για κάθε $s, t \in (0, s^*)$. Διαλέγοντας κατάλληλα τα s, t έτσι ώστε $s, t \in (0, s^*)$ και $s+t > s^*$ προκύπτει άτοπο με την υπόθεση ότι ικανοποιεί την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης.

Θέτουμε $g(x) = P(X > x)$ η οποία είναι συνεχής συνάρτηση (δες άσκηση ;;). Η παραπάνω σχέση γίνεται

$$g(s+t) = g(s) \cdot g(t)$$

Από την άσκηση ;;, και εφόσον η g είναι πάντοτε θετική ως πιθανότητα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει σταθερά

$c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$g(x) = e^{cx}$$

Επειδή όμως η συνάρτηση $g(x) = P(X > x)$ είναι φθίνουσα έπεται ότι η σταθερά c πρέπει να είναι αρνητική ή αλλιώς

$$g(x) = e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

δηλαδή η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda > 0$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 17 *Έστω $x_1, \cdots, x_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ. Αποδείξτε ότι η $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους n και λ, δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας της S_n είναι η*

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{όταν } t \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ. Θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση ;; καθώς και επαγωγή. Για $n = 1$ είναι προφανές ότι ισχύει αφού

$$f_{S_1} = f_{x_1}$$

ενώ η x_1 εκ κατασκευής ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο n και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Έχουμε ότι, λόγω ανεξαρτησίας των S_n και x_{n+1} (δες παρατήρηση ;;),

$$\begin{aligned} f_{S_{n+1}}(z) &= f_{S_n + x_{n+1}}(z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_{n+1}}(x) f_{S_n}(z-x)dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} f_{S_n}(z-x)dx \\ &= \int_{0}^{z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}dx \\ &= \lambda^{n+1} e^{-\lambda z} \int_{0}^{z} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx \\ &= \lambda^{n+1} e^{-\lambda z} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

2 Κατασκευή της Διαδικασίας Poisson

Σχήμα 5: Simeon Poisson (1781-1840)

Έστω $x_1, x_2, \cdots$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες αναπαριστούν τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δυο γεγονότων. Είναι συνηθισμένο στην πράξη οι τυχαίες αυτές μεταβλητές να ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ επομένως είναι λογικό να κάνουμε αυτή την υπόθεση και στην μαθηματική μας μελέτη.

Συμβολίζουμε με

$$S_n = x_1 + \cdots + x_n$$

τον συνολικό χρόνο μέχρι το n-οστό γεγονός. Θέτουμε επίσης $S_0 = 0$.

Ορισμος 18 *Θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ με $t \geq 0$ είναι μια διαδικασία Poisson αν*

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$$

όπου $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ όπου $x_1, \cdots, x_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ.

Διαπιστώνουμε ότι ο ρόλος της $N(t)$ είναι να μετρά το πλήθος των γεγονότων που έχουν συμβεί μέχρι τον χρόνο t (και στην βιβλιογραφία είναι γνωστή ως απαριθμήτρια). Είναι προφανές ότι για κάθε t πρόκειται για μια τυχαία μεταβλητή (εξαρτάται από πολλούς παράγοντες τους οποίους δεν μπορούμε να αξιολογήσουμε) συνεπώς έχουμε να κάνουμε με μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με δείκτη το t ο οποίος «τρέχει» σε όλο το $\mathbb{R}^+$.

Παραδειγμα 19 *Σε ένα παιχνίδι ποδοσφαίρου έχει με-*

τρηθεί ότι οι χρόνοι που σημειώνονται τέρματα ακολουθούν μια διαδικασία Poisson και κατά μέσο όρο σημειώνεται ένα τέρμα κάθε 15 λεπτά (δηλαδή $\lambda = \frac{1}{15}$).

Σε 90 λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα να σημειωθεί τέταρτο τέρμα στα τελευταία πέντε λεπτά του αγώνα; Η πιθανότητα αυτή είναι η $P(85 < S_4 \leq 90) = \int_{85}^{90} f_{S_4}(t)dt = \int_{85}^{90} \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^3}{3!}dt$.

Δεδομένου ότι σημειώνονται τουλάχιστον τρία τέρματα, ποιος είναι , κατά μέσο όρο, ο χρόνος που σημειώνεται το τρίτο τέρμα; Η ποσότητα που ψάχνουμε είναι η $\mathbb{E}(S_3|S_3 < 90) = \frac{\mathbb{E}(S_3\mathbb{I}_{\{S_3<90\}})}{P(S_3<90)} = \frac{\int_0^{90} t f_{S_3}(t)dt}{\int_0^{90} f_{S_3}(t)dt}$. □

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε την στοχαστική αυτή διαδικασία και θα εξηγήσουμε γιατί την ονομάσαμε διαδικασία Poisson.

Ορισμος 20 *Μια τυχαία μεταβλητή X θα λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson παραμέτρου $a > 0$ αν*

$$P(X = n) = e^{-a}\frac{a^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \cdots ,$$

Το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε είναι το επόμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 21 *Η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson παραμέτρου λt, δηλαδή*

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηρήστε ότι τα ενδεχόμενα $\{N(t) < n\}$ και $\{S_n > t\}$ είναι ίσα. Έτσι έχουμε ότι

$$P(N(t) = n) = P(N(t) < n+1) - P(N(t) < n) = P(S_{n+1} > t) - P(S_n > t)$$

Χρησιμοποιώντας την άσκηση 17 και έπειτα ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει ότι

$$P(S_{n+1} > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}ds = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_t^\infty e^{-\lambda s}s^n ds$$

Θέτουμε

$$I_n = \int_t^\infty e^{-\lambda s}s^n ds$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_n &= \int_t^{\infty} e^{-\lambda s} s^n ds \\ &= \int_t^{\infty} \left(-\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda} \right)' s^n ds \\ &= \left[-\frac{e^{-\lambda s} s^n}{\lambda} \right]_t^{\infty} + \frac{n}{\lambda} I_{n-1} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} t^n}{\lambda} + \frac{n}{\lambda} I_{n-1} \end{aligned}$$

Εύκολα υπολογίζουμε το I_0 το οποίο είναι $I_0 = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$. Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$I_n = \frac{n!}{\lambda^{n+1}} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Για $n = 1$ διαπιστώνουμε ότι ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n - 1$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για

n. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{e^{-\lambda t}t^n}{\lambda} + \frac{n}{\lambda} I_{n-1} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}t^n}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\left(\frac{(n-1)!}{\lambda^n} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) \\ &= \frac{n!}{\lambda^{n+1}} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$P(S_{n+1} > t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \tag{5}$$

Εφόσον $P(N(t) = n) = P(S_{n+1} > t) - P(S_n > t)$ εύκολα καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. □

ΑΣΚΗΣΗ 22 *Υπολογίστε την μέση τιμή της* $N(t)$.

ΛΥΣΗ. Γνωρίζουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson παραμέτρου λt. Συνεπώς ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(N(t)=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= \lambda t e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \lambda t e^{-\lambda t}e^{\lambda t} \\ &= \lambda t\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$. □

2.1 Η διαδικασία Poisson έχει στάσιμες προσαυξήσεις

Θα μελετήσουμε τις προσαυξήσεις $N(t+s) - N(t)$ δηλαδή την στοχαστική διαδικασία $M(s) = N(t+s) -$

$N(t)$ για δεδομένο και σταθερό $t > 0$. Θέτουμε

$$x_1^t = S_{N(t)+1} - t, \quad x_n^t = x_{N(t)+n}, \quad n = 2, 3, \cdots ,$$

Επειδή η $N(t)$ μετρά το πλήθος των αλμάτων μέχρι τον χρόνο t έπεται ότι ο χρόνος $S_{N(t)}$ είναι μικρότερος ή ίσος από τον χρόνο t αλλά και ο χρόνος $S_{N(t)+1}$ είναι μεγαλύτερος του t. Στην συνέχεια θέτουμε

$$\begin{aligned} S_n^t &= x_1^t + \cdots + x_n^t \\ N^t(s) &= \max\{n : S_n^t \leq s\} \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 23 *Ισχύει ότι*

$$N^t(s) = N(t+s) - N(t)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} S_n^t &= x_1^t + \cdots + x_n^t \\ &= S_{N(t)+1} - t + x_{N(t)+2} + \cdots + x_{N(t)+n} \\ &= S_{N(t)+n} - t \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} N^t(s) &= \max\{n : S_n^t \leq s\} \\ &= \max\{n : S_{N(t)+n} \leq t+s\} \\ &= \max\{n : S_n \leq t+s\} - N(t) \\ &= N(t+s) - N(t) \end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 24 (Ανανέωση της διαδικασίας Poisson) *Οι τυχαίες μεταβλητές x_i^t για $i = 1, \cdots, n$ ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ανεξάρτητα της επιλογής του χρόνου t. Επιπλέον είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Συνεπώς η στοχαστική διαδικασία $N^t(s)$ είναι επίσης μια διαδικασία Poisson.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα εξετάσουμε πρώτα την τυχαία μεταβλητή x_1^t. Το ενδεχόμενο $\{x_1^t > s\}$ γράφεται ως εξής

$$\{x_1^t > s\} = \{x_1 > t+s\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\{S_n < t\} \cap \{S_{n+1} > t+s\} \right) \right) \quad (6)$$

όπου όλα τα ενδεχόμενα στο δεξί μέλος είναι ανά δύο ξένα. Πράγματι, υπάρχουν αρχικά δυο περιπτώσεις. Η μια περίπτωση είναι το x_1 να βρίσκεται δεξιά του t. Σε αυτή την περίπτωση

$$\{x_1^t > s\} = \{x_1 > t + s\}$$

Η δεύτερη περίπτωση είναι το x_1 να βρίσκεται αριστερά του t. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν δυο περιπτώσεις. Η μια είναι το $x_1 + x_2$ να είναι δεξιά του t και η άλλη αριστερά του t. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\{x_1^t > s\} = \{x_1 < t\} \cap \{x_1 + x_2 > t + s\}$$

Σημειώστε ότι τα ενδεχόμενα

$$\{x_1 > t + s\} \quad \text{και} \quad \{x_1 < t\} \cap \{x_1 + x_2 > t + s\}$$

είναι ξένα μεταξύ τους. Συνεχίζοντας το σκεπτικό αυτό λαμβάνουμε την ισότητα 6.

’ρα έχουμε ότι

$$P\left(x_1^t > s\right) = P(x_1 > t + s) + \sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\{S_n < t\} \cap \{S_{n+1} > t + s\}\Big)$$

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P\Big(\{S_n < t\} \cap \{S_{n+1} > t + s\}\Big)$ θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση ;; δεσμεύοντας ως προς τις τιμές της S_n. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} & P\Big(\{S_n < t\} \cap \{S_{n+1} > t+s\}\Big) \\ = & \int_0^t P(S_{n+1} > t+s | S_n = y) \lambda^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} dy \\ = & \int_0^t P(x_{n+1} > t+s-y) \lambda^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} dy \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή x_{n+1} είναι ανεξάρτητη της S_n. Για τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας $P(A|Y=y)$ όταν η Y είναι απόλυτα συνεχής δείτε το [;].

Τελικά θα έχουμε

$$\begin{aligned} P\left(x_1^t > s\right) &= e^{-\lambda(t+x)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t+x-y)} \lambda^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} dy \\ &= e^{-\lambda(t+x)} + \int_0^t e^{-\lambda(t+x-y)} dy \\ &= e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε το ίδιο για τις τυχαίες μεταβλητές x_k^t με $k = 2, 3, \cdots ,$. Δεσμεύοντας ως προς τις τιμές της $N(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(x_k^t > s) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(x_k^t > s | N(t) = i) P(N(t) = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P(x_{i+2} > s | N(t) = i) P(N(t) = i) \end{aligned}$$

Το ενδεχόμενο $\{N(t) = i\} = \{S_i \le t\} \cap \{S_{i+1} > t\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα που παράγουν οι $x_1, \cdots, x_{i+1}$ τυχαίες μεταβλητές. Όμως η $\sigma(x_1, \cdots, x_{i+1})$ και η $\sigma(x_{i+2})$ είναι ανεξάρτητες σ-άλγεβρες συνεπώς $P(x_{i+2} > s | N(t) = i) = P(x_{i+2} > s) = e^{-\lambda s}$. 'ρα

$$P(x_k^t > s) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda s} P(N(t) = i) = e^{-\lambda s}$$

Μένει να αποδείξουμε ότι οι $x_1^t, \cdots, x_n^t$ είναι ανεξάρτητες. Ξεκινάμε με τις x_1^t και x_2^t. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& P(\{x_1^t > s_1\} \cap \{x_2^t > s_2\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{x_1^t > s_1\} \cap \{x_2^t > s_2\} \cap \{N(t) = i)\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{N(t)+1} - t > s_1\} \cap \{x_{N(t)+2} > s_2\} \cap \{N(t) = i)\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{i+1} > t + s_1\} \cap \{x_{i+2} > s_2\} \cap \{N(t) = i)\})
\end{aligned}$$

Το ενδεχόμενο $\{S_{i+1} > t + s_1\} \cap \{N(t) = i)\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα που παράγουν οι $x_1, \cdots, x_{i+1}$ συνεπώς είναι ανεξάρτητο του ενδεχομένου $\{x_{i+2} > s_2\}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
& P(\{x_1^t > s_1\} \cap \{x_2^t > s_2\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{i+1} > t + s_1\} \cap \{N(t) = i)\}) P(\{x_{i+2} > s_2\}) \\
= & e^{-\lambda s_2} \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{i+1} > t + s_1\} \cap \{N(t) = i)\})
\end{aligned}$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{i+1} > t + s_1\} \cap \{N(t) = i)\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{N(t)+1} - t > s_1\} \cap \{N(t) = i\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{x_1^t > s_1\} \cap \{N(t) = i\}) \\
= & \; e^{-\lambda s_1}
\end{aligned}
$$

Τελικά

$$P(\{x_1^t > s_1\} \cap \{x_2^t > s_2\}) = P(\{x_1^t > s_1\})P(\{x_2^t > s_2\})$$

δηλαδή οι x_1^t και x_2^t είναι ανεξάρτητες.

Υποθέτουμε ότι οι $x_1^t, \cdots, x_k^t$ είναι ανεξάρτητες και θα αποδείξουμε ότι και οι $x_1^t, \cdots, x_{k+1}^t$ είναι ανεξάρτητες.

Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1}\{x_i^t > s_i\}\right) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1}\{x_i^t > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k+1}\{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right)
\end{aligned}
$$

Το ενδεχόμενο

$$
\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k}\{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}
$$

ανήκει στην σ-άλγεβρα που παράγουν οι $x_1, \cdots, x_{k+n}$ τυχαίες μεταβλητές. Επειδή οι $x_1, \cdots, x_{k+1+n}$ είναι ανεξάρτητες έπεται ότι

$$\begin{aligned}
& P\left(\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k+1} \{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right) \\
= \; & P\left(\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k} \{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right) P(x_{k+1+n} > s_k \\
= \; & e^{-\lambda s_{k+1}} P\left(\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k} \{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right)
\end{aligned}$$

Όμως, λόγω της υπόθεσης της επαγωγής έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& P\left(\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k} \{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right) \\
= \; & P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{x_i^t > s_i\}\right) \\
= \; & \prod_{i=1}^{k} P(\{x_i^t > s_i\})
\end{aligned}$$

επομένως έχουμε αποδείξει ότι οι $x_1^t, \cdots, x_{k+1}^t$ είναι ανεξάρτητες.

Η στοχαστική διαδικασία $N^t(s)$ είναι τέτοια ώστε

$$N^t(s) = \max\{n : S_n^t \leq s\}$$

όπου $S_n^t = x_1^t + \cdots + x_n^t$. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι οι $x_1^t, \cdots, x_n^t$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ. Επομένως η $N^t(s)$ ικανοποιεί τον ορισμό 18 και συνεπώς πρόκειται για διαδικασία Poisson. □

Με ακριβώς το ίδιο σκεπτικό με το θεώρημα 21 λαμβάνουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πορισμα 25 *Η διαδικασία Poisson $N^t(s)$ είναι τέτοια ώστε*

$$P(N^t(s) = n) = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}$$

Συνεπώς κάθε προσαύξηση $N(t_{n+1}) - N(t_n)$ ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως και η $N(t_{n+1} - t_n)$.

Ορισμος 26 *Θα λέμε ότι μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ έχει* **στάσιμες προσαυξήσεις** *όταν*

$$P(X(t+s) - X(t) = k) = p_k(s) \quad \text{για κάθε } t, s \geq 0$$

όπου η ποσότητα $p_k(s)$ δεν εξαρτάται από το t.

ΠΟΡΙΣΜΑ 27 *Η διαδικασία Poisson έχει στάσιμες προσαυξήσεις.*

2.2 Η διαδικασία Poisson έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

ΠΡΟΤΑΣΗ 28 *Οι τυχαίες μεταβλητές S_n^t για $n = 1, 2, \cdots$, και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς η προσαύξηση $N(t+s) - N(t)$ είναι ανεξάρτητη της $N(t)$ όταν $s > 0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι οι τυχαίες μεταβλητές x_1^t και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες. Έχουμε ότι

$$P(\{x_1^t > s\} \cap \{N(t) > k\}) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(\{x_1^t > s\} \cap \{N(t) = i\})$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\{x_1^t > s\} \cap \{N(t) = i\} &= \{S_{i+1} > t + s\} \cap \{S_i \leq t\} \cap \{S_{i+1} > t\} \\
&= \{S_i \leq t\} \cap \{S_{i+1} > t + s\} \\
&= \{S_i \leq t\} \cap \{x_{i+1} > t + s - S_i\}
\end{aligned}$$

Επομένως, δεσμεύοντας στις τιμές της S_i έχουμε

$$\begin{aligned} P(\{x_1^t > s\} \cap \{N(t) > k\}) &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} P(x_{i+1} > t + s - y) f_{S_i}(y) dy \\ &= e^{-\lambda(t+s)} \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_0^t e^{\lambda y} \lambda e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^{i-1}}{(i-1)!} dy \\ &= e^{-\lambda s} e^{-\lambda t} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \end{aligned}$$

Όμως

$$P(\{N(t) > k\}) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(N(t) = i) = e^{-\lambda t} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

επομένως προκύπτει ότι

$$P(\{x_1^t > s\} \cap \{N(t) > k\}) = P(\{x_1^t > s\}) P(\{N(t) > k\})$$

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές S_n^t και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες και θα αποδείξουμε ότι και οι S_{n+1}^t και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες.

Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& P(\{S_{n+1}^t > s\} \cap \{N(t) > k\}) \\
= & \sum_{i=k+1}^{\infty} P(\{S_{i+n+1} > t+s\} \cap \{N(t) = i\} \\
= & \sum_{i=k+1}^{\infty} P(\{S_{i+n} > t+s-x_{i+n+1}\} \cap \{N(t) = i\}) \\
= & \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_0^{\infty} P(\{S_{i+n} > t+s-y\} \cap \{N(t) = i\} | x_{i+n+1} = y) \lambda e^{-\lambda y} dy
\end{aligned}
$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
& P(\{S_{i+n} > t+s-y\} \cap \{N(t) = i\} | x_{i+n+1} = y) \\
= & P(\{S_{i+n} > t+s-y\} \cap \{N(t) = i\})
\end{aligned}
$$

Αυτό ισχύει επειδή το ενδεχόμενο $\{S_{i+n} > t+s-y\} \cap \{N(t) = i\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα των $x_1, \cdots, x_{i+n}$ τυχαίων μεταβλητών η οποία είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας της x_{i+n+1}. Επίσης λόγω της υπόθεσης της επαγωγής έχουμε ότι

$$P(\{S_n^t > s\} \cap \{N(t) = i\}) = P(\{S_n^t > s\})P(\{N(t) = i\})$$

αλλά και

$$P(\{S_n^t > s\} \cap \{N(t) = i\}) = P(\{S_{i+n} > t + s\} \cap \{N(t) = i\})$$

άρα

$$P(\{S_{i+n} > t + s\} \cap \{N(t) = i\}) = P(\{S_n^t > s\})P(\{N(t) = i\})$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_0^{\infty} P(\{S_{i+n} > t + s - y\} \cap \{N(t) = i\} | x_{i+n+1} = y) \lambda e^{-\lambda y} dy \\
= & \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_0^{\infty} P(\{S_n^t > s - y\}) P(\{N(t) = i\}) \lambda e^{-\lambda y} dy \\
= & \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_0^{\infty} P(\{S_n^t > s - y\} | x_{n+1}^t = y) P(\{N(t) = i\}) \lambda e^{-\lambda y} dy \\
= & \sum_{i=k+1}^{\infty} P(\{N(t) = i\}) \int_0^{\infty} P(\{S_{n+1}^t > s\} | x_{n+1}^t = y) \lambda e^{-\lambda y} dy \\
= & \sum_{i=k+1}^{\infty} P(\{N(t) = i\}) P(\{S_{n+1}^t > s\}) \\
= & \; P(\{S_{n+1}^t > s\}) P(\{N(t) > k\})
\end{aligned}$$

Τώρα είναι εύκολο να δούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $N^t(s)$ και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες. Το ενδεχόμενο $\{N^t(s) \leq l\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα που παράγει η S^t_{l+1} η οποία είναι ανεξάρτητη από την σ-άλγεβρα που παράγει η $N(t)$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 29 *Έστω $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ και έστω $N(t)$ μια διαδικασία Poisson. Τότε οι προσαυξήσεις*

$$N(t_n) - N(t_{n-1}), N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}), \cdots, N(t_1)$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για οποιαδήποτε επιλογή χρόνων $t_1, \cdots, t_n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $n = 2$ πρέπει να αποδείξουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές

$$N(t_2) - N(t_1) \quad \text{και} \quad N(t_1)$$

είναι ανεξάρτητες. Όμως $N^{t_1}(t_2 - t_1) = N(t_2) - N(t_1)$ η οποία είναι ανεξάρτητη της $N(t_1)$ (δες πρόταση 28). Υποθέτουμε ότι ισχύει για οποιαδήποτε $n-1$ σημεία. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για n σημεία. Σχηματίζουμε την πιθανότητα

$$P\left(\{N(t_n) - N(t_{n-1}) \geq l_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) \geq l_1\}\right)$$

Παρατηρήστε ότι, εφόσον

$$N(t_{n-1}) = \underbrace{N(t_1)}_{Z_1} + \underbrace{N(t_2) - N(t_1)}_{Z_2} + \cdots + \underbrace{N(t_{n-1}) - N(t_{n-2})}_{Z_{n-1}}$$

έχουμε ότι

$$\{N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}) \geq l_{n-1}\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) \geq l_1\} \in \sigma(N(t_{n-1}))$$

δείτε σχετικά λήμμα ;; και παρατήρηση ;;. Επειδή $\{N(t_n) - N(t_{n-1}) \geq l_n\} \in \sigma(N^{t_{n-1}}(t_n - t_{n-1}))$ και επειδή οι $N^{t_{n-1}}(t_n - t_{n-1})$ και $N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες έπεται ότι

$$\begin{aligned} & P\left(\{N(t_n) - N(t_{n-1}) \geq l_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) \geq l_1\}\right) \\ = \; & P(\{N(t_n) - N(t_{n-1}) \geq l_n\}) \\ & \times P(\{N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}) \geq l_{n-1}\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) \geq l_1\}) \end{aligned}$$

Το ζητούμενο προκύπτει τώρα από την υπόθεση της επαγωγής. $\square$

2.3 Η διαδικασία Poisson είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα

Πρόταση 30 *Έστω $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Τότε*

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_n) = k_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \ & p(t_1, k_1) \cdot p(t_2 - t_1, k_2 - k_1) \cdots p(t_n - t_{n-1}, k_n - k_{n-1}) \end{aligned}$$

όπου $p(t,k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$.

Απόδειξη. Για δυο χρόνους, τους $0 < t_1 < t_2$, έχουμε

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_2) = k_2\} \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \ & P(\{N(t_2) = k_2\} | \{N(t_1) = k_1\}) \cdot P(\{N(t_1) = k_1\}) \\ = \ & P(\{N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\} | \{N(t_1) = k_1\}) \cdot P(\{N(t_1) = k_1\}) \\ = \ & P(\{N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\}) \cdot P(\{N(t_1) = k_1\}) \\ = \ & p(t_2 - t_1, k_2 - k_1) \cdot p(t_1, k_1) \end{aligned}$$

Έστω ότι ισχύει για τους χρόνους $0 < t_1 < \cdots < t_n$, δηλαδή

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_n) = k_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \ & p(t_1, k_1) \cdot p(t_2 - t_1, k_2 - k_1) \cdots p(t_n - t_{n-1}, k_n - k_{n-1}) \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τους χρόνους $0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_{n+1}) = k_{n+1}\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & P(\{N(t_{n+1}) = k_{n+1}\} | \{N(t_n) = k_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ & \times P(\{N(t_n) = k_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_{n+1}) = k_{n+1}\} | \{N(t_n) = k_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & P(B_{n+1} | B_n \cap \cdots \cap B_1) \\ = \; & P(\{N(t_{n+1} - N(t_n) = k_{n+1} - k_n\}) \\ = \; & p(t_{n+1} - t_n, k_{n+1} - k_n) \end{aligned}$$

όπου $B_i = \{N(t_i) - N(t_{i-1}) = k_i - k_{i-1}\}$ για $i = 1, 2, \cdots, n+1$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. $\square$

Με το επόμενο πόρισμα αποδεικνύουμε στην πραγματικότητα ότι η διαδικασία Poisson είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ 31 *Έστω οι χρόνοι* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

Τότε

$$
\begin{aligned}
& P(\{N(t_n) = k_n\}|\{N(t_{n-1} = k_{n-1}\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\
= \; & P(\{N(t_n) = k_n\}|\{N(t_{n-1} = k_{n-1}\})
\end{aligned}
$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& P(\{N(t_n) = k_n\}|\{N(t_{n-1} = k_{n-1}\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\
= \; & \frac{p(t_1, k_1) \cdot p(t_2 - t_1, k_2 - k_1) \cdots p(t_n - t_{n-1}, k_n - k_{n-1})}{p(t_1, k_1) \cdot p(t_2 - t_1, k_2 - k_1) \cdots p(t_{n-1} - t_{n-2}, k_{n-1} - k_{n-2})} \\
= \; & p(t_n - t_{n-1}, k_n - k_{n-1}) \\
= \; & P(\{N(t_n) = k_n\}|\{N(t_{n-1} = k_{n-1}\})
\end{aligned}
$$

□

Σε πλήρη αντιστοιχία με τον ορισμό της διακριτής Μαρκοβιανής αλυσίδας (ορισμός ;;) δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμος 32 *Έστω μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ συνεχούς χρόνου με διακριτό σύνολο καταστάσεων. Θα λέμε ότι είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα όταν*

$$
\begin{aligned}
& P(\{X(t_n) = k_n\}|\{X(t_{n-1} = k_{n-1}\} \cap \cdots \cap \{X(t_1) = k_1\}) \\
= \; & P(\{X(t_n) = k_n\}|\{X(t_{n-1} = k_{n-1}\})
\end{aligned}
$$

για $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *ένα οποιοδήποτε σύνολο χρόνων και* $k_1, \cdots, k_n$ *οποιεσδήποτε καταστάσεις της διαδικασίας.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 33 *Η διαδικασία Poisson είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!} & \cdots \\ 0 & e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

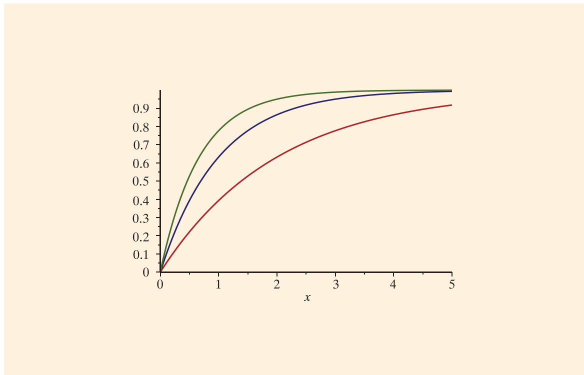
Τα στοιχεία του πίνακα $P(t)$ *είναι τέτοια ώστε*

$$P_{ij}(t) = P(\{N(t_0+t) = j\}|\{N(t_0) = i\}) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{όταν } i \le j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για οποιαδήποτε $t, t_0 \geq 0$.

$\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 34 (Περί Περιοδικότητας) *Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι δεν έχει νόημα να ορίσουμε*



Σχήμα 6: Τα γραφήματα της συνάρτησης κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Με κόκκινο είναι για $\lambda = 0.5$ με μπλε για $\lambda = 1$ και με πράσινο για $\lambda = 1.5$.

την έννοια της περιόδου σε μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου.

2.4 Η διαδικασία Poisson είναι martingale

Κάθε τυχαία μεταβλητή $N(t)$ παράγει μια σ-άλγεβρα, την $\sigma(N(t))$ την οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_t$. Είναι φανερό ότι $\sigma(N(s)) \subseteq \sigma(N(t) = N(s) + N(t) - N(s))$ για $0 < s \leq t$. Κάθε οικογένεια σ-αλγεβρών η οποία είναι τέτοια ώστε $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ όταν $s < t$ ονομάζεται φίλτρο. Επίσης, αν μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ είναι

$\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη, όπου $\mathcal{F}_t$ φίλτρο, τότε λέμε ότι η $X(t)$ είναι προσαρμοσμένη στο φίλτρο $\mathcal{F}_t$. Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές $N(t) - N(s)$ και $N(s)$ είναι ανεξάρτητες έπεται ότι η $N(t) - N(s)$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$.

Ορισμος 35 *Μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ είναι martingale αν $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ και για κάθε $s < t$ έχουμε ότι $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.*

Θεωρημα 36 *Η στοχαστική διαδικασία $N(t) - \lambda t$ είναι martingale ως προς το φίλτρο που παράγει η διαδικασία Poisson.*

Αποδειξη. Το φίλτρο $\mathcal{F}_t = \sigma(N(t))$ είναι (εκ κατασκευής) τέτοιο ώστε η $N(t)$ να είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη. Επίσης

$$\mathbb{E}(N(t)) = \lambda t < \infty$$

Μένει να αποδείξουμε ότι

$$\mathbb{E}(N(t) - \lambda t|\mathcal{F}_s) = N(s) - \lambda s$$

όταν $s \leq t$.

Όμως

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(N(t) - \lambda t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(N(t) - N(s) + N(s) - \lambda t | \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(N(t) - N(s) | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(N(s) - \lambda t | \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(N(t) - N(s)) + N(s) - \lambda t \\
&= \lambda(t - s) + N(s) - \lambda t \\
&= N(s) - \lambda s
\end{aligned}
$$

$\square$

3 Ισοδύναμοι ορισμοί της διαδικασίας Poisson

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τρεις ακόμη ορισμούς της διαδικασίας Poisson που εμφανίζονται συχνά στην βιβλιογραφία. Θα αποδείξουμε ότι και οι τέσσερις ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Έτσι, σε εφαρμογές μπορούμε να χρησιμοποιούμε όποιον από τους ορισμούς θέλουμε ανάλογα με το τι είναι βολικότερο κάθε φορά.

ΟΡΙΣΜΟΣ 37 (Δεύτερος ορισμός διαδικασίας Poisson)
Η στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ *λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson παραμέτρου* $\lambda > 0$ *αν*

(i) $N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *για κάθε* $t \geq 0$ *και* $N(0) = 0$,

(ii) *η διαδικασία έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις,*

(iii) $P(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$,

(iv) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$

όπου $o(h)$ *είναι μια ποσότητα τέτοια ώστε* $\lim_{h \to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 38 (Τρίτος ορισμός διαδικασίας Poisson) *Η στοχαστική διαδικασία* $\{N(t), t \geq 0\}$ *λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson παραμέτρου* $\lambda > 0$ *αν*

(i) $N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *για κάθε* $t \geq 0$ *και* $N(0) = 0$,

(ii) *η διαδικασία έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις,*

(iii) $P(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}$ *για* $n = 0, 1, \cdots$, *για κάθε* $s, t \geq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 39 (Τέταρτος ορισμός διαδικασίας Poisson) *Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου* $\{N(t), t \geq 0\}$ *με* $N(0) = 0$ *θα λέγεται διαδικασία Poisson παραμέτρου* λ *αν το σύνολο καταστάσεων είναι το* $\mathbb{N} \cup \{0\}$ *και ο πίνακας μετάβασης είναι ο*

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!} & \cdots \\ 0 & e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Τα στοιχεία του πίνακα $P(t)$ *είναι τέτοια ώστε*

$$P_{ij}(t) = P(\{N(t_0 + t) = j\} | \{N(t_0) = i\}) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{όταν } i \leq j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για οποιαδήποτε $t, t_0 \geq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 40 *Οι ορισμοί 37 και 38 είναι ισοδύναμοι.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 37. Θέτουμε $M(s) = N(t+s) - N(t)$ για $s, t \geq 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της τυχαίας μεταβλητής $M(s+h)$ για $s, h \geq 0$ (δες ορισμό ;;). Ο μετασχηματισμός είναι η συνάρτηση

$$\phi_{M(s+h)}(u) = \mathbb{E}\left(e^{iuM(s+h)}\right)$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την συνάρτηση $\phi_{M(s)}(u)$ (χαρακτηριστική συνάρτηση).

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_{M(s+h)}(u) &= \mathbb{E}\left(e^{iuM(s+h)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{iuM(s)}\right) \cdot \mathbb{E}\left(e^{iu(M(s+h)-M(s))}\right) \\ &= \phi_{M(s)}(u) \cdot \phi_{M(s+h)-M(s)}(u) \end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{\phi_{M(s+h)}(u) - \phi_{M(s)}(u)}{h} = \phi_{M(s)}(u) \frac{\phi_{M(s+h)-M(s)} - 1}{h}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
& \phi_{M(s+h)-M(s)} - 1 \\
= \ & \mathbb{E}\left(e^{iu(M(s+h)-M(s))}\right) - 1 \\
= \ & \mathbb{E}\left(e^{iu(M(s+h)-M(s))}\mathbb{I}_{M(s+h)-M(s)=0}\right) \\
& + \mathbb{E}\left(e^{iu(M(s+h)-M(s))}\mathbb{I}_{M(s+h)-M(s)=1}\right) - 1 \\
= \ & P(M(s+h)-M(s)=0) + e^{iu}P(M(s+h)-M(s)=1) - 1 \\
= \ & \lambda h(e^{iu} - 1)
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\frac{\left(\phi_{M(s)}(u)\right)'_s}{\phi_{M(s)}(u)} = \lambda(e^{iu} - 1)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς s (δείτε την ποσότητα $\phi_{M(s)}(u)$ ως συνάρτηση δυο μεταβλητών, των u, s) έχουμε ότι

$$\phi_{M(s)}(u) = e^{\lambda s(e^{iu}-1)}$$

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $M(s)$ από το θεώρημα ;;. Όμως θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο λs και θα διαπιστώσουμε ότι συμπίπτουν. Έχουμε

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{iuX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda s} \sum_{k=0}^{\infty}$$

Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι αντιστρέψιμος προκύπτει τελικά ότι η $M(s)$ είναι τέτοια ώστε

$$P(M(s) = N(t+s) - N(t) = n) = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}, \quad \text{για} \quad n = 0, 1, \cdots,$$

Αυτό σημαίνει ότι αν η $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 37 τότε θα ικανοποιεί και τον ορισμό 38.

Αντίστροφα, αν η $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 38 τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(N(t+h) - N(t) = 0) &= \quad e^{-\lambda h} \quad = 1 - \lambda h + o(h) \\ P(N(t+h) - N(h) = 1) &= \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σειρά Taylor της εκθετικής συνάρτησης. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 41 *Οι ορισμοί 38 και 18 είναι ισοδύναμοι.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν μια στοχαστική διαδικασία ικανοποιεί τον ορισμό 18 έχουμε ήδη αποδείξει ότι ικανοποιεί και τον ορισμό 38.

Αντίστροφα, αν μια στοχαστική διαδικασία ικανοποιεί τον ορισμό 38 θα αποδείξουμε ότι ικανοποιεί και τον ορισμό 18. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots$, οι οποίες παριστούν τους χρόνους μεταξύ δυο αλμάτων της στοχαστικής διαδικασίας $N(t)$. Προφανώς ισχύει ότι

$$\{N(t) = n\} = \{x_1 + \cdots + x_n \leq t\} \cap \{x_1 + \cdots + x_{n+1} > t\}$$

Επίσης ισχύει ότι

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$$

όπου $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Για να ικανοποιεί η $N(t)$ τον ορισμό 18 θα πρέπει να αποδείξουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ.

Προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 \\ S_2 &= x_1 + x_2 \\ &\vdots \\ S_n &= x_1 + \cdots + x_n \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν η από κοινού πυκνότητα των $S_1, \cdots, S_n$ είναι η $f_S(s_1, \cdots, s_n)$ τότε η από κοινού πυκνότητα των $x_1, \cdots, x_n$ είναι η

$$f_X(t_1, \cdots, t_n) = f_S(t_1, t_1 + t_2, \cdots, t_1 + \cdots + t_n)$$

αφού η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι ίση με την μονάδα.

Επομένως μένει να υπολογίσουμε την από κοινού πυκνότητα των $S_1, \cdots, S_n$. Αν $F_S(s_1, \cdots, s_n)$ είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $S_1, \cdots, S_n$ τότε η μεικτή παράγωγος $\frac{\partial F_S(s_1, \cdots, s_n)}{\partial s_1, \cdots, s_n}$ θα είναι ίση με την από κοινού πυκνότητα $f_S(s_1, \cdots, s_n)$. ’ρα, θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{h_1, \cdots, h_n \to 0} \frac{F_S(s_1 + h_1, \cdots, s_n + h_n) - F_S(s_1, \cdots, s_n)}{h_1 \cdot h_2 \cdots h_n}$$

Για $0 < t_1 < \cdots < t_n$ σχηματίζουμε το ενδεχόμε-
νο

$$\bigcap_{n=1}^{n} \{S_i \in (t_i, t_i + h_i)\}$$

Το ενδεχόμενο αυτό είναι ίσο με

$$\{N(t_1) = 0\} \bigcap_{i=1}^{n-1} \left(\{N(h_i) = 1\} \cap \{N(t_{i+1} - t_i + h_i) = 0\}\right) \cap \{N(h_n) \geq 1$$

’ρα

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{n} \{S_i \in (t_i, t_i + h_i)\}\right) = \lambda^{n-1} e^{-\lambda t_n} h_1 \cdots h_{n-1} (1 - e^{-\lambda h_n})$$

Η πυκνότητα f_S θα είναι το όριο

$$\lim_{h_1, \cdots, h_n \to 0} \frac{\lambda^{n-1} e^{-\lambda t_n} h_1 \cdots h_{n-1} (1 - e^{-\lambda h_n})}{h_1 \cdot h_2 \cdots h_n}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι είναι ίσο με $f_S = \lambda^n e^{-\lambda t_n}$.

’ρα τελικά

$$f_X(t_1, \cdots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda e^{-\lambda t_i} \mathbb{I}_{\{t_i > 0\}}\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι τυχαίες μεταβλητές $x_1, \cdots, x_n$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 42 *Οι ορισμοί 39 και 38 είναι ισοδύναμοι.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 38. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ήδη αποδείξει ότι ικανοποιεί και τον ορισμό 39.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 39. Θα αποδείξουμε ότι ικανοποιεί και τον ορισμό 38.

Σημειώστε ότι, εφόσον $N(0) = 0$,

$$P(\{N(t_0+t) = i\}) = P(\{N(t_0+t) = i\}|N(0) = 0) = e^{-\lambda(t+t_0)}\frac{(\lambda(t+t_0}{i!}$$

για κάθε $t, t_0 \geq 0$.

Θα μελετήσουμε την πιθανότητα

$$P(\{N(t_0+t) - N(t_0) > k\} \cap \{N(t_0) > l\})$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_0+t)-N(t_0)>k\}\cap\{N(t_0)>l\}) \\ = & \sum_{i=l+1}^{\infty} P(\{N(t_0+t)-N(t_0)>k\}\cap\{N(t_0)=i\}) \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_0+t)-N(t_0)>k\}\cap\{N(t_0)=l\}) \\ = & \sum_{j=k+1}^{\infty} P(\{N(t_0+t)-N(t_0)=j\}\cap\{N(t_0)=i\}) \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_0+t)-N(t_0)=j\}\cap\{N(t_0)=i\}) \\ = & P(\{N(t_0+t)=j+i\}|\{N(t_0)=i\})\cdot P(\{N(t_0)=i\}) \\ = & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\cdot e^{-\lambda t_0}\frac{(\lambda t_0)^i}{i!} \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε

$$
\begin{aligned}
& P(\{N(t_0+t)-N(t_0)=j\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{N(t_0+t)-N(t_0)=j\}|N(t_0)=i)\cdot P(\{N(t_0)=i\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{N(t_0+t)=j+i\}|N(t_0)=i)\cdot P(\{N(t_0)=i\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\cdot P(\{N(t_0)=i\}) \\
= & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}
\end{aligned}
$$

Τελικά

$$
\begin{aligned}
& P(\{N(t_0+t)-N(t_0)>k\}\cap\{N(t_0)>l\}) \\
= & \sum_{i=l+1}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty} P(\{N(t_0+t)-N(t_0)=j\})\cdot P(\{N(t_0)=i\}) \\
= & P(\{N(t_0+t)-N(t_0)>k\})\cdot P(\{N(t_0)>l\})
\end{aligned}
$$

Παρατηρήστε ότι, για $0\le s<t$ ισχύει ότι

$$P(N(t)-N(s)=k)=P(N(t-s)=k)$$

Με ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα με το θεώρημα 29 αποδεικνύουμε ότι έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Εύκολα παρατηρούμε από τα παραπάνω ότι έχει και στάσιμες προσαυξήσεις και μάλιστα

$$P(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!} \quad \text{για} \quad n = 0, 1, \cdots,$$

για κάθε $s, t \geq 0$. Δηλαδή η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 38. □

4 Μερικές ιδιότητες της διαδικασίας Poisson

ΠΡΟΤΑΣΗ 43 *Ισχύει ότι*

$$P(S_0 < S_1 < \cdots < S_n < \cdots) = 1$$

Επιπλέον

$$P\left(\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{\lambda} <\}\right) = 1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $S_n - S_{n-1} = x_n$ και $P(\{x_n > 0\}) = e^{-\lambda\cdot 0} = 1$ βλέπουμε ότι

$$P(S_0 < S_1 < \cdots < S_n < \cdots) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x_n > 0\}\right) = 1$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την άσκηση ;;.

Εφόσον $\mathbb{E}(x_n) = \frac{1}{\lambda}$ τότε από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών προκύπτει ότι

$$P\left(\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{\lambda} <\}\right) = 1$$

$\square$

Προταση 44 *Ισχύει ότι*

$$P\left(\{\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda\}\right) = 1$$

Αποδειξη. Έχουμε ότι

$$N(n) = N(1) + (N(2) - N(1)) + \cdots + (N(n) - N(n-1))$$

όπου $N(1), N(2) - N(1), \cdots, N(n) - N(n-1)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή λ. Επομένως, από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = \lambda\right)$$

Για $n \leq t \leq n+1$ έχουμε ότι $N(n) \leq N(t) \leq N(n+1)$ επομένως

$$\frac{N(n)}{n+1} \leq \frac{N(t)}{t} \leq \frac{N(n+1)}{n}$$

Τότε καθώς $n \to \infty$ έχουμε ότι και $t \to \infty$ και επιπλέον

$$P\left(\{\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda\}\right) = 1$$

$\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 45 (Ισχυρή Μαρκοβιανή Ιδιότητα) *Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ η στοχαστική διαδικασία $N^l(t) = N(S_l + t) - l$ είναι επίσης διαδικασία Poisson παραμέτρου λ και η τυχαία μεταβλητή $N^l(t)$ είναι ανεξάρτητη των $x_1, \cdots, x_l$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} N(S_l+t) &= \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq S_l + t\} \\ &= \max\{n \in \mathbb{N} : \sum_{j=l+1}^{n} x_j \leq t\} \\ &= \max\{n \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{n-l} x_{j+l} \leq t\} \\ &= l + \max\{k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{k} x_{j+m} \leq t\} \end{aligned}$$

'ρα

$$N^l(t) = \max\{k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{k} x_{j+l} \leq t\}$$

Επομένως η $N^l(t)$ ικανοποιεί τον πρώτο ορισμό της διαδικασίας Poisson παραμέτρου λ. Είναι επίσης προφανές ότι η τυχαία μεταβλητή $N^l(t)$ είναι ανεξάρτητη των $x_1, \cdots, x_l$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 46 *Έστω $N^1(t)$ και $N^2(t)$ δυο ανεξάρτητες μεταξύ τους διαδικασίες Poisson παραμέτρων λ και*

μ αντίστοιχα. Τότε η στοχαστική διαδικασία $N(t) = N^1(t) + N^2(t)$ είναι επίσης διαδικασία Poisson παραμέτρου $\lambda + \mu$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε ότι η $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 37. Είναι προφανές ότι $N(0) = 0$ και ότι έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις δεδομένου ότι οι N^1 και N^2 είναι ανεξάρτητες.

Έχουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned}
& P(N(t+h) - N(t) = 0) \\
= \; & P(\{N^1(t+h) - N^1(t) = 0\} \cap \{N^2(t+h) - N^2(t) = 0\}) \\
= \; & P(N^1(t+h) - N^1(t) = 0) \cdot P(N^2(t+h) - N^2(t) = 0) \\
= \; & (1 - \lambda h + o(h)) \cdot (1 - \mu h + o(h)) \\
= \; & 1 - (\lambda + \mu)h + o(h)
\end{aligned}$$

'ρα η $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 37 με παράμετρο $\lambda + \mu$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 47 *Έστω $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ αντίστοιχα. Έστω $M = \min\{x_1, \cdots, x_n\}$. Τότε* *(i) Για $t > 0$ ισχύει ότι $P(M > t) = e^{-t(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}$*

(ii) Για $k = 1, \cdots, n$ ισχύει ότι $P(M = x_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$

Αποδειξη. Για την πρώτη σχέση έχουμε

$$P(M > t) = P(x_1 > t, \cdots, x_n > t) = P(x_1 > t)\cdots P(x_n > t) = e^{-t(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}$$

Για την δεύτερη ιδιότητα έχουμε όταν $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} P(M = x_k) &= P(x_1 \geq x_k, \cdots, x_n \geq x_k) \\ &= \int_0^\infty P(x_1 \geq t, \cdots, x_n \geq t | x_k = t)\lambda_k e^{-\lambda_k t} dt \\ &= \int_0^\infty P(x_1 \geq t)\cdots P(x_{k-1} \geq t)P(x_{k+1} \geq t)\cdots P(x_n \geq t)\lambda_k e^{-\lambda_k t} dt \\ &= \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \end{aligned}$$

□

Παραδειγμα 48 *Σε μια στάση λεωφορείων περνούν τρία διαφορετικά λεωφορεία με διαφορετικούς προορισμούς. Το λεωφορείο A περνά κατά μέση τιμή μια φορά στα 10 λεπτά, το B μια φορά στα 15 λεπτά και το Γ μια φορά στα 20 λεπτά.*

Όταν κανείς φτάνει στην στάση, ποια είναι η πιθανότητα να έρθει πρώτο το λεωφορείο B; Αν συμβολίσουμε με x_A, x_B, x_Γ τους χρόνους για την πρώτη άφιξη *των A,B,Γ λεωφορείων, τότε η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι η* $P(\min\{x_A, x_B, x_\Gamma\} = x_B)$. *Τότε θα ισχύει*

$$P(\min\{x_A, x_B, x_\Gamma\} = x_B) = \frac{1/15}{1/10 + 1/15 + 1/20}$$

Φτάνοντας στην στάση πόσο χρόνο, κατά μέσο όρο, θα περιμένει κάποιος μέχρι να έρθει κάποιο από τα λεωφορεία; Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η μέση τιμή της $\min\{x_A, x_B, x_\Gamma\}$. *Η τυχαία αυτή μεταβλητή ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο* $(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_\Gamma) = 1/10 + 1/15 + 1/20 = \frac{13}{60}$ *και επομένως η μέση τιμή είναι η* $\frac{60}{13}$. $\square$

Έστω ότι σε ένα φαινόμενο το οποίο μοντελοποιείται από μια διαδικασία Poisson $N(t)$ παραμέτρου λ τα γεγονότα διακρίνονται σε δυο διαφορετικά είδη. Το γεγονός τύπου I συμβαίνει με πιθανότητα $p > 0$ και άρα το γεγονός τύπου II συμβαίνει με πιθανότητα $1 - p$. Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι η διαδικασία $M(t)$ η οποία μετρά το πλήθος των γεγονότων τύπου I είναι επίσης μια διαδικασία Poisson παραμέτρου $p\lambda$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 49 *Έστω $N(t)$ μια διαδικασία Poisson παραμέτρου λ και $p \in (0,1)$ της οποίας τα γεγονότα διακρίνονται σε δυο τύπους, τους τύπους I και II. Η στοχαστική διαδικασία που μετρά τα γεγονότα τύπου I είναι μια διαδικασία Poisson παραμέτρου $p\lambda$ όταν η πιθανότητα να συμβεί γεγονός τύπου I είναι ίση με p και είναι ανεξάρτητο από το προηγούμενο γεγονός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο ορισμό της διαδικασίας Poisson, δηλαδή τον ορισμό 18.

Εφόσον η $N(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson παραμέτρου λ οι ενδιάμεσοι χρόνοι $x_1, x_2, \cdots$, μεταξύ δυο γεγονότων ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ. Συμβολίζουμε τους ενδιάμεσους χρόνους της διαδικασίας $M(t)$ με $x_1^M, x_2^M, \cdots$, Από τις υποθέσεις προκύπτει ότι πρόκειται για μια ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και μένει να αποδείξουμε ότι ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου $p\lambda$. Παρατηρήστε ότι κάθε τέτοια τυχαία μεταβλητή είναι της μορφής $x^M = x_{l+1} + x_{l+2} + \cdots + x_{l+k} + x_{l+k+1}$ όταν τα $l, l+k+1$ γεγονότα είναι τύπου I και τα γεγονότα $l+1, l+2, \cdots, l+k$ είναι γεγονότα τύπου II.

Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μιας από τις τυχαίες μεταβλητές $x_1^M, x_2^M, \cdots,$ Συμβολίζουμε με B_k το ενδεχόμενο

$$B_k = \{k \text{ το πλήθος γεγονότα τύπου II και έπειτα γεγονός τύπου I}\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{isx^M}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p \mathbb{E}\left(e^{isx^M}|B_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p \mathbb{E}\left(e^{isx_{l+1}} \cdots e^{isx_{l+k+1}}|B_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p \left(\mathbb{E}(e^{isx_1})\right)^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p \left(\frac{\lambda}{\lambda - is}\right)^{k+1} \\
&= \frac{p\lambda}{p\lambda - is}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός

Fourier μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ είναι $\frac{\lambda}{\lambda - is}$. Πράγματι, αν x ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda > 0$ θα έχουμε

$$\mathbb{E}(e^{isx}) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{isx} dx = \frac{\lambda}{\lambda - is}$$

Αφού ο μετασχηματισμός Fourier ενός στοιχείου της ακολουθίας $x_1^M, x_2^M, \cdots$, είναι ίσος με $\frac{p\lambda}{p\lambda - is}$ και επειδή ο μετασχηματισμός Fourier είναι αντιστρέψιμος έπεται ότι οι τυχαίες μεταβλητές $x_1^M, x_2^M, \cdots$, ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου $p\lambda$. Αυτό σημαίνει ότι η $M(t)$ είναι διαδικασία Poisson παραμέτρου $p\lambda$. $\square$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την δεσμευμένη πυκνότητα των $S_1, \cdots, S_m$ δεδομένου ότι έχουν γίνει m άλματα στο χρονικό διάστημα $(s, s+t)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 50 *Έστω $N(t)$ μια διαδικασία Poisson παραμέτρου λ. Για κάθε $s, t > 0$ και $m = 1, 2, \cdots$, η δεσμευμένη πυκνότητα των $S_1, \cdots, S_m$ δεδομένου ότι*

$N(t+s) - N(t) = m$ *είναι ίση με*

$$
\begin{aligned}
& f_{S_1,\cdots,S_m}(t_1,\cdots,t_m|m \text{ άλματα στο διάστημα } (s,s+t)) \\
= & \left(\frac{m!}{t^m}\right)\mathbb{I}_{\{s<t_1<\cdots<t_m<t+s\}}
\end{aligned}
$$

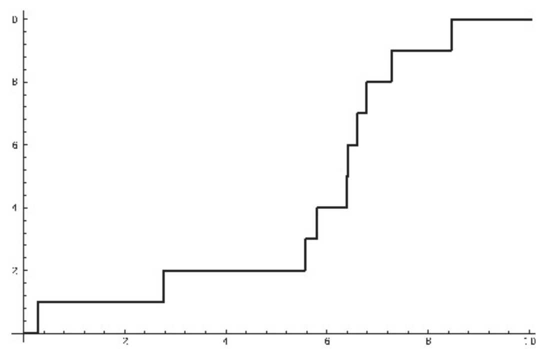
Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό 37. Για οποιαδήποτε $s < t_1 < \cdots < t_m < (t+s)$ έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& P(\{t_i < S_i < t_i + h_i, 1 \le i \le m\} \cap \{m \text{ άλματα στο διάστημα } (s, s
\\
= & P(\{N(t_k) - N(t_{k-1} + h_{k-1}) = 0\} \cap \{N(t_k + h_k) - N(t_k) = 1\} \\
& \cap\{N(t+s) - N(t_m + h_m) = 0\}, 1 \le k \le m) \\
= & \left(\prod_{i=1}^{m} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1} - h_{i-1})}(\lambda h_i)\right) \cdot e^{-\lambda(t+s-t_m-h_m)}
\end{aligned}
$$

Όμως

$$P(N(t+s) - N(s) = m) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}$$

Διαιρώντας με την πιθανότητα αυτή και το γινόμενο $h_1 \cdot h_2 \cdots h_m$ και λαμβάνοντας το όριο καθώς $h_1, \cdots, h_m \to 0$ προκύπτει το ζητούμενο. Παρατηρήστε ότι αν $m = 1$ τότε η δεσμευμένη πυκνότητα της S_1 δεδομένου ενός μόνο άλματος στο $(s, s+t)$ είναι αυτή της ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα $(s, s+t)$. $\square$



Σχήμα 7: Πιθανό μονοπάτι της Poisson

Στο επόμενο παράδειγμα θα δώσουμε μερικές εφαρμογές της θεωρίας (αν και όχι ρεαλιστικές) για την καλύτερη κατανόηση της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 51 *Το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι ξεκινά στις 15:15 με περισσότερους από 500 εγγεγραμμένους φοιτητές. Έχει παρατηρηθεί ότι, στο χρονικό διάστημα 15:00-15:20, οι φοιτητές εισέρχονται στην αίθουσα με ρυθμό αφίξεων 30 φοιτητές ανά λεπτό. Θα μετρήσουμε την πιθανότητα να έρθουν περισσότεροι από 100 φοιτητές μεταξύ 15:15-15:20.*

Θα υποθέσουμε ότι αν $N(t)$ *είναι ο αριθμός των φοιτητών που έχει αφιχθεί στην αίθουσα την χρονική στιγμή* $t \in [15:00 - 15:20]$ *τότε η* $N(t)$ *είναι μια διαδικασία Poisson παραμέτρου* λt. *Έχουμε υπολογίσει την μέση τιμή μιας τέτοιας διαδικασίας και είναι ίση με* λt. *Δηλαδή, κατά μέσο όρο, περιμένουμε να έχουν αφιχθεί* λt *φοιτητές κατά το* t *λεπτό μετά τις 15:00 (χρόνος μηδέν). Επομένως, ο ρυθμός αφίξεων παριστάνεται από την παράμετρο* λ.

Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα $P(N(15:20) - N(15:15) > 100)$. *Λόγω του ότι η διαδικασία Poisson έχει* *στάσιμες προσαυξήσεις προκύπτει ότι*

$$
\begin{aligned}
P(N(15:20) - N(15:15) > 100) &= P(N(15:05) > 100) \\
&= 1 - P(N(15:05) \leq 100) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{100} e^{-30\cdot 5} \frac{(30\cdot 5)^k}{k!} \\
&\approx 0.99
\end{aligned}
$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να έχουν αφιχθεί ακριβώς 100 φοιτητές μέχρι τις 15:10 και 250 μέχρι τις 15:15. Δηλαδή μας ενδιαφέρει η πιθανότητα

$$P(N(15:10) = 100, N(15:15) = 250)$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
& P(N(15:10) = 100, N(15:15) = 250) \\
= \; & P(N(15:10) = 100, N(15:15) - N(15:10) = 150) \\
= \; & P(N(15:10) = 100) \cdot P(N(15:15) - N(15:10) = 150) \; \textit{(ανεξάρτη} \\
= \; & P(N(15:10) = 100) \cdot P(N(15:05) = 150) \; \textit{(στάσιμες προσαυξήσεις} \\
= \; & \left(\frac{e^{-30\cdot 10}(30\cdot 10)^{100}}{100!} \right) \cdot \left(\frac{e^{-30\cdot 5}(30\cdot 5)^{150}}{150!} \right)
\end{aligned}
$$

Σημειώστε ότι δεν είναι σωστό να γράψουμε $P(N(15:10)=100, N(15:15)-N(15:10)=150) = P(N(15:10)=100, N(15:05)=150) = P(N(15:10)=100)\cdot P(N(15:05)=150)$.

Ας υποθέσουμε στην συνέχεια ότι φθάνουν 100 φοιτητές στα πρώτα 5 λεπτά. Δεδομένου αυτού, ποια είναι η πιθανότητα να έρθουν 200 φοιτητές το πολύ μέχρι και τα 10 πρώτα λεπτά; Η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι η

$$
\begin{aligned}
& P(N(15:10)\leq 200|N(15:05)=100) \\
= \; & P(N(15:10)-100\leq 100|N(15:05)=100) \\
= \; & P(N(15:10)-N(15:05)\leq 100) \\
= \; & P(N(15:05)\leq 100) \\
= \; & \sum_{k=0}^{100}\frac{e^{-30\cdot 5}(30\cdot 5)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

□

Περισσότερα στο αντικείμενο αυτό μπορεί να δει κανείς στα βιβλία [;], [;], [;] καθώς και στην ξενόγλωσση βιβλιογραφία.

5 Στοχαστικές Διαδικασίες Συνεχούς Χρόνου

5.1 Εισαγωγή

Έχουμε μελετήσει την στοχαστική διαδικασία Poisson η οποία είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου και διακριτού πλήθους καταστάσεων. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε σε γενικότερο πλαίσιο τις συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες με διακριτό σύνολο καταστάσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 52 *Μια συνεχούς χρόνου στοχαστική διαδικασία $X(t)$ με καταστάσεις στο σύνολο S (πεπερασμένου ή αριθμήσιμου πλήθους) θα λέμε ότι έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα αν για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι*

$$P(X(t) = j|X(s) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \cdots , X(t_1) = i_1) = P(X(t) = j|$$

όπου $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq s \leq t$ και $i_1, i_2, \cdots , i_{n-1}, j \in S$ οποιεσδήποτε καταστάσεις του συνόλου S. Στην περίπτωση αυτή θα ονομάζεται συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα. Επιπλέον θα λέμε ότι πρόκειται για χρονικά ομοιογενής συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα αν για κάθε $s \leq t$ και οποιεσδήποτε καταστάσεις $i, j \in S$ ισχύει ότι

$$P(X(t) = j|X(s) = i) = P(X(t - s) = j|X(0) = i) = p_{ij}(t - s)$$

Η χρονική ομοιογένεια είναι μια ιδιότητα η οποία απλουστεύει τα πράγματα αρκετά. Η αλυσίδα συμπεριφέρεται το ίδιο ανεξάρτητα του πότε ξεκίνησε και σε ποια κατάσταση βρίσκεται την παρούσα χρονική στιγμή.

Υπόθεση 1: Υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ είναι χρονικά ομοιογενής.

Αν η αλυσίδα βρεθεί στην κατάσταση $i \in S$ τότε συμβολίζουμε με T_i τον χρόνο (αναμονής) μέχρι το επόμενο άλμα, δηλαδή μέχρι η αλυσίδα να αλλάξει κατάσταση. Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι η τυχαία μεταβλητή T_i ακολουθεί (υποχρεωτικά) την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda_i \geq 0$ δεδομένου του ορισμού ;; και της υπόθεσης 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 53 *Η τυχαία μεταβλητή T_i ακολουθεί την εκθετική κατανομή.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση $i \in S$. Για $s \geq 0$ το ενδεχόμενο $\{T_i > s\}$ είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο $\{X(u) = i \text{ για } 0 \leq u \leq s\}$. Παρομοίως, για $s, t \geq 0$ το ενδεχόμενο $\{T_i > s + t\}$ είναι το ίδιο με το ενδεχόμενο $\{X(u) = i$ για $0 \leq$

$u \leq s+t\}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
& P(T_i > s+t | T_i > s) \\
= \; & P(X(u) = i \text{ για } 0 \leq u \leq s+t | X(u) = i \text{ για } 0 \leq u \leq s) \\
= \; & P(X(u) = i \text{ για } s \leq u \leq s+t | X(u) = i \text{ για } 0 \leq u \leq s) \\
= \; & P(X(u) = i \text{ για } s \leq u \leq s+t | X(s) = i) \text{ (Μαρκοβιανή ιδιότητα)} \\
= \; & P(X(u) = i \text{ για } 0 \leq u \leq t | X(0) = i) \text{ (χρονική ομοιογένεια)} \\
= \; & P(T_i > t)
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει (δες θεώρημα 16) ότι υπάρχει μια σταθερά $\lambda_i \geq 0$ τ.ω.

$$P(T_i > t) = e^{-\lambda_i t}$$

επομένως η T_i ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda_i \geq 0$. □

Σε μια στοχαστική διαδικασία σε χρόνο συνεχή εκτός από τους χρόνους αναμονής T_i σημαντικό ρόλο διαδραματίζει και η πιθανότητα μετάβασης r_{ij} από την κατάσταση i στην j δεδομένου ότι η αλυσίδα θα κάνει κάποια στιγμή άλμα. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα αυτή είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο παραμονής στην κατάσταση i. Επομένως, σε μια αλυσίδα συνεχούς χρόνου, αντιστοιχεί και μια αλυσίδα διακριτού χρόνου με πίνακα μετάβασης τον $R = r_{ij}$ η οποία ονομάζεται ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα στην αλυσίδα συνεχο-ύς χρόνου.

5.2 Ύπαρξη Στοχαστικής Διαδικασίας

Συνήθως στις εφαρμογές οι οποίες μοντελοποιούνται μέσω στοχαστικών διαδικασιών σε χρόνο συνεχή θα μας δίνονται οι παράμετροι $\lambda_i \geq 0$ και ο στοχαστικός πίνακας $R = r_{ij}$. Σε όλα τα επόμενα υποθέτουμε ότι $\sup_{i \in S} \lambda_i < \infty$. Για την γενικότερη περίπτωση μπορεί κανείς να μελετήσει το [;].

Σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα υπάρχει μοναδική στοχαστική διαδικασία σε χρόνο συνεχή η οποία έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα και ταυτόχρονα ικανοποιεί ιδιότητες που συνήθως απαιτούνται στις εφαρμογές. Συμβολίζουμε με δ_{ij} την επόμενη απεικόνιση

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } i = j \\ 0, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 54 (Θεώρημα Ύπαρξης) *Έστω* $S = \{1, 2, \cdots,\}$ *το σύνολο καταστάσεων και έστω* $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \cdots,\}$ *τ.ω.* $\sum_{i \in S} \mu_i = 1$ *και* $\mu_i \geq 0$. *Αν* $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots,)$ *με* $\sup_{i \in S} \lambda_i < \infty$ *και* $\lambda_i \geq 0$ *τότε υπάρχει στοχαστική διαδικασία* $X(t)$ *με* $t \geq 0$ *τ.ω.*

(i) $t \to X(t)$ *είναι δεξιά συνεχής και κατά τμήματα σταθερή,*

(ii) $P(X(0) = i) = \mu_i$ *για κάθε* $i \in S$ *και για* $t \geq 0$ *ισχύει ότι*

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\substack{j \in S \\ t \geq 0}} \frac{1}{h} \left| P(X(t+h) = j | X(\tau), \tau \in [0,t]) - (1 - h\Lambda_{X(t)})\delta_{\{X(t),j\}} - h\Lambda_{X(t)} R_{\{X(t),j\}} \right| = 0$$

Η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ *έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα και είναι η μοναδική η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες* (i) *και* (ii) *με την έννοια ότι οποιαδήποτε άλλη στοχαστική διαδικασία έχει τις ίδιες ιδιότητες θα έχει και την ίδια κατανομή. Αν* $(P(t))_{ij} = P(X(t) = j | X(0) = i)$ *τότε ισχύει ότι*

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n$$

με $Q = \hat{\Lambda}(R - \mathbb{I})$ *όπου* $\hat{\Lambda}$ *είναι ένας διαγώνιος πίνακας τέτοιος ώστε στην διαγώνιο του να βρίσκονται τα στοιχεία του* Λ. *O* $P(t)$ *είναι στοχαστικός πίνακας για κάθε* $t \geq 0$.

5.2.1 Γενικά Σχόλια

Το θεώρημα ;; είναι εξαιρετικά σημαντικό περιέχοντας «συμπυκνωμένη» και σημαντική πληροφορία.

(i) Συχνά, για ένα φαινόμενο το οποίο μοντελοποιείται μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας σε συνεχή χρόνο, έχουμε ως δεδομένο το διάνυσμα Λ και τον πίνακα R. Η πληροφορία αυτή μας δίνεται με τον παρακάτω τρόπο.

Να μελετηθεί η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω: Για $t_1, t_2, \cdots, \in [0, t)$ ισχύουν τα εξής όταν $h > 0$ αρκετά μικρό,

$$P(X(t+h) = j | X(t) = i, X(t_1) = s_1, X(t_2) = s_2, \cdots) \cong h\lambda_i r_{ij} + o(h), \quad i \neq j$$
$$P(X(t+h) = j | X(t) = i, X(t_1) = s_1, X(t_2) = s_2, \cdots) \cong 1 + h\lambda_i (r_{ii} - 1) + o(h), \quad i = j$$

όπου $o(h)$ είναι μια ποσότητα τέτοια ώστε $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα ;; υπάρχει μοναδική στοχαστική διαδικασία με τις παραπάνω ιδιότητες η οποία μάλιστα έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα, είναι δεξιά συνεχής και κατά τμήματα σταθερή. Επιπλέον, ο πίνακας μετάβασης της είναι ως εξής

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n \tag{7}$$

όπου $Q = q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i (r_{ii} - 1), & \text{όταν } i = j \\ \lambda_i r_{ij}, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$ και r_{ij} είναι τα στοιχεία του πίνακα R.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο πίνακας Q χαρακτηρίζει πλήρως την στοχαστική διαδικασία $X(t)$ μιας και «γεννάει» την κατανομή της (για αυτό και ονομάζεται **γεννήτορας** της $X(t)$), δηλαδή ουσιαστικά τον πίνακα μετάβασης $P(t)$ μέσω της σχέσης ;; (σημειώστε ότι $P(X(t) = j) = (\mu \cdot P(t))_j$). Ο πίνακας Q όμως παράγεται από τα λ_i και r_{ij}. Αυτό που πρέπει να σημειώσουμε είναι ότι με διαφορετική επιλογή των λ_i και r_{ij} μπορούμε να φτάσουμε στον ίδιο πίνακα Q και άρα στην ίδια στοχαστική διαδικασία $X(t)$. Αν $\sup_{i \in S} \lambda_i \leq \lambda < +\infty$ τότε μπορούμε να έχουμε τον ίδιο πίνακα Q επιλέγοντας $\lambda_i = \lambda$ για κάθε $i \in S$ και διαφοροποιώντας κατάλληλα τα στοιχεία του πίνακα R, δηλαδή τα r_{ij}. Συγκεκριμένα, θέτουμε $\lambda_i = \lambda$ για κάθε $i \in S$ και $\hat{R}_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}(1 - r_{ii}), & \text{όταν } i = j \\ \frac{\lambda_i}{\lambda} r_{ij}, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$ για να έχουμε τον ίδιο πίνακα Q. Η μέθοδος αυτή (δηλαδή η συγκεκριμένη επιλογή των λ_i και ο νέος πίνακας $\hat{R}$) ονομάζεται **ομογενοποίηση** (uniformization method) και είναι πολύ βολική σε πολλές περιπτώσεις (δείτε παρατήρηση ;; παρακάτω).

Έχοντας τον πίνακα $P(t)$ συνήθως μπορούμε να υπολογίσουμε ότι μας ζητούν. Πως όμως υπολογίζουμε τον πίνακα $P(t)$; Αν το σύνολο καταστάσεων S είναι πεπερασμένο τότε $P(t) = e^{tQ}$ οπότε ο τρόπος υπολογισμού είναι γνωστός από την γραμμική άλγεβρα (δείτε παράγραφο ;;). Στην περίπτωση όμως που το σύνολο καταστάσεων είναι άπειρο τότε θα πρέπει να εργαστούμε διαφορετικά, συνήθως μέσω των οπισθοδρομικών εξισώσεων Kolmogorov που θα δούμε παρακάτω. Παρατηρήστε επίσης ότι στον πίνακα μετάβασης R αντιστοιχεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, η ενσωματωμένη αλυσίδα, η οποία κινείται παράλληλα με την αντίστοιχη διαδικασία συνεχούς χρόνου. Επομένως, ανάλογα το ερώτημα στο οποίο θέλουμε να απαντήσουμε, μπορούμε να μελετήσουμε την διακριτή διαδικασία προκειμένου να βγάλουμε κατάλληλα συμπεράσματα.

(ii) Ενδεχομένως, σε μια εφαρμογή να μας δίνουν τα παρακάτω: Να μελετηθεί η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ για την οποία ισχύουν τα επόμενα. Για $t_1, t_2, \cdots, \in [0, t)$ ισχύουν τα εξής όταν $h > 0$ αρκετά μικρό,

$$P(X(t+h)=j|X(t)=i, X(t_1)=s_1, X(t_2)=s_2, \cdots) \cong hq_{ij} + o(h), \quad i \neq j$$
$$P(X(t+h)=j|X(t)=i, X(t_1)=s_1, X(t_2)=s_2, \cdots) \cong 1 - q_{ii}h + o(h), \quad i = j$$

Δηλαδή μας δίνουν έναν πίνακα Q ο οποίος περιέχει τα q_{ij} αλλά είναι τέτοιος ώστε $\sup_{i \in S} |q_{ii}| < \infty$ και ταυτόχρονα για $i \neq j$ ισχύει ότι $q_{ij} \geq 0$. Επίσης $q_{ii} = -\sum_{k \neq i} q_{ik}$. Τότε θέτουμε $\Lambda_i = -Q_{ii}$ και $\hat{\Lambda}_{ij} = \delta_{ij} \Lambda_i$ δηλαδή ο πίνακας $\hat{\Lambda}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας ο οποίος περιέχει στην διαγώνιο τα στοιχεία $-q_{ii}$. Επίσης, κατασκευάζουμε τον πίνακα R ως εξής

$$R_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } \Lambda_i = 0 \\ 0, & \text{όταν } \Lambda > 0 \end{cases} \qquad \text{ενώ για } \ i \neq j \ \text{θέτουμε } R_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{όταν } \Lambda_i = 0 \\ \frac{Q_{ij}}{\Lambda_i}, & \text{όταν } \Lambda_i > 0 \end{cases}$$

Ο πίνακας Q ορίζει μια Μαρκοβιανή στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με πίνακα μετάβασης τον

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n$$

Ισχύει το επόμενο θεώρημα το οποίο περιγράφει την κατασκευή της ενσωματωμένης αλυσίδας και παρέχει ιδιότητες της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 55 (Η Ενσωματωμένη Αλυσίδα) *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία γεννάται από τον πίνακα Q και έστω Λ και R όπως ορίσθηκαν παρα-*

πάνω. Θέτουμε $J_0 = 0$ *και*

$$
\begin{aligned}
J_n &= \inf\{t > J_{n-1} : X(t) \neq X(J_{n-1})\} \text{ για } n \geq 1 \\
X_n &= \begin{cases} X(J_n), & \text{αν } J_n < \infty \\ X_{n-1}, & \text{αν } n \geq 1 \text{ και } J_n = \infty \end{cases} \\
E_n &= \begin{cases} \Lambda_{X_{n-1}}(J_n - J_{n-1}), & \text{αν } J_n < \infty \\ 0, & \text{αν } J_n = \infty \end{cases}
\end{aligned}
$$

Επίσης θέτουμε $\zeta = \inf\{n \geq 0 : \Lambda_{X_n} = 0\}$. *Τότε η* X_n *είναι μια (διακριτή) Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον πίνακα* R *και για κάθε* $K \geq 1$ *και* $\{t_k : 1 \leq k \leq K\} \subseteq (0, +\infty)$ *ισχύει ότι*

$$P(\{E_k > t_k, 1 \leq k \leq K\} \cap A) = e^{-\sum_{k=1}^{K} t_k} P(A)$$

για κάθε $A \in \sigma(\{X_n : n \geq 0\})$ *το οποίο περιέχεται στο* $\{\zeta > K\}$.

5.2.2 Σχόλια στο θεώρημα ;;

- Το θεώρημα ;; λέει ότι υπάρχει μοναδική στοχαστική διαδικασία η οποία ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες. Η μοναδικότητα αφορά τον πίνακα μετάβασης, δηλαδή όλες οι στοχαστικές διαδικασίες που ικανοποιούν αυτές τις ιδιότητες έχουν τον ίδιο πίνακα μετάβασης. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι έχουν την ίδια ενσωματωμένη αλυσίδα ή ότι έχουν τους ίδιους χρόνους μεταξύ των αλμάτων. Αυτά μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους ανάλογα με τον τρόπο που κατασκευάζουμε την αλυσίδα.

- Τα άλματα της αλυσίδας πραγματοποιούνται κατά τους χρόνους J_n (τυχαίες μεταβλητές). Αν για παράδειγμα η αλυσίδα ξεκινήσει από την κατάσταση i τότε στον χρόνο J_1 θα μεταβεί σε μια άλλη (διαφορετική) κατάσταση. Η αλυσίδα X_n (η ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα) είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα όπως αποδεικνύεται στο προηγούμενο θεώρημα. Η αλυσίδα αυτή κινείται παράλληλα με την αρχική αλυσίδα συνεχούς χρόνου και μάλιστα $X(J_n) = X_n$ δηλαδή συμπίπτει με την αρχική κατά τους χρόνους J_n. Επομένως, ορισμένα συμπεράσματα για την αρχική αλυσίδα μπορούν να προκύψουν μελετώντας (με τις γνωστές τεχνικές) την ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα X_n.

- Στην περίπτωση που $q_{ii} > 0$ για κάθε $i \in S$ τότε $\zeta = +\infty$ και επομένως $P(A) = 1$ στο παραπάνω θεώρημα. Επομένως, δεδομένου ότι $\Lambda_{X_{n-1}} = i$ (δηλαδή $X_{n-1} = X(J_{n-1}) = i$ και άρα πριν το J_n άλμα η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i), προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα ότι ο χρόνος αναμονής $J_n - J_{n-1}$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου Λ_i, το οποίο έχουμε ήδη δει στο θεώρημα ;;.

- Στην περίπτωση που $\sup_{i\in S} \lambda_i \leq \lambda < +\infty$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την ίδια στοχαστική διαδικασία μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας Poisson παραμέτρου λ και μιας διακριτής Μαρκοβιανής αλυσίδας Y_n με πίνακα μετάβασης τον $\hat{R}$ όπως τον ορίσαμε προηγούμενα, δηλαδή με την μέθοδο της ομογενοποίησης. Τότε η στοχαστική διαδικασία $X(t) = Y_{N(t)}$ ικανοποιεί τις απαιτούμενες ιδιότητες και ο πίνακας μετάβασης της δίνεται από τον πίνακα $P(t)$ όπως ορίσθηκε στην ;;. Σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε ότι οι χρόνοι αναμονής $J_n - J_{n-1}$ ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ και ότι η ενσωματωμένη αλυσίδα είναι η Y_n η οποία είναι Μαρκοβιανή εκ κατασκευής. Δηλαδή, στην περίπτωση που κατασκευάσουμε με τον τρόπο αυτό την στοχαστική διαδικασία $X(t)$ τότε το θεώρημα ;; μας είναι πρακτικά άχρηστο αφού, εκ κατασκευής, γνωρίζουμε όλες τις ζητούμενες πληροφορίες. Σημειώστε όμως ότι είναι δυνατό να κατασκευάσουμε την στοχαστική διαδικασία $X(t)$ με τον τρόπο αυτό μονάχα όταν $\lambda < +\infty$.

Σχήμα 8: Andrey Kolmogorov (1903-1987)

5.3 Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\begin{aligned} P^{'}(t) &= P(t)Q = QP(t) \\ P(0) &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

οι οποίες ονομάζονται εξισώσεις Chapman-Kolmogorov. Στην περίπτωση που το σύνολο καταστάσεων είναι άπειρο τότε ένας τρόπος υπολογισμού του πίνακα $P(t)$

είναι μέσω των εξισώσεων αυτών, χρησιμοποιώντας ίσως πιθανογεννήτριες συναρτήσεις.

5.4 Στάσιμη Κατανομή - Οριακές Πιθανότητες

Όπως και στις αλυσίδες διακριτού χρόνου, θα πρέπει να κατηγοριοποιήσουμε τις καταστάσεις σε δυο βασικές κλάσεις, επαναληπτικές και μεταβατικές. Επειδή σε μια στοχαστική διαδικασία αντιστοιχεί μια διακριτή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον R οι ορισμοί επαναληπτικότητας και μεταβατικότητας μπορούν να δοθούν σε σχέση με την ενσωματωμένη αλυσίδα.

(i) Αν $\lambda_i = 0$ τότε προφανώς η κατάσταση i είναι απορροφητική και επομένως επαναληπτική.

(ii) Έστω $i \in S$ τέτοια ώστε $\lambda_i > 0$. Θα λέμε ότι είναι επαναληπτική αν είναι επαναληπτική στην ενσωματωμένη αλυσίδα X_n ως προς τον πίνακα R. Αντίστοιχα θα λέμε ότι είναι μεταβατική.

(iii) Έστω $i, j \in S$ τ.ω. $\lambda_i > 0$ και $\lambda_j > 0$. Θα λέμε ότι η i επικοινωνεί με την j και θα γράφουμε $i \to j$ αν αυτό συμβαίνει στην ενσωματωμένη αλυσίδα X_n. Αντίστοιχα θα λέμε ότι συνεπικοινωνούν και θα γράφουμε $i \leftrightarrow j$. Αν i επαναληπτική και $i \to j$ τότε και η j επαναληπτική. Αυτό προκύπτει από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στην ενσωματωμένη αλυσίδα.

(*iv*) Θα ορίσουμε τον χρόνο πρώτης επίσκεψης στην κατάσταση i ως εξής

$$\sigma_i = \inf\{t \geq J_1 : X(t) = i\}$$

(*v*) Μια κατάσταση $i \in S$ είναι επαναληπτική ανν $P(\sigma_i < \infty | X(0) = i) = 1$. Σημειώστε επίσης ότι αν $P(\sigma_i = +\infty | X(0) = i) > 0$ (δηλαδή είναι μεταβατική) τότε $\mathbb{E}(\sigma_i | X(0) = i) = +\infty$. Αν i επαναληπτική και j μεταβατική τότε $i \nrightarrow j$ και επομένως $P(\sigma_j < \infty | X(0) = i) = 0$.

(*vi*) Αν η i είναι επαναληπτική και $\mathbb{E}(\sigma_i | X(0) = i) < \infty$ τότε θα λέμε ότι η i είναι θετικά επαναληπτική αλλιώς μηδενικά επαναληπτική.

ΘΕΩΡΗΜΑ 56 *Για οποιαδήποτε κατάσταση $i \in S$ τ.ω. $\Lambda_i > 0$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Η κατάσταση i είναι επαναληπτική.*

(ii) *Υπάρχει $t \in (0, +\infty)$ τ.ω. η κατάσταση i είναι επαναληπτική ως προς τον πίνακα μετάβασης $P(t)$.*

(iii) *Η κατάσταση i είναι επαναληπτική ως προς τον πίνακα μετάβασης $P(t)$ για όλα τα $t \in (0, +\infty)$.*

Στο επόμενο θεώρημα περιγράφουμε τις οριακές πιθανότητες και πως αυτές σχετίζονται με τις στάσιμες κατανομές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 57 *Για κάθε $j \in S$ το όριο*

$$\lim_{t\to\infty}(P(t))_{jj} = \pi_{jj}$$

υπάρχει και επίσης

$$\lim_{t\to\infty}(P(t))_{ij} = \pi_{ij} = P(\sigma_j < \infty | X(0) = i)\pi_{jj} \text{ όταν } i \neq j$$

Επιπλέον, αν $\pi_{jj} > 0$ τότε και $\pi_{ii} > 0$ για όλα τα $i \in C = \{i : i \leftrightarrow j\}$. Επίσης, αν $\pi_i^C = \mathbb{I}_C(i)\pi_{ii}$, *τότε το* π^C *είναι για κάθε* $s > 0$ *η μοναδική στάσιμη κατανομή* μ *για τον πίνακα* $P(s)$ *η οποία είναι τέτοια ώστε* $\mu_k = 0$ *για* $k \notin C$ *και* $\sum_{i \in S} \mu_i = 1$. *Ακόμη, ισχύουν τα παρακάτω*

$$\pi_{ii} \;=\; \begin{cases} 1, & \text{όταν } \Lambda_i = 0 \\ \frac{1}{\Lambda_i \mathbb{E}(\sigma_i | X(0)=i)}, & \text{όταν } \Lambda_i > 0 \end{cases}$$

$$\pi_{ij} \;=\; \begin{cases} \delta_{i,j} + (1-\delta_{i,j}) P(\sigma_j < \infty | X(0) = i), & \text{όταν } \Lambda_j = 0 \\ \pi_{jj} P(\sigma_j < \infty | X(0) = i), & \text{όταν } \Lambda_j > 0 \end{cases}$$

Τέλος, αν $\sup_{i \in S} \Lambda_i < \infty$ *τότε*

$$\pi P(t) = \pi \Longleftrightarrow \pi Q = 0 \text{ για όλα τα } t > 0$$

5.4.1 Σχόλια στο θεώρημα ;;

(*i*) Διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει το πρόβλημα της περιοδικότητας όπως έχουμε δει στην περίπτωση της διακριτής αλυσίδας. Επομένως, αν έχουμε μια διακριτή και περιοδική αλυσίδα, θα μπορούσαμε να επιχειρήσουμε να την μετατρέψουμε σε συνεχή και να μελετήσουμε τις οριακές πιθανότητες με το παραπάνω θεώρημα. Τα συμπεράσματα όμως θα αφορούν την συνεχή αλυσίδα και επομένως μπορεί να διαφέρουν με αυτά της διακριτής αλυσίδας (δείτε το παράδειγμα ;; παρακάτω). Ένας λόγος είναι διότι οι αντίστοιχες στάσιμες κατανομές είναι διαφορετικές, εν γένει.

(ii) Αν η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή ως προς τον πίνακα $P(s)$ για οποιοδήποτε $s > 0$ με τον ίδιο τρόπο όπως στις διακριτές Μαρκοβιανές αλυσίδες (δείτε όμως και το επόμενο σχόλιο για αυτό το θέμα). Σε αυτή την περίπτωση είτε $\pi_i > 0$ για όλα τα $i \in S$ είτε $\pi_i = 0$ για όλα τα $i \in S$. Αν δεν είναι αδιαχώριστη τότε θα έχει ένα, δυο ή και περισσότερα κλειστά υποσύνολα επαναληπτικών καταστάσεων και ενδεχομένως κάποιες μεταβατικές. Εργαζόμαστε σε κάθε κλειστό σύνολο χωριστά για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή που του αντιστοιχεί. Αν η αλυσίδα έχει μεταβατικές καταστάσεις τότε ϑα πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα η αλυσίδα να επισκεφθεί το κλειστό υποσύνολο C ξεκινώντας από την μεταβατική κατάσταση i. Αυτό μπορεί να γίνει κάνοντας τους ανάλογους υπολογισμούς στην ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα, δηλαδή να υπολογίσουμε την πιθανότητα h_i^C όταν i μεταβατική και C κλειστό σύνολο επαναληπτικών. Τότε ϑα ισχύει

$$P(\sigma_j < \infty | X(0) = i) = h_i^C \quad \text{για κάθε } j \in C$$

Αν j μεταβατική κατάσταση τότε προκύπτει ότι $\pi_{jj} = 0$ και άρα $\pi_{ij} = 0$ για κάθε $i \in S$.

(iii) Μπορούμε να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή από την σχέση $\pi Q = 0$ απαιτώντας βέβαια το π να είναι κατανομή πιθανότητας. Με τον τρόπο αυτό, αν γνωρίζουμε τον πίνακα Q και όχι τον $P(t)$, αποφεύγουμε να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα e^{tQ} ο οποίος είναι ίσος με τον $P(t)$. Επειδή η αλυσίδα μπορεί να έχει δυο ή και παραπάνω κλειστά σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων και ίσως κάποιες μεταβατικές, τότε ϑα πρέπει να αναδιατάξουμε τις καταστάσεις έτσι ώστε αυτές που ανήκουν στο ίδιο κλειστό σύνολο να είναι δίπλα-δίπλα. Τελευταίες αφήνουμε τις μεταβατικές καταστάσεις. Τότε ο πίνακας Q θα είναι κάτω τριγωνικός σε μορφή Block. Την ίδια μορφή επίσης θα έχει και οποιαδήποτε δύναμη του πίνακα Q και επομένως και ο πίνακας $P(t)$ (δείτε και την άσκηση ;; για πεπερασμένο πίνακα). Επομένως, υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή που αντιστοιχεί σε κάθε κλειστό σύνολο εργαζόμενοι στον αντίστοιχο υποπίνακα του Q.

(iv) Αν η κατάσταση j είναι μεταβατική τότε

$$\mathbb{E}(\sigma_j|X(0)=j)=+\infty$$

Επειδή η ποσότητα αυτή εμφανίζεται στον παρονομαστή κλάσματος έπεται ότι σε αυτή την περίπτωση το κλάσμα θα είναι ίσο με το μηδέν, δηλαδή $\pi_{jj}=0$. Αντίστροφα, αν $\pi_{jj}=0$ για κάποια επαναληπτική κατάσταση j τότε υποχρεωτικά η κατάσταση j είναι μηδενικά επαναληπτική και επομένως $\mathbb{E}(\sigma_j|X(0)=j)=+\infty$.

(v) Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(X(t) = j|X(0) = i)$ θα πρέπει να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα e^{tQ} και τότε η ζητούμενη πιθανότητα θα βρίσκεται στην θέση (i, j) του πίνακα αυτού.

Παρατηρηση 58 (Μέσος χρόνος απορρόφησης ή πρώτης επίσκεψη

Έστω $C \subseteq S$ υποσύνολο του συνόλου καταστάσεων. Συμβολίζουμε με τ^C τον χρόνο πρώτης επίσκεψης της συνεχούς χρόνου αλυσίδας $X(t)$ στο σύνολο C ξεκινώντας από την κατάσταση i και ο μέσος χρόνος είναι

$$k_i^C := \mathbb{E}(\tau^C|X(0) = i)$$

Υποθέτουμε ότι $P(\tau^C < \infty|X(0) = i) = 1$. Παρόμοια, ο χρόνος πρώτης επίσκεψης της ενσωματωμένης αλυσίδας στο σύνολο C ξεκινώντας από την κατάσταση i είναι ο H^C ενώ ο μέσος χρόνος είναι

$$\hat{k}_i^C := \sum_{n=0}^{\infty} nP(H^C = n|Y_0 = i)$$

όπου Y_n η ενσωματωμένη αλυσίδα. Μπορεί να αποδει-

χθεί ότι (δείτε [;])

$$k_i^C = \frac{\hat{k}_i^C}{\lambda}, \quad \text{με } \lambda = \sup_{i \in S} \lambda_i$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει κανείς να προσέξει το γεγονός ότι υποθέτουμε ότι $\lambda < +\infty$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τους k_i^C *στην περίπτωση όπου* $\lambda = +\infty$ *θα πρέπει να επιλύσουμε το σύστημα (δείτε [;])*

$$\begin{aligned} k_i^C &= 0, \quad \text{όταν } i \in C \\ \sum_{j \in S} q_{ij} k_j^C + 1 &= 0, \quad \text{όταν } S \setminus C \end{aligned}$$

όπου q_{ij} *είναι τα στοιχεία του πίνακα* Q. *Οι μέσοι χρόνοι* k_i^C *θα είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση του παραπάνω συστήματος. Σε αυτή τη περίπτωση η θεωρία απαιτεί την εφαρμογή της λεγόμενης* **ισχυρής Μαρκοβιανής ιδιότητας** *(strong Markov property).*

□

Σχήμα 9: Andrey Markov (1856-1922)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 59 *Έστω η διακριτή Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με πίνακα μετάβασης τον*

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο

2. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$R^{2k} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \cdots,$$

Θα επιχειρήσουμε να μετατρέψουμε την διακριτή αυτή αλυσίδα σε αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να επιλέξουμε ένα διάνυσμα $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. *Για ευκολία επιλέγουμε* $\Lambda = (1, 1, 1)$ *οπότε ο πίνακας* Q *θα είναι ο*

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε κατά τα γνωστά τον εκθετικό πίνακα και έχουμε

$$P(t) = e^{tQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{4} + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} \end{pmatrix}$$

Οι οριακές πιθανότητες (δηλαδή ο πίνακας $\lim_{t\to\infty} P(t)$ *θα είναι τέτοιος ώστε στις δυο πρώτες στήλες τα στοι-*

χεία θα είναι ίσα με $\frac{1}{4}$ και η τελευταία στήλη ίση με $\frac{1}{2}$. Η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας συνεχούς χρόνου είναι τέτοια ώστε $\pi Q = 0$ και $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ και βλέπουμε ότι $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ επομένως οι οριακές πιθανότητες που υπολογίσαμε συμπίπτουν με αυτές που υπολογίζουμε μέσω της στάσιμης κατανομής χωρίς να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα.

Διαπιστώνουμε ότι οι οριακές πιθανότητες της αρχικής αλυσίδας είναι διαφορετικές από αυτές της αντίστοιχης συνεχούς χρόνου αλυσίδας και επομένως τα αντίστοιχα συμπεράσματα διαφέρουν. Στην διακριτή αλυσίδα, οι οριακές πιθανότητες, $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$, δίνουν την πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί από την i στην j μετά από ένα μεγάλο αριθμό αλμάτων χωρίς όμως να μας ενδιαφέρει ο χρόνος μεταξύ των αλμάτων. Στην αλυσίδα συνεχούς χρόνου, οι αντίστοιχες οριακές πιθανότητες, δίνουν την πιθανότητα να μεταβεί η αλυσίδα από την i στην j μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα. Παρατηρήστε επίσης ότι για να μετατρέψουμε την διακριτή αλυσίδα σε αλυσίδα συνεχούς χρόνου έπρεπε να εισάγουμε το διάνυσμα Λ το οποίο περιέχει τις παρα-

*μέτρους λ_i οι οποίες μετρούν θα λέγαμε την χρονική διάρκεια μεταξύ των αλμάτων. Εδώ επιλέξαμε τυχαία αυτό το διάνυσμα αλλά σε ένα πραγματικό φαινόμενο θα πρέπει να γίνουν οι αντίστοιχες μετρήσεις και πειράματα για να πάρουμε αυτές τις παραμέτρους. Αν μπορούμε να το κάνουμε αυτό τότε μπορούμε να εργαστούμε σε συνεχή χρόνο προκειμένου να αποφύγουμε τα τεχνικά προβλήματα που δημιουργεί η περιοδικότητα, αν υπάρχει. Αν όμως δεν μπορούμε να έχουμε αυτές τις παραμέτρους τότε παραμένουμε στην μελέτη της αλυσίδας σε διακριτό χρόνο. Σημειώστε ότι πολλά φαινόμενα μοντελοποιούνται ως αλυσίδες με μετρήσεις σε ετήσια βάση ή μηνιαία κ.τ.λ. κάτι το οποίο δεν δίνει την δυνατότητα μετατροπής σε διαδικασία συνεχούς χρόνου (δείτε για παράδειγμα το [**;**]).* $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 60 *Έστω η στοχαστική διαδικασία με* *γεννήτορα τον πίνακα* Q *ο οποίος είναι τέτοιος ώστε*

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 \end{pmatrix}$$

και σύνολο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Προκειμένου να μελετήσουμε την αλυσίδα θα χρειαστούμε τον πίνακα μετάβασης R *της ενσωματωμένης αλυσίδας. Οπότε από τον πίνακα* Q *θα κατασκευάσουμε το διάνυσμα* Λ *και τον πίνακα* R. *Θα έχουμε ότι*

$$\Lambda = (1, 2, 3, 1, 2, 2) \text{ και } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

'ρα η ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα έχει πίνακα μετάβασης τον R *και μάλιστα οι καταστάσεις* $C_1 =$

$\{1,2\}$ *αποτελούν ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων στην ενσωματωμένη αλυσίδα και επομένως και στην αρχική αλυσίδα. Παρομοίως, οι καταστάσεις* $C_2 = \{3,4,5\}$ *αποτελούν κλειστό σύνολο επαναληπτικών τόσο για την ενσωματωμένη όσο και για την συνεχούς χρόνου. Η κατάσταση* $\{6\}$ *είναι μεταβατική κατάσταση. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα* $h_6^{C_1}$*, δηλαδή την πιθανότητα να ξεκινήσει από την 6 και να απορροφηθεί στο κλειστό σύνολο* C_1*. Σημειώστε ότι*

$$P(\sigma_1 < \infty | X(0) = 6) = P(\sigma_2 < \infty | X(0) = 6) = h_6^{C_1}$$

Προκύπτει ότι $h_6^{C_1} = \frac{3}{4}$ *και* $h_6^{C_2} = \frac{1}{4}$.

Για να βρούμε τις οριακές πιθανότητες της αρχικής αλυσίδας συνεχούς χρόνου θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα $P(t) = e^{tQ}$ *και στην συνέχεια να υπολογίζαμε το όριο του κάθε στοιχείου καθώς* $t \to \infty$*. Όμως, λόγω του θεωρήματος ;; αρκεί να υπολογίσουμε τις στάσιμες κατανομές των δυο υποαλυσίδων που προκύπτουν από τα δυο κλειστά σύνολα*

C_1, C_2. *Συμβολίζουμε με*

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ και } Q_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

τους γεννήτορες των δυο υποαλυσίδων. Θα υπολογίσουμε τις στάσιμες κατανομές από τις εξισώσεις $\pi Q_1 = 0$ *και* $\pi Q_2 = 0$. *Θα έχουμε*

$$\pi_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ και } \pi_2 = \left(\frac{3}{16}, \frac{8}{16}, \frac{5}{16}\right)$$

Λόγω του ότι η κατάσταση 6 είναι μεταβατική έπεται ότι $\lim_{t\to\infty}(P(t))_{i6} = 0$ *για κάθε* $i \in S$. *'ρα οι οριακές πιθανότητες θα είναι ως εξής*

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{8}{16} & \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{8}{16} & \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{8}{16} & \frac{5}{16} & 0 \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} & \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} & \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4} & \frac{8}{16}\cdot\frac{1}{4} & \frac{5}{16}\cdot\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Παραδειγμα 61 (Η διαδικασία Poisson) *Σε αυτό το παράδειγμα θα μελετήσουμε την διαδικασία Poisson, η οποία είναι στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με διακριτό πλήθος καταστάσεων, κάτω από το πρίσμα της γενικής θεωρίας που παρουσιάσαμε προηγούμενα.*

Αν ένα φαινόμενο μοντελοποιηθεί μέσω της διαδικασίας Poisson θα μας δίνονται τα παρακάτω στοιχεία (δες ορισμό 37).

Να μελετηθεί η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ με πεδίο τιμών το σύνολο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$ και η οποία ικανοποιεί τα εξής

$$\begin{aligned} P(N(t+h) - N(t) = 0) &= 1 - \lambda h + o(h) \\ P(N(t+h) - N(t) = 1) &= \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

Στην ουσία μας πληροφορούν ότι η στοχαστική διαδικασία κάνει άλματα μονάχα προς την επόμενη κατάσταση, δηλαδή αν βρεθεί στην κατάσταση i θα μεταβεί (όταν θα κάνει άλμα) στην κατάσταση $i + 1$.

Με αυτό τον τρόπο μας έχουν δώσει τον πίνακα Q ο οποίος έχει παντού μηδενικά εκτός από την διαγώνιο *όπου έχει το $-\lambda$ και την υπερ-διαγώνιο που έχει το λ. Από τον πίνακα Q μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάνυσμα Λ και τον πίνακα μετάβασης R της ενσωματωμένης διακριτής αλυσίδας. Βλέπουμε ότι $\Lambda = (\lambda, \lambda, \cdots,)$ ενώ ο πίνακας R έχει παντού μηδενικά εκτός από την υπερ-διαγώνιο όπου έχει μονάδες. Φαίνεται λοιπόν από την διακριτή αλυσίδα ότι τα άλματα πραγματοποιούνται μονάχα στην επόμενη κατάσταση. Συνεπώς, αν η αλυσίδα μεταπηδήσει από την κατάσταση i στην $i+1$ δεν πρόκειται ποτέ να επιστρέψει στην i. Μάλιστα, η πιθανότητα μεταπήδησης είναι αυστηρά θετική (αφού $\lambda > 0$ τότε $P(T_i < k) = 1 - e^{-\lambda k} > 0$) και επομένως η πιθανότητα παραμονής είναι αυστηρά μικρότερη από την μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές και επομένως ο πίνακας οριακών πιθανοτήτων είναι ο μηδενικός. Στον ορισμό 39 έχουμε υπολογίσει τον πίνακα $P(t)$ της διαδικασίας Poisson και εύκολα βλέπουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα συγκλίνουν στο μηδέν καθώς $t \to \infty$.* $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 62 *Είναι φανερή η αναγκαιότητα της με-*

λέτης Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου προκειμένου να μελετήσει κάποιος αλυσίδες συνεχούς χρόνου. Πρωτίστως, διότι σε κάθε αλυσίδα συνεχούς χρόνου αντιστοιχεί και μια αλυσίδα διακριτού χρόνου (η ενσωματωμένη αλυσίδα) και μέσω αυτής προκύπτουν τα περισσότερα αποτελέσματα και συμπεράσματα για την διαδικασία συνεχούς χρόνου. Επιπλέον, είναι ευκολότερο να αποκτήσει κάποιος την απαιτούμενη μαθηματική διαίσθηση μέσω της μελέτης του σε διακριτό χρόνο προκειμένου να συνεχίσει επιτυχώς την μελέτη του σε χρόνο συνεχή. Επίσης, δεν είναι δυνατό πάντοτε να μετατρέψουμε μια διαδικασία διακριτού χρόνου σε συνεχή διότι αφενός μπορεί να μην έχουμε τα κατάλληλα δεδομένα (δηλαδή το διάνυσμα Λ) και αφετέρου τα συμπεράσματα διαφέρουν. Τέλος, να σημειώσουμε ότι πολλά φαινόμενα μοντελοποιούνται μονάχα σε διακριτό χρόνο εκ κατασκευής. $\square$