

Έκτο Φυλλάδιο Εργασίας

Στοχαστικές Διαδικασίες

Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

Πρώτο Θέμα

Μια ερευνητική ομάδα φυσικών ενδιαφέρεται να μελετήσει ένα συγκεκριμένο σωματίδιο. Για το λόγο αυτό κατασκευάζει μια συσκευή ανίχνευσης αλλά δυστυχώς η συσκευή αυτή ανιχνεύει και άλλα σωματίδια εκτός από το συγκεκριμένο. Έπειτα από αλληπάλληλα πειράματα διαπίστωσαν ότι, κατά μέσο όρο, η συσκευή ανιχνεύει περίπου 250 σωματίδια το δευτερόλεπτο και κατά μέσο όρο τα 5 από αυτά είναι τα σωματίδια που τους ενδιαφέρουν. Ποια είναι η πιθανότητα να ανιχνεύσουν πάνω από 200 σωματίδια του τύπου που τους ενδιαφέρει σε ένα δευτερόλεπτο; Προκειμένου να απαντήσετε σε αυτό πρέπει να κάνετε κάποιες υποθέσεις και στην συνέχεια τους αντίστοιχους υπολογισμούς. Ας υποθέσουμε ότι μετά από αρκετό καιρό από την στιγμή που δώσατε την απάντησή σας η ερευνητική ομάδα, κάνοντας αλληπάλληλα πειράματα, διαπίστωσε ότι το αποτέλεσμα που δώσατε απέχει από την πραγματικότητα. Δεδομένου ότι δεν έχει γίνει κάποιο υπολογιστικό σφάλμα που αποδίδετε την αστοχία αυτή;

Δεύτερο Θέμα

Μας ενδιαφέρει να μοντελοποιήσουμε τον καιρό στην Αθήνα το καλοκαίρι χρησιμοποιώντας στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου. Χωρίζουμε τις καταστάσεις σε 4 κατηγορίες και συμβολίζουμε με 1 τον καύσωνα, με 2 τον αίθριο καιρό, με 3 την συννεφιά και την βροχή και με 4 το χιόνι. Προκειμένου να μοντελοποιηθεί το φαινόμενο έγιναν διάφορες μετρήσεις με τα παρακάτω αποτελέσματα

$$P(X(t+h) = i | X(t) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots) = 1 + h\lambda_i(r_{ii} - 1) + o(h),$$
$$P(X(t+h) = j | X(t) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots) = h\lambda_i r_{ij} + o(h)$$

όπου $h > 0$ ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Δηλαδή μας περιγράφουν πως μεταβάλλεται ο καιρός σε ένα μικρό χρονικό διάστημα και μας δίνουν τα λ_i τα οποία είναι τα (1/2, 1/5, 1, 140) μετρημένα σε ημέρες. Επίσης μας δίνουν τις πιθανότητες r_{ij} στον παρακάτω πίνακα

$$R = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.199 & 0.001 \\ 0.2 & 0.6 & 0.199 & 0.001 \\ 0.1 & 0.5 & 0.39 & 0.01 \\ 0.01 & 0.1 & 0.88 & 0.01 \end{pmatrix}$$

Δεδομένου ότι βρισκόμαστε στην Αθήνα και είναι καλοκαίρι και δεδομένου ότι σήμερα έχει αίθριο καιρό (κατάσταση 2) ποια είναι η πιθανότητα να χιονίσει σε τρεις μέρες από σήμερα; Σχεδιάστε την πιθανότητα συναρτήσε του χρόνου (από $t = 0$ ως $t = 30$). Δεδομένου ότι σήμερα έχει καύσωνα ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε καύσωνα για τις επόμενες 7 ημέρες; Σχεδιάστε την πιθανότητα αυτή συναρτήσε του χρόνου. Δεδομένου ότι σήμερα έχει συννεφιά και δεδομένου ότι (αφού βρισκόμαστε στην Αθήνα) είναι βέβαιο ότι κάποια στιγμή θα έχει καύσωνα σε πόσες ημέρες κατά μέσο όρο θα συμβεί αυτό;

Τρίτο Θέμα

Έστω ότι αποφασίσατε να μελετήσετε ένα φαινόμενο μέσω Μαρκοβιανής διαδικασίας συνεχούς χρόνου τριών καταστάσεων και έπειτα από πειράματα καταλήξατε στα εξής δεδομένα,

$$\Lambda = (0.1, 0.2, 0.4) \text{ και } R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Δεδομένου ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση 2 ποια είναι η πιθανότητα μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα να βρεθεί στην κατάσταση 3; Υπολογίστε το με δυο τρόπους, τόσο με την στάσιμη κατανομή όσο και με τον υπολογισμό του πίνακα μετάβασης. Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ομογενοποίησης (uniformization method), κατασκευάστε κατάλληλο πίνακα μετάβασης της ενσωματωμένης διακριτής αλυσίδας έτσι ώστε να καταλήξετε στην ίδια Μαρκοβιανή αλυσίδα αλλά με $\Lambda = (0.4, 0.4, 0.4)$. Υπολογίστε τον μέσο χρόνο πρώτης επίσκεψης στην κατάσταση 3 ξεκινώντας από την κατάσταση 2.