

**Τέταρτο Φυλλάδιο Εργασίας**  
**Στοχαστικές Διαδικασίες Εαρινό Εξάμηνο 2018-2019**  
**Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς**

(Πρώτο Θέμα) Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίστε τις πιθανότητες πρώτης εισόδου στα κλειστά σύνολα (πιθανότητες απορρόφησης) οι οποίες συμβολίζονται με  $h_i^A$  όπου  $A$  κλειστό σύνολο. Στην συνέχεια υπολογίστε τους μέσους χρόνους πρώτης εισόδου στην ένωση όλων των κλειστών συνόλων, δηλαδή τους  $k_i^{A \cup B}$  όπου  $A, B$  τα κλειστά σύνολα της αλυσίδας. Τέλος, σε κάθε κλειστό σύνολο, υπολογίστε τους μέσους χρόνους πρώτης επίσκεψης, δηλαδή τους  $k_i^j$  όπου  $i, j$  βρίσκονται στο ίδιο κλειστό σύνολο αλλά και τους χρόνους επαναφοράς της κάθε κατάστασης.

(Δεύτερο Θέμα) Έστω ότι ένας παίκτης στο καζίνο έχει πιθανότητα  $p$  σε κάθε παιχνίδι να κερδίσει ένα ευρώ και αντίστοιχα η πιθανότητα να χάσει ένα ευρώ είναι  $q = 1 - p$ . Ο παίκτης έχει αποφασίσει να σταματήσει το παιχνίδι όταν κερδίσει ένα συγκεκριμένο ποσό, έστω  $m$  ή όταν τα χάσει όλα. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το  $S = \{0, 1, \dots, m\}$  και πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

η οποία μοντελοποιεί το παραπάνω φαινόμενο. Να υπολογισθεί η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση  $m$ , δηλαδή την  $h_i^m$ , η οποία παριστάνει την πιθανότητα ο παίκτης να ξεκινήσει με  $i$  Ευρώ και να σταματήσει το παιχνίδι όταν φτάσει τα  $m$  Ευρώ. Υπολογίστε επίσης και τον μέσο χρόνο απορρόφησης  $k_i^A$  με  $A = \{0, m\}$  ο οποίος παριστάνει τον μέσο χρόνο βημάτων που χρειάζονται για να σταματήσει το παιχνίδι ο παίκτης (είτε χάσει είτε κερδίσει).