

Πρώτο Φυλλάδιο Εργασίας
Στοχαστικές Διαδικασίες Εαρινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

(Πρώτο θέμα) Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίστε το ελάχιστο πολυώνυμο με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Στην συνέχεια υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο με την μέθοδο των Leverrier - Faddeev. Έπειτα υπολογίστε την νιοστή δύναμη του πίνακα με την μέθοδο των Cayley-Hamilton. Αν αντικαταστήσετε το n με το -1 θα προκύψει ο αντίστροφος του πίνακα A . Αυτό ισχύει πάντοτε; Αν αντικαταστήσετε το n με το $\frac{1}{3}$ θα προκύψει πίνακας τέτοιος ώστε αν υψωθεί στην τρίτη δύναμη να είναι ίσος με τον πίνακα A . Αυτό ισχύει πάντοτε; Τέλος, θεωρείστε τον παρακάτω πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Κάντε τους ίδιους υπολογισμούς με τον πίνακα A . Ποιο είναι το κέρδος, όσον αφορά το πλήθος των πράξεων, αν υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη ενός πίνακα χρησιμοποιώντας το ελάχιστο αντί του χαρακτηριστικού πολυωνύμου;

(Δεύτερο θέμα) Ένας δορυφόρος βρίσκεται σε τροχιά γύρω από την γη. Σε κάθε περιστροφή υπάρχει πιθανότητα 0.001 να πέσει στην γη και την ίδια πιθανότητα να βγει εκτός τροχιάς στο διάστημα. Υπολογίστε μετά από πόσες περιστροφές η πιθανότητα να παραμείνει σε τροχιά είναι μικρότερη του 10^{-6} . (Υπόδειξη: Κατασκευάστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με τρεις καταστάσεις που περιγράφει το φαινόμενο. Στην συνέχεια υπολογίστε την νιοστή δύναμη του πίνακα μετάβασης. Θα είναι ιδιαίτερα βολικό να τοποθετήσετε τις καταστάσεις με τέτοιο τρόπο ώστε ο πίνακας μετάβασης να είναι κάτω τριγωνικός)

(Τρίτο θέμα) Θεωρείστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε την νιοστή δύναμη του πίνακα.

(Τέταρτο θέμα) Στο πείραμα του περιπατητή υπολογίστε την πιθανότητα να βρεθεί στην γωνία 3 δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την γωνία 1 μετά από 10.000 ρίψεις του νομίσματος.

(Πέμπτο θέμα) Ένας παίκτης παίζοντας ένα τυχερό παιχνίδι έχει πιθανότητα 0.4 να κερδίσει 1 Ευρώ και 0.6 πιθανότητα να χάσει ένα Ευρώ σε κάθε παιχνίδι. Έχει αποφασίσει να σταματήσει το παιχνίδι είτε όταν χάσει όλα του τα χρήματα είτε όταν γίνουν 5 Ευρώ. Αν υποθέσουμε ότι ξεκινά με 3 Ευρώ ποια είναι η πιθανότητα να έχει στην κατοχή του 5 Ευρώ μετά από 100 παιχνίδια; (Υπόδειξη: Κατασκευάστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα και έπειτα υπολογίστε την νιοστή δύναμη του πίνακα μετάβασης. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι κάθε στοχαστικός πίνακας έχει ως ιδιοτιμή την μονάδα με πολλαπλότητα 1 ή παραπάνω.)