ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΕΞΕΤΑΣΗ 17/01/2019

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

(Κάθε άλλη επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή).

(i) Έστω R ο αριθμός των συμβατικών γαντιών και C ο αριθμός των γαντιών υποδοχής που παράγει η εταιρεία. Δεδομένου ότι η εταιρεία επιθυμεί τη μεγιστοποίηση της συνολικής συνεισφοράς στο κέρδος το π.γ.π. είναι το εξής

$$\begin{aligned} \max z = 5R + 8C & \quad \text{(συνάρτηση κέρδους)} \\ R + \frac{3}{2}C \leq 900 & \quad \text{(κοπή και ραφή)} \\ \frac{1}{2}R + \frac{1}{3}C \leq 300 & \quad \text{(φινίρισμα)} \\ \frac{1}{8}R + \frac{1}{4}C \leq 100 & \quad \text{(συσκευασία και αποστολή)} \\ R.C \geq 0 & \quad \text{(περιορισμοί μη αρνητικότητας)} \end{aligned}$$

Ισοδύναμα σε μορφή πινάκων

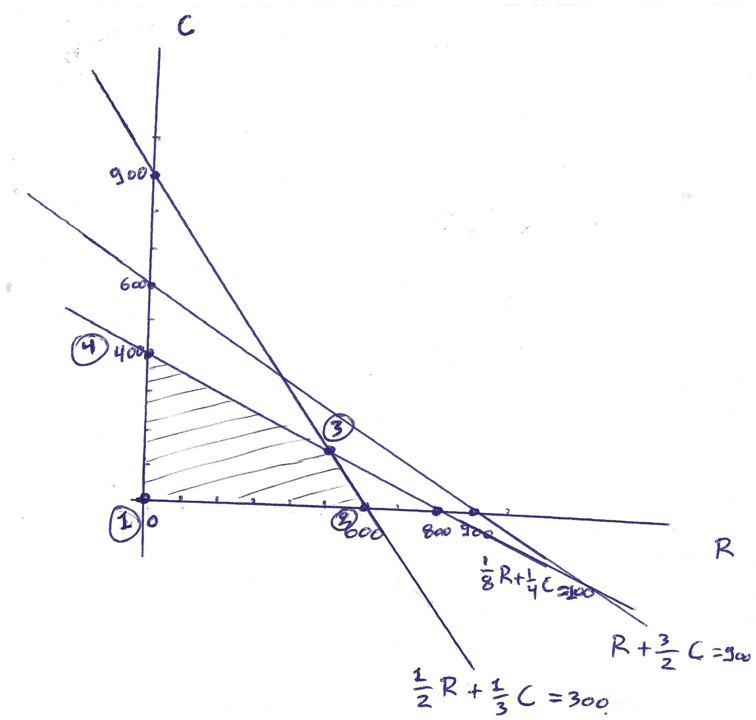
$$\max z = 5R + 8C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ C \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$R, C \geq 0$$

(ii) Παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η ***αναλογικότητα***. Πράγματι, όσον αφορά στην αντικειμενική συνάρτηση, η συνεισφορά στη συνολική τιμή της z από κάθε μεταβλητή απόφασης είναι (γραμμικά) ανάλογη της τιμής που παίρνει η μεταβλητή αυτή. Όσον αφορά στους περιορισμούς, η κατανάλωση του αντίστοιχου πόρου είναι (γραμμικά) ανάλογη της τιμής κάθε μεταβλητής απόφασης. Ικανοποιείται η ***αθροιστικότητα***. Πράγματι, η συνεισφορά κάθε μεταβλητής απόφασης στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z είναι ανεξάρτητη των τιμών που παίρνουν οι υπόλοιπες μεταβλητές απόφασης και η τιμή της z είναι το άθροισμα των επιμέρους τιμών των μεταβλητών απόφασης πολλαπλασιασμένων επί τους αντίστοιχους συντελεστές (κέρδους). Όσον αφορά στους περιορισμούς, η κατανάλωση από κάθε μεταβλητή απόφασης ενός πόρου, στο αριστερό μέλος κάθε περιορισμού, δεν εξαρτάται από τις τιμές που παίρνουν οι άλλες μεταβλητές και η συνολική κατανάλωση κάθε πόρου ισούται με το άθροισμα των επιμέρους καταναλώσεων των μεταβλητών απόφασης. Ικανοποιείται η ***διαιρετότητα*** αφού από υπόθεση οι μεταβλητές απόφασης μπορούν να πάρουν και δεκαδικές τιμές. Ικανοποιείται η ***προσδιοριστικότητα*** αφού γνωρίζουμε με βεβαιότητα τις τιμές όλων των παραμέτρων του προβλήματος (αντικειμενικών συντελεστών, συντελεστών των μεταβλητών απόφασης στα αριστερά μέλη των περιορισμών, δεξιών μελών των περιορισμών).

(iii)



Σχήμα 1

Η εφικτή περιοχή είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο. Οι κορυφές της εφικτής περιοχής είναι: κορυφή 1 $\to (0,0)$, κορυφή 2 $\to (600,0)$ κορυφή 3 $\to (500,150)$ (είναι το σημείο τομής των περιοριστικών ευθειών $\frac{1}{2}R+\frac{1}{3}C = 300$ και $\frac{1}{8}R+\frac{1}{4}C = 100$), κορυφή 4 $\to (0,400)$. Οι αντίστοιχες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι: $z_1 = 0$, $z_2 = 3000$, $z_3 = 3700$, $z_4 = 3200$. Η μέγιστη τιμή είναι η $z = 3700$ για $R = 500$, $C = 150$.

(iv) Θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Simplex ελάχιστου tableau. Αρχικά γράφουμε το πρόβλημα στην κανονική του μορφή

$$\max z = 5R + 8C + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\begin{aligned} R + \frac{3}{2}C + S_1 &= 900 \\ \frac{1}{2}R + \frac{1}{3}C + S_2 &= 300 \\ \frac{1}{8}R + \frac{1}{4}C + S_3 &= 100 \\ R, C, S_1, S_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ισοδύναμα σε μορφή πινάκων

$$\max z = 5R + 8C + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ C \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$R, C, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν $m = 3$ εξισώσεις και $n = 5$ μεταβλητές, οπότε πρέπει να μηδενίσουμε $n - m = 5 - 3 = 2$ μεταβλητές προκειμένου να προσδιορίσουμε μια αρχική βασική εφικτή λύση. Θέτουμε $R = C = 0$ δεδομένου ότι οι μεταβλητές αυτές δεν αντιστοιχούν σε στήλες μοναδιαίου 3×3 υποπίνακα στον πίνακα του συστήματος. Τότε $S_1 = 900$, $S_2 = 300$, $S_3 = 100$, $z = 0$. Ο αρχικός πίνακας της μεθόδου είναι ο

Πίνακας 1

Βασικές μεταβλητές	R	C	S_1	S_2	S_3	**Λύση**
S_1	1	$\frac{3}{2}$	1	0	0	900
S_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	300
S_3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	100
z	-5	-8	0	0	0	0

Κατά τα γνωστά αξονική στήλη είναι η στήλη που αντιστοιχεί στην C, αξονική γραμμή είναι η γραμμή που αντιστοιχεί στην S_3, και αξονικό στοιχείο είναι το $\frac{1}{4}$. Στο νέο πίνακα Simplex η C θα προστεθεί στη στήλη με τις βασικές μεταβλητές (από την οποία στήλη θα αφαιρεθεί η S_3) και εφαρμόζουμε τον τύπο

$$\boxed{\text{νέα αξονική γραμμή} = \frac{\text{παλιά αξονική γραμμή}}{\text{αξονικό στοιχείο}}}$$

οπότε προκύπτει ότι η καινούργια γραμμή 4 είναι η

$$\left[\begin{array}{cccccc} \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} & \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} & \frac{0}{\frac{1}{4}} & \frac{0}{\frac{1}{4}} & \frac{1}{\frac{1}{4}} & \frac{100}{\frac{1}{4}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 4 & 400 \end{array}\right]$$

Ο υπολογισμός των υπόλοιπων γραμμών γίνεται με χρήση του τύπου

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{νέα γραμμή} = \text{παλιά γραμμή} - \text{αντίστοιχος συντελεστής της αξονικής} \\ \text{στήλης} \times \text{νέα αξονική γραμμή}\end{array}}$$

Οπότε έχουμε τις εξής:

<u>νέα γραμμή S_1</u>

$$
\begin{array}{r}
\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 900 \end{bmatrix} \\
-\frac{3}{2} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 4 & 400 \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & -6 & 300 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

<u>νέα γραμμή S_2</u>

$$
\begin{array}{r}
\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 300 \end{bmatrix} \\
-\frac{1}{3} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 4 & 400 \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{500}{3} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

<u>νέα γραμμή z</u>

$$
\begin{array}{r}
\begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
-(-8) \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 4 & 400 \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 32 & 3200 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

και δημιουργείται ο

Πίνακας 2

Βασικές μεταβλητές	R	C	S_1	S_2	S_3	**Λύση**
S_1	$\frac{1}{4}$	0	1	0	–6	300
S_2	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{500}{3}$
C	$\frac{1}{2}$	1	0	0	4	400
z	–1	0	0	0	32	3200

Στην τελευταία γραμμή υπάρχει αρνητικό στοιχείο που σημαίνει ότι η λύση που βρήκαμε δεν είναι βέλτιστη. Ο αλγόριθμος συνεχίζεται με τα ίδια ακριβώς βήματα όπως προηγουμένως και προκύπτει ο

Πίνακας 3

Βασικές μεταβλητές	R	C	S_1	S_2	S_3	**Λύση**
S_1	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	–5	175
R	1	0	0	3	–4	500
C	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	6	150
z	0	0	0	3	28	3700

Η τελευταία γραμμή του πίνακα αυτού δεν περιέχει αρνητικά στοιχεία οπότε ο αλγόριθμος τερματίζει. Η βέλτιστη λύση είναι η $(R, C) = (500, 150)$ με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 3700$.

(v) $S_1 = 175$ οπότε προκύπτουν 175 αχρησιμοποίητες ώρες για κοπή και ραφή, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ οπότε χρησιμοποιούνται όλες οι διαθέσιμες ώρες για φινίρισμα αλλά και για συσκευασία και αποστολή. Εναλλακτικά μπορούμε να αντικαταστήσουμε την βέλτιστη λύση $R = 500$, $C = 150$ στους αντίστοιχους περιορισμούς.