

# Κεφάλαιο 3:

## Γραμμικός προγραμματισμός:

### Ανάλυση ευαισθησίας και ερμηνεία των λύσεων

- 3.1 Εισαγωγή στην ανάλυση ευαισθησίας
- 3.2 Γραφική ανάλυση ευαισθησίας
- 3.4 Προβλήματα με περισσότερες από δύο μεταβλητές απόφασης
- 3.5 Πρόβλημα της Electronic Communications

- Στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο εξετάσαμε τα ακόλουθα θέματα:
  - τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
  - τιμές μεταβλητών απόφασης
  - κόστος ευκαιρίας
  - χαλαρές/πλεονασματικές τιμές
- Στο παρόν Κεφάλαιο θα εξετάσουμε τα ακόλουθα θέματα:
  - μεταβολές στους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης
  - μεταβολές στο δεξιό μέλος των περιορισμών

- Η ανάλυση ευαισθησίας ή ανάλυση μεταβελτιστοποίησης εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζεται η βέλτιστη λύση από την εντός ορισμένων ορίων μεταβολή:
  - των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - των δεξιών μελών των περιορισμών
- Η ανάλυση ευαισθησίας είναι εξαιρετικά χρήσιμη σε στελέχη που καλούνται να διαχειριστούν προβλήματα σε δυναμικό περιβάλλον, με ανακριβείς εκτιμήσεις των συντελεστών.
- Μέσω της ανάλυσης ευαισθησίας είμαστε σε θέση να δώσουμε απαντήσεις σε υποθετικές ερωτήσεις.

## 3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Επανερχόμαστε στο παράδειγμα της Par Inc.

Max  $10S + 9D$

υπό τους περιορισμούς (υ.π.)

$$\frac{7}{10}S + 1D \leq 630 \quad \text{κοπή και βαφή}$$

$$\frac{1}{2}S + \frac{5}{6}D \leq 600 \quad \text{ραφή}$$

$$1S + \frac{2}{3}D \leq 708 \quad \text{φινίρισμα}$$

$$\frac{1}{10}S + \frac{1}{4}D \leq 135 \quad \text{έλεγχος και συσκευασία}$$

$$S, D \geq 0$$

με βέλτιστη λύση ( $S=540$ ,  $D=252$ )

## 3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Με ποιο τρόπο θα μεταβληθεί η βέλτιστη λύση εάν η εταιρεία αποφασίσει :

- να μεταβάλλει την τιμολογιακή της πολιτική και κατά συνέπεια τη συνεισφορά στο κέρδος;
- να μεταβάλλει τους πόρους που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία παραγωγής και κατά συνέπεια τους διαθέσιμους χρόνους παραγωγής;

Πότε απαιτείται η τροποποίηση του μοντέλου και η εκ νέου επίλυση του και πότε η βέλτιστη λύση παραμένει ανεπηρέαστη;

Απαντήσεις στα ανωτέρω ερωτήματα δίνονται μέσω της ανάλυσης ευαισθησίας.

## 3.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

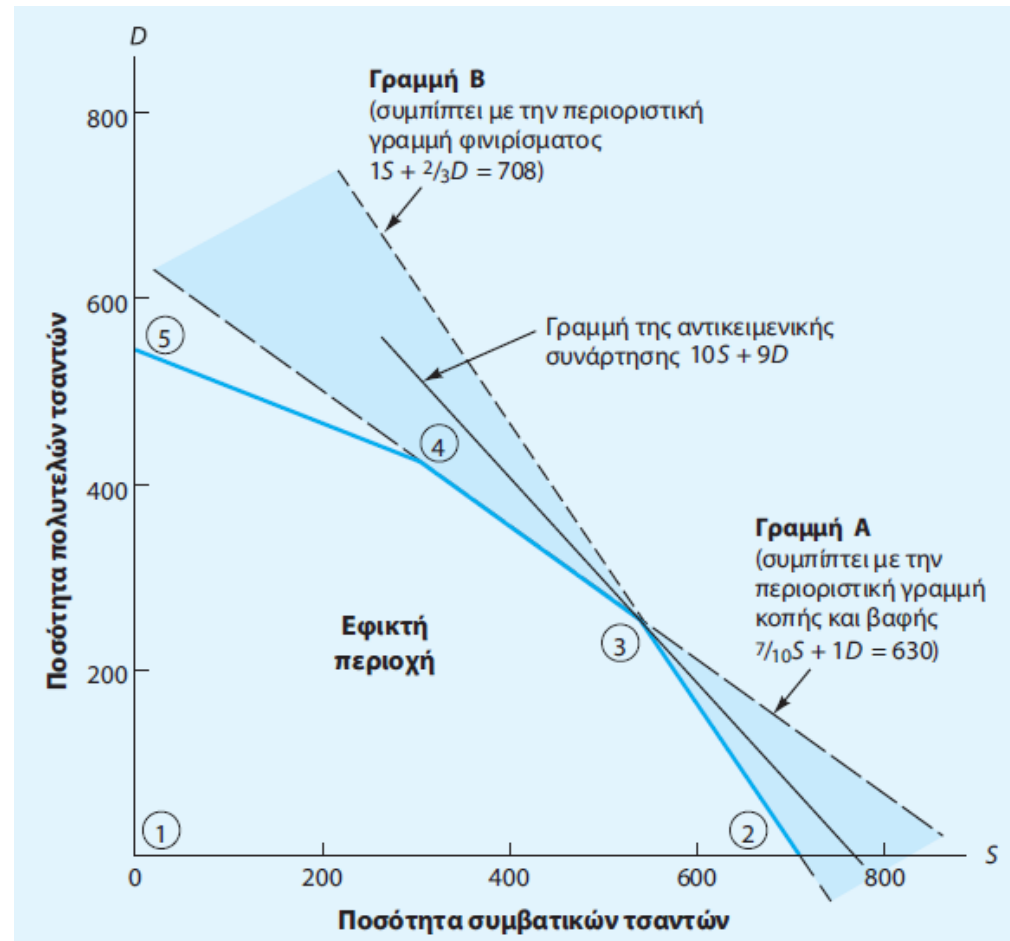
Ας εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο θα επηρεαστεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος της Par Inc. ύστερα από μεταβολή των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης.

Ορίζουμε ως Εύρος αριστότητας, για κάθε συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης, το εύρος των τιμών εντός του οποίου η τρέχουσα λύση θα παραμείνει βέλτιστη.

Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί στους συντελεστές με μικρό εύρος αριστοποίησης, καθώς και σε αυτούς που λαμβάνουν τιμές στα όρια του εύρους.

## 3.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Γραφική επίλυση του προβλήματος της Par Inc. με την κλίση της γραμμής της αντικειμενικής συνάρτησης μεταξύ των γραμμών A και B (Βέλτιστο ακραίο σημείο ③)



## 3.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

- Η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης  $10S+9D$  μεταβάλλεται εάν μεταβληθεί ένας από τους συντελεστές των μεταβλητών απόφασης  $S$  ή  $D$ .
- Εφόσον η κλίση της γραμμής της αντικειμενικής συνάρτησης βρίσκεται μεταξύ της κλίσης της γραμμής  $A$  (η οποία συμπίπτει με την περιοριστική γραμμή κοπής και βαφής) και της κλίσης της γραμμής  $B$  (η οποία συμπίπτει με την περιοριστική γραμμή φινιρίσματος), το ακραίο σημείο ③ ( $S = 540$ ,  $D = 252$ ) θα είναι το βέλτιστο.
- Περιστρέφοντας τη γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης αριστερόστροφα, η κλίση της αυξάνεται (γίνεται «λιγότερο» αρνητική). Εάν η κλίση της αυξηθεί τόσο ώστε να συμπίπτει με τη γραμμή  $A$ , λαμβάνουμε εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις μεταξύ των ακραίων σημείων ③ και ④.
- Περαιτέρω περιστροφή της γραμμής της αντικειμενικής συνάρτησης θα έχει ως αποτέλεσμα το ακραίο σημείο να μην είναι πλέον σημείο ③ βέλτιστης λύσης. Συνεπώς η κλίση της γραμμής  $A$  μας δίνει το άνω όριο για την κλίση της γραμμής της αντικειμενικής συνάρτησης.



## 3.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

- Περιστρέφοντας τη γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεξιόστροφα, η κλίση μειώνεται (γίνεται «περισσότερο» αρνητική). Εάν η κλίση της μειωθεί (περιστροφή δεξιά) τόσο ώστε να συμπίπτει με τη γραμμή B, λαμβάνουμε εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις μεταξύ των ακραίων σημείων ③ και ②.
- Περαιτέρω περιστροφή της γραμμής της αντικειμενικής συνάρτησης προς τα δεξιά θα έχει ως αποτέλεσμα το ακραίο σημείο ③ να μην είναι πλέον σημείο βέλτιστης λύσης. Συνεπώς, η κλίση της γραμμής B μας δίνει το κάτω όριο για την κλίση της γραμμής της αντικειμενικής συνάρτησης.

Συνεπώς, το ακραίο σημείο ③ αποτελεί τη βέλτιστη λύση με την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση:

Κλίση γραμ. B  $\leq$  Κλίση γραμ. αντικειμενικής συνάρτησης  $\leq$  Κλίση γραμ. A

### Γραμμή A (περιοριστική γραμμή Κοπής και Βαφής)

- Εξίσωση :  $\frac{7}{10}S + 1D = 630$
- Λύνοντας ως προς D έχουμε:  $D = -\frac{7}{10}S + 630$   
όπου η τιμή  $-\frac{7}{10}$  αντιστοιχεί στην κλίση της γραμμής A

### Γραμμή B (περιοριστική γραμμή Φινιρίσματος)

- Εξίσωση :  $1S + \frac{2}{3}D = 708$
- Λύνοντας ως προς D έχουμε:  $D = -\frac{3}{2}S + 1.062$   
όπου η τιμή  $-\frac{3}{2}$  αντιστοιχεί στην κλίση της γραμμής B

### Γενική μορφή γραμμής αντικειμενικής συνάρτησης

- Εξίσωση :  $P = C_S S + C_D D$
- Λύνοντας ως προς D έχουμε:  $D = (-C_S / C_D)S + P / C_D$   
όπου ο λόγος  $-C_S / C_D$  αντιστοιχεί στην κλίση της γραμμής

## 3.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Συνεπώς, το ακραίο σημείο ③ αποτελεί τη βέλτιστη λύση με την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση:

$$-3/2 \leq -C_S/C_D \leq -7/10$$

### Εύρος βελτιστοποίησης της συνεισφοράς στο κέρδος των συμβατικών τσαντών

Διατηρούμε σταθερή τη συνεισφορά στο κέρδος των πολυτελών τσαντών ( $C_D=9$ ).

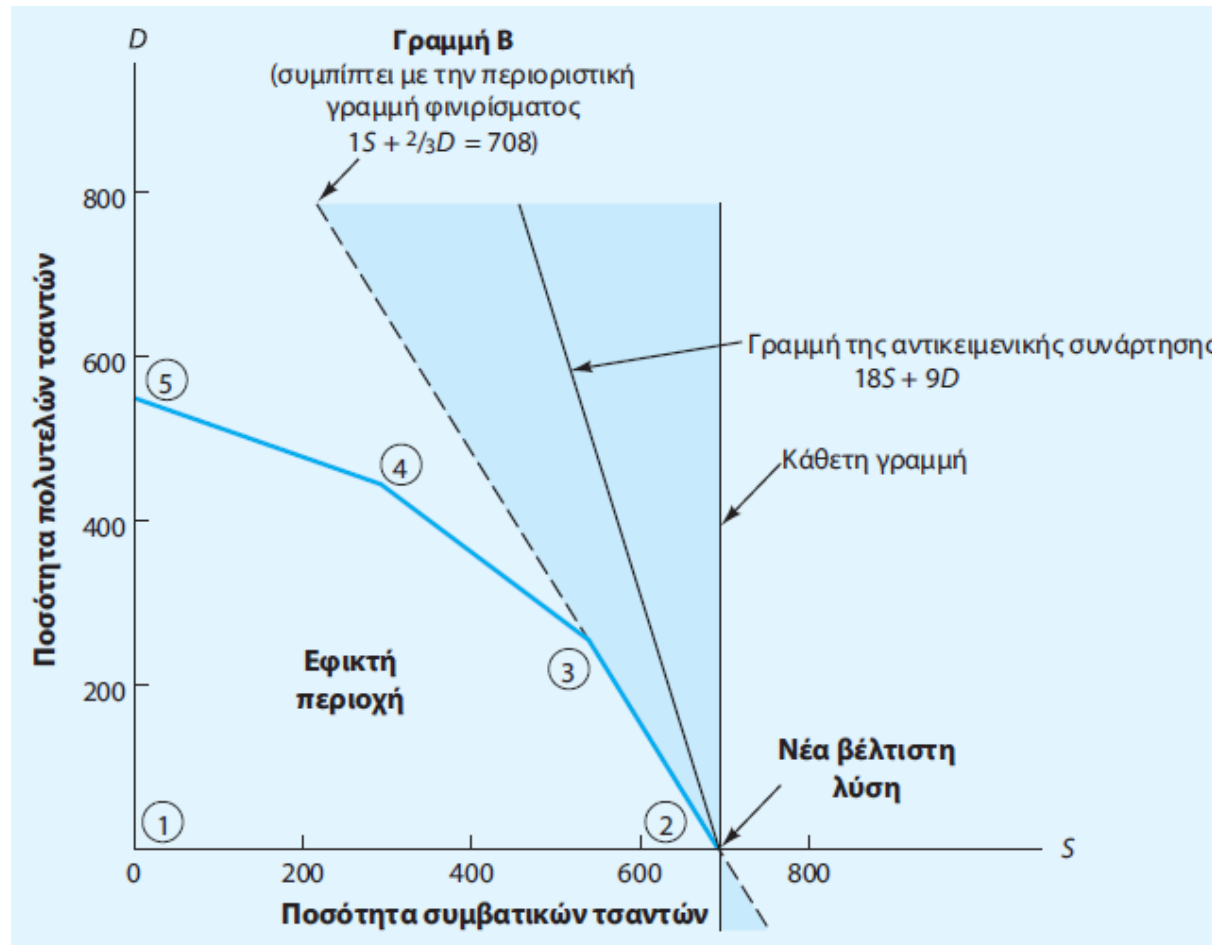
$$-3/2 \leq -C_S/9 \leq -7/10 \quad \text{ή} \quad 6,3 \leq C_S \leq 13,5$$

Το εύρος βελτιστοποίησης της  $C_S$  μας δείχνει ότι με τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές, εάν η συνεισφορά στο κέρδος ανά συμβατική τσάντα λάβει τιμή μεταξύ \$6,30 και \$13,50, τότε και η λύση ( $S=540$ ,  $D=252$ ) θα συνεχίσει να είναι η βέλτιστη.

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία και διατηρώντας σταθερή την συνεισφορά στο κέρδος ανά συμβατική τσάντα ( $C_S=10$ ), λαμβάνουμε εύρος βελτιστοποίησης της συνεισφοράς στο κέρδος ανά πολυτελή τσάντα  $6,67 \leq C_D \leq 14,29$ .

## 3.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Γραφική επίλυση του προβλήματος της Par Inc. με αντικειμενική συνάρτηση  $18S+9D$  και βέλτιστη λύση το ακραίο σημείο ②



### Ταυτόχρονες μεταβολές συντελεστών

Σε περίπτωση που σε ένα πρόβλημα δύο μεταβλητών και οι δύο συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλονται ταυτοχρόνως, υπολογίζουμε την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης ( $-C_S/C_D$ ) για τις νέες τιμές των παραμέτρων και εφόσον αυτή βρίσκεται εντός του εύρους βελτιστοποίησης, οι μεταβολές δεν επηρεάζουν τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Για παράδειγμα, εάν η  $C_S$  γίνει 13 και ταυτόχρονα η  $C_D$  γίνει 8, η νέα κλίση υπολογίζεται ως εξής:

$$-C_S/C_D = -13/8 = -1,625$$

Επειδή η νέα κλίση είναι μικρότερη από το κάτω όριο ( $-3/2$ ), η λύση ( $S=540, D=252$ ) δεν είναι πλέον η βέλτιστη. Επιλύοντας το πρόβλημα για  $C_S=13$  και  $C_D=8$  βρίσκουμε ότι το ακραίο σημείο ② αποτελεί τη νέα βέλτιστη λύση.

### Μεταβολές στο δεξιό μέλος των περιορισμών

Ας υποθέσουμε ότι για το πρόβλημα της Par.Inc. έχουμε στη διάθεση μας 10 επιπλέον ώρες εργασίας στον τομέα Κοπής και Βαφής. Το δεξιό μέλος του περιορισμού Κοπής και Βαφής αυξάνεται από 630 σε 640 και ο περιορισμός γράφεται ως εξής:

$$7/_{10} S + 1D \leq 640$$

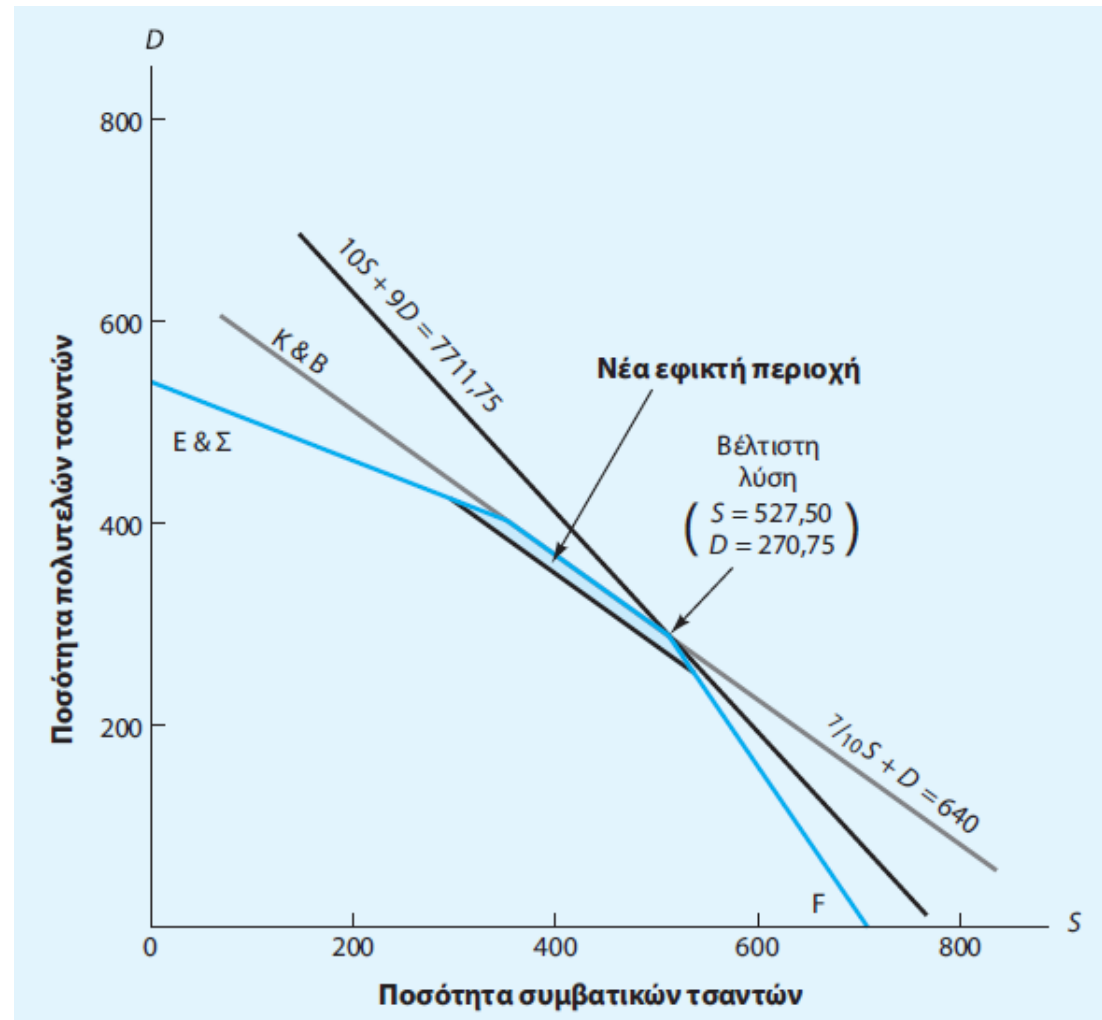
Εξασφαλίζοντας 10 επιπλέον ώρες για το τμήμα Κοπής και Βαφής, η εφικτή περιοχή του προβλήματος διευρύνεται.

Το νέο βέλτιστο σημείο θα είναι το  $(S=527,5, D=270,75)$

Η νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι  $10(527,5) + 9(270,75) = \$7.711,75$ , και προκαλεί αύξηση του κέρδους κατά  $\$7711,75 - \$7668,00 = \$43,75$ . Η αύξηση του κέρδους ανά προστιθέμενη ώρα είναι  $\$43,75/10 \text{ ώρες} = \$4,375$ .

## 3.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Επίδραση της μεταβολής του δεξιού μέλους του περιορισμού Κοπής και Βαφής κατά 10 μονάδες





### Δυική τιμή

Η βελτίωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης ανά μονάδα αύξησης του δεξιού μέλους του περιορισμού ονομάζεται Δυική Τιμή.

Στο εξεταζόμενο παράδειγμα η δυική τιμή για τον περιορισμό Κοπής και Βαφής είναι \$4,375.

Δηλαδή, εάν αυξηθεί/μειωθεί το δεξιό μέλος του περιορισμού Κοπής και Βαφής κατά μία ώρα, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα αυξηθεί/μειωθεί κατά \$4,375.

Επισημαίνεται ότι η δυική τιμή έχει εφαρμογή μόνο για μικρές μεταβολές.

Η δυική τιμή για οποιοδήποτε μη δεσμευτικό περιορισμό είναι μηδέν.

### Ταυτόχρονες μεταβολές

Οι πληροφορίες σχετικά με την ανάλυση ευαισθησίας που περιέχονται στη λύση στηρίζονται στην υπόθεση ότι μεταβάλλεται μόνο ένας συντελεστής.

- **Ερώτηση:**

Υπάρχει η δυνατότητα διενέργειας ανάλυσης ευαισθησίας σε περίπτωση ταυτόχρονης μεταβολής δύο ή περισσότερων συντελεστών;

- **Απάντηση:**

Η ανάλυση ευαισθησίας ταυτόχρονων μεταβολών μπορεί να επιτευχθεί ως ένα βαθμό με χρήση του κανόνα του 100%.

### Κανόνας του 100% για τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης

Για το παράδειγμα της Par Inc. θα υποθέσουμε ότι η αρχικά υπολογισμένη συνεισφορά στο κέρδος των \$10 ανά συμβατική και \$9 ανά πολυτελή τσάντα ήταν λανθασμένη. Οι ορθές τιμές είναι \$11,50 και \$8,25.

Η επιτρεπόμενη αύξηση ενός συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η μέγιστη αύξηση που μπορεί να παρουσιάσει ένας συντελεστής χωρίς να υπερβεί το άνω όριο του εύρους αριστότητας.

Σύμφωνα με τη λύση, το άνω όριο του αντικειμενικού συντελεστή της S είναι 13,49993, άρα η επιτρεπόμενη αύξηση είναι  $3,49993 = (13,49993 - 10)$ .

Σε ποσοστιαίους όρους, η αύξηση κατά \$1,50 του συντελεστή συμβατικών τσαντών (από 10 σε 11,50) είναι το  $(1,50/3,49993)(100) = 42,86\%$  της επιτρεπόμενης αύξησης.

### Κανόνας του 100% για τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης

Η επιτρεπόμενη μείωση ενός συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η μέγιστη μείωση που μπορεί να παρουσιάσει ένας συντελεστής χωρίς να βρεθεί σε επίπεδο χαμηλότερο από το κάτω όριο του εύρους αριστότητας.

Σύμφωνα με τη λύση, το κάτω όριο του αντικειμενικού συντελεστή της D είναι 6,66670, άρα η επιτρεπόμενη μείωση είναι 2,33330 ( $9 - 6,66670$ ).

Σε ποσοστιαίους όρους, η μείωση κατά \$0,75 του συντελεστή πολυτελών τσαντών (από 9 σε 8,25) είναι το  $(0,75/2,33330)(100) = 32,14\%$  της επιτρεπόμενης μείωσης.

### Κανόνας του 100% για τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης

Για το σύνολο των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης που μεταβάλλονται, αθροίζουμε τις ποσοστιαίες μεταβολές επί των επιτρεπόμενων αυξήσεων και μειώσεων. Εάν το άθροισμα των ποσοστών δεν υπερβαίνει το 100%, τότε η βέλτιστη λύση δεν μεταβάλλεται.

Επειδή το άθροισμα των δύο ποσοστιαίων μεταβολών των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης ανέρχεται σε 75%, συμπεραίνουμε ότι οι μεταβολές δεν επηρεάζουν τη βέλτιστη λύση.

- Παρά το γεγονός ότι η βέλτιστη λύση παραμένει σταθερή, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλεται.
- Ο κανόνας του 100% δεν προσδιορίζει εάν θα μεταβληθεί η βέλτιστη λύση σε περίπτωση που το άθροισμα των ποσοστιαίων μεταβολών υπερβεί το 100%.

### Κανόνας του 100% για τα δεξιά μέλη των περιορισμών

Για το σύνολο των δεξιών μελών των περιορισμών που μεταβάλλονται, αθροίζουμε τις ποσοστιαίες μεταβολές επί των επιτρεπόμενων αυξήσεων και μειώσεων. Εάν το άθροισμα των ποσοστών δεν υπερβαίνει το 100%, τότε οι δυϊκές τιμές δεν μεταβάλλονται.

- Η επιτρεπόμενη αύξηση του χρόνου κοπής και βαφής είναι:  
 $682,36316 - 630 = 52,36316$ .  
Οι 20 επιπλέον διαθέσιμες ώρες στο τμήμα κοπής και βαφής αποτελούν ποσοστό  $(20/52,36316)(100) = 38,19\%$  της επιτρεπόμενης αύξησης του δεξιού μέλους του αντίστοιχου περιορισμού.

### Κανόνας του 100% για τα δεξιά μέλη των περιορισμών

- Η επιτρεπόμενη αύξηση του χρόνου φινιρίσματος είναι:

$$900,0 - 708,0 = 192,0.$$

Οι 100 επιπλέον διαθέσιμες ώρες στο τμήμα φινιρίσματος αποτελούν ποσοστό  $(100/192)(100) = 52,08\%$  της επιτρεπόμενης αύξησης του δεξιού μέλους του αντίστοιχου περιορισμού.

Το άθροισμα των ποσοσטיαίων μεταβολών είναι  $38,19\% + 52,08\% = 90,27\%$ .

Συνεπώς, το άθροισμα δεν υπερβαίνει το 100% και μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι οι δυϊκές τιμές ισχύουν.

### Παράδειγμα M&D Chemicals

**Στόχος:** Ελαχιστοποίηση κόστους παραγωγής.

**Μοντέλο:**

$$\text{Min } 2A+3B$$

υ.π.

$$1A \geq 125 \quad \text{Ζήτηση για προϊόν A}$$

$$1A+1B \geq 350 \quad \text{Συνολική Παραγωγή}$$

$$2A+1B \leq 600 \quad \text{Χρόνος Επεξεργασίας}$$

$$A, B \geq 0$$

Με A συμβολίζουμε την ποσότητα σε λίτρα του προϊόντος A και με B την ποσότητα σε λίτρα του προϊόντος B.



### Ερμηνεία αποτελεσμάτων – Παράδειγμα M&D Chemicals

- **Ερώτηση:**

Σε ποιες ποσότητες θα πρέπει να παραχθούν τα προϊόντα A και B προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το κόστος και ποιο θα είναι το ελάχιστο κόστος;

- **Απάντηση:**

Η παραγωγή 250 λίτρων του προϊόντος A και 100 λίτρων του προϊόντος B αποτελούν το μέγεθος της παραγωγής που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Το κόστος παραγωγής που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση είναι \$800.

### Ερμηνεία αποτελεσμάτων – Παράδειγμα M&D Chemicals

- **Ερώτηση:**  
Τι σημαίνουν οι αριθμοί 125, 0 και 0 στη στήλη «Χαλαρή/ Πλεονασματική τιμή»;
- **Απάντηση:**  
Ο Περιορισμός 1 (Ζήτηση για προϊόν A) είναι της μορφής « $\geq$ » και παρουσιάζει πλεόνασμα 125 μονάδων. Δηλαδή, ο όγκος παραγωγής του προϊόντος A ως προς τη βέλτιστη λύση υπερβαίνει τη ζητούμενη ποσότητα κατά 125 λίτρα.  
Οι Χαλαρές/Πλεονασματικές τιμές των απαιτήσεων ως προς τη συνολική παραγωγή (περιορισμός 2) και το χρόνο επεξεργασίας (περιορισμός 3) είναι μηδενικές, άρα οι εν λόγω περιορισμοί είναι δεσμευτικοί στη βέλτιστη λύση.

### Ερμηνεία αποτελεσμάτων – Παράδειγμα M&D Chemicals

- **Ερώτηση:**

Τι σημαίνουν οι αριθμοί 0, -4 και 1 στη στήλη «Δυϊκές τιμές»;

- **Απάντηση:**

Η δυϊκή τιμή «0» καταδεικνύει ότι εάν το δεξιό μέλος του Περιορισμού 1 (Ζήτηση για προϊόν A) αυξηθεί κατά μία μονάδα, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν θα μεταβληθεί.

Η δυϊκή τιμή «-4» καταδεικνύει ότι εάν το δεξιό μέλος του Περιορισμού 2 (Συνολική παραγωγή) αυξηθεί κατά μία μονάδα, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα επιδεινωθεί κατά \$4 μονάδα (αύξηση κόστους κατά \$4).

Η δυϊκή τιμή «1» καταδεικνύει ότι εάν το δεξιό μέλος του Περιορισμού 3 (Χρόνος επεξεργασίας) αυξηθεί κατά μία μονάδα, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα βελτιωθεί κατά \$1 (μείωση κόστους κατά \$1).

### Ερμηνεία αποτελεσμάτων – Παράδειγμα M&D Chemicals

- **Ερώτηση:**

Ποια είναι η ερμηνεία των ελάχιστων και μέγιστων τιμών δεξιού μέλους, της ενότητας «ΕΥΡΟΣ ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ»

- **Απάντηση:**

Εφόσον οι τιμές των δεξιών μελών κυμαίνονται εντός των ανωτέρω ορίων, ισχύουν οι δυϊκές τιμές της λύσης.

### Ερμηνεία αποτελεσμάτων – Επισημάνσεις

- Η δυϊκή τιμή ενός περιορισμού της μορφής « $\leq$ » θα είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν, καθώς η αύξηση του δεξιού μέλους δεν μπορεί να επιδεινώσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Η δυϊκή τιμή ενός περιορισμού της μορφής « $\geq$ » θα είναι πάντα μικρότερη ή ίση με το μηδέν, καθώς η αύξηση του δεξιού μέλους δεν μπορεί να βελτιώσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Σε περίπτωση που η δυϊκή τιμή κάποιου περιορισμού είναι αρνητική, θα πρέπει να αποφευχθεί η αύξηση του δεξιού μέλους του περιορισμού. Αντιθέτως, πρέπει να επιδιωχθεί η μείωση του δεξιού μέλους.

### Εφάπαξ κόστος

- Εφάπαξ είναι το κόστος το οποίο δεν μπορεί να μεταβληθεί από μια απόφαση της επιχείρησης.  
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν 630 διαθέσιμες ώρες για την παραγωγή ενός προϊόντος. Το κόστος των διαθέσιμων ωρών είναι εφάπαξ εάν η επιχείρηση οφείλει να το καταβάλει ανεξάρτητα από τον αριθμό των μονάδων που θα παραχθούν.
- Τα εφάπαξ κόστη δεν πρέπει να αντικατοπτρίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.
- Όταν το κόστος ενός πόρου είναι εφάπαξ, η δυϊκή τιμή ερμηνεύεται ως το μέγιστο ποσό το οποίο η επιχείρηση είναι διατεθειμένη να πληρώσει για μία επιπλέον μονάδα του συγκεκριμένου πόρου.

### Σχετικό κόστος

- Σχετικό είναι το κόστος το οποίο εξαρτάται από τις αποφάσεις της επιχείρησης.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν 630 διαθέσιμες ώρες για την παραγωγή ενός προϊόντος. Το κόστος των διαθέσιμων ωρών είναι σχετικό εάν η επιχείρηση χρεώνεται μόνο τις ώρες που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διαδικασία παραγωγής.

- Τα σχετικά κόστη οφείλουν να αντικατοπτρίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.
- Όταν το κόστος ενός πόρου είναι σχετικό, η δυϊκή τιμή ερμηνεύεται ως το επιπλέον ποσό (premium) επί του αρχικού κόστους που η επιχείρηση είναι διατεθειμένη να πληρώσει για μία επιπλέον μονάδα του συγκεκριμένου πόρου.

Τροποποίηση του προβλήματος της Par Inc.

Υποθέτουμε ότι η διεύθυνση της επιχείρησης εξετάζει το ενδεχόμενο παραγωγής μιας ελαφριάς τσάντας γκολφ (L).

- Υπολογίζεται ότι η κατασκευή μιας ελαφριάς τσάντας απαιτεί 0,8 ώρες κοπής και βαφής, 1 ώρα Ρραφής, 1 ώρα φινιρίσματος και 0,25 ώρες ελέγχου και συσκευασίας.
- Υπολογίζεται ότι η συνεισφορά στο κέρδος ανά μονάδα ελαφριάς τσάντας ανέρχεται σε \$12,85.

$$\begin{aligned} & \text{Max } 10S + 9D + 12,85L \\ & \text{υ.π.} \\ & 0,7S + 1D + 0,8L \leq 630 \text{ Κοπή και Βαφή} \\ & 0,5S + 0,83333D + 1L \leq 600 \text{ Ραφή} \\ & 1,0S + 0,66667D + 1L \leq 708 \text{ Φινίρισμα} \\ & 0,1S + 0,25D + 0,25L \leq 135 \text{ Έλεγχος και Συσκευασία} \\ & S, D, L \geq 0 \end{aligned}$$