

Κεφάλαιο 5:

Μοντέλα διανομής και δικτύων

5.1 Πρόβλημα μεταφοράς

5.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

- Τα προβλήματα μεταφοράς ανακύπτουν συχνά σε περιπτώσεις σχεδιασμού διανομής αγαθών και υπηρεσιών από τα σημεία προσφοράς προς τα σημεία ζήτησης (πώλησης).
- Συνήθως, οι διαθέσιμες ποσότητες προϊόντων σε κάθε σημείο προσφοράς (πηγή) είναι περιορισμένες και οι ζητούμενες ποσότητες σε κάθε σημείο ζήτησης (προορισμός) είναι δεδομένες.
- Στόχος των προβλημάτων μεταφοράς είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς των αγαθών από τις πηγές προς τους προορισμούς.

5.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Foster Generators

- Το πρόβλημα αναφέρεται στη μεταφορά προϊόντων από τρία εργοστάσια προς τέσσερα κέντρα διανομής.
- Η Foster Generators διαθέτει τρία εργοστάσια, στο Cleveland, στο Bedford και στο York.
- Η δυναμικότητα παραγωγής ως προς έναν συγκεκριμένο τύπο γεννήτριας για το προσεχές τρίμηνο είναι η εξής:

Πηγή	Εργοστάσιο	Δυναμικότητα παραγωγής (μονάδες)
1	Cleveland	5.000
2	Bedford	6.000
3	York	2.500
	Σύνολο	<u>13.500</u>

5.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Foster Generators

- Η διανομή των γεννητριών πραγματοποιείται από τέσσερα περιφερειακά κέντρα διανομής (Boston, Chicago, St. Louis και Lexington).
- Εκτιμάται ότι η ζήτηση ανά κέντρο διανομής για το προσεχές τρίμηνο θα είναι:

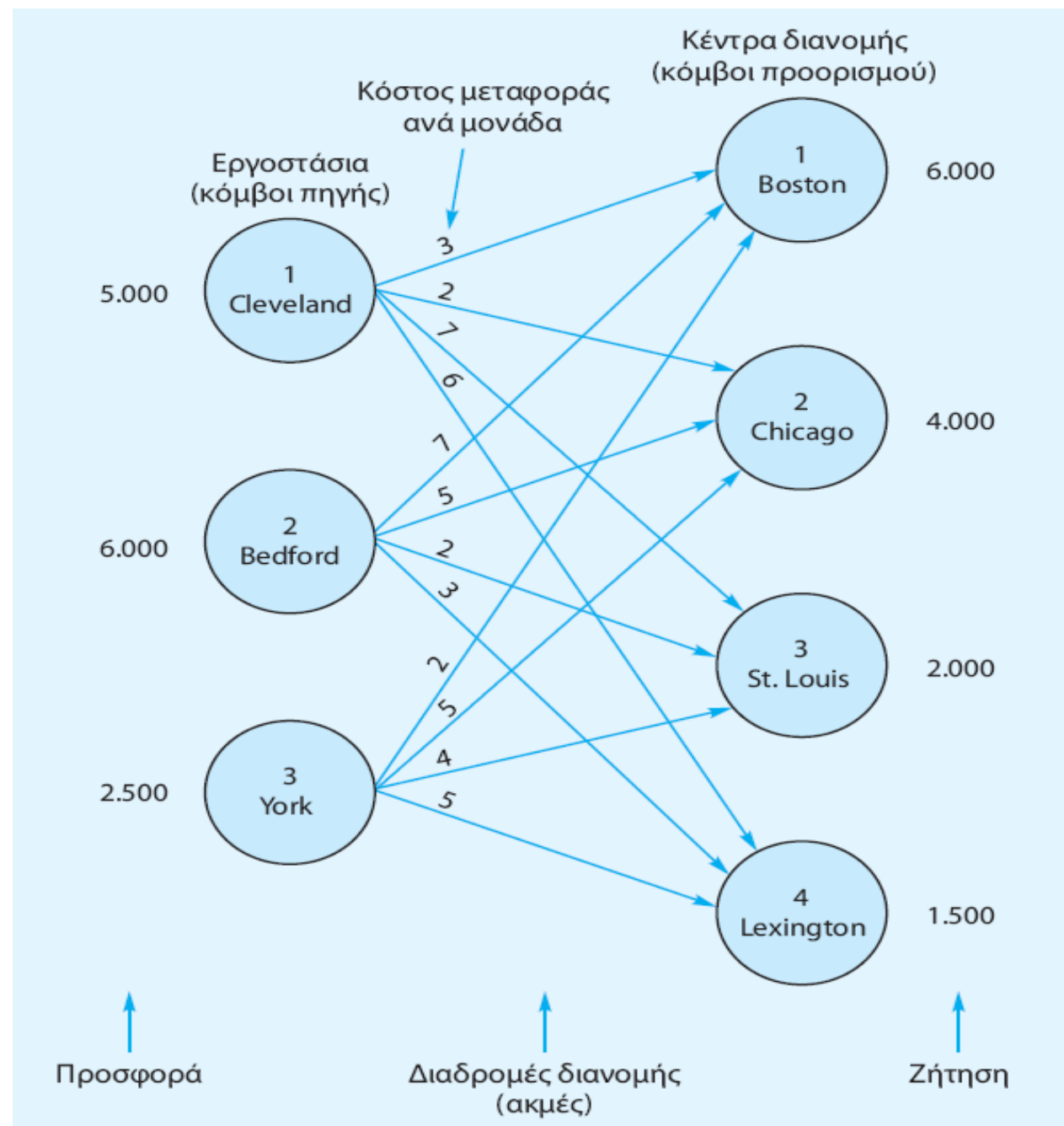
Προορισμός	Κέντρο διανομής	Εκτίμηση ζήτησης (μονάδες)
1	Boston	6.000
2	Chicago	4.000
3	St. Louis	2.000
4	Lexington	1.500
	Σύνολο	<u>13.500</u>

Foster Generators

- Η διαγραμματική απεικόνιση των διαδρομών διανομής που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ονομάζεται **δίκτυο** (Network).
- Οι κύκλοι του διαγράμματος ονομάζονται **κόμβοι** (Nodes) και οι γραμμές που συνδέουν τους κόμβους ονομάζονται **ακμές** (Arcs).
- Κάθε πηγή και προορισμός αναπαρίσταται με έναν κόμβο και κάθε εφικτή διαδρομή αναπαρίσταται από μία ακμή.

Foster Generators

- Οι προσφερόμενες ποσότητες αναγράφονται δίπλα σε κάθε κόμβο και οι ζητούμενες ποσότητες δίπλα σε κάθε κέντρο διανομής.
- Τα προϊόντα που μεταφέρονται από τις πηγές προς τους προορισμούς αποτελούν τη ροή του δικτύου.
- Η κατεύθυνση της ροής (από την πηγή προς τον προορισμό) προσδιορίζεται από τα βέλη των ακμών του διαγράμματος.



5.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Foster Generators

Ο στόχος είναι ο προσδιορισμός των διαδρομών που θα χρησιμοποιηθούν και των ποσοτήτων που θα διακινηθούν μέσω κάθε διαδρομής που θα ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος μεταφοράς.

5.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Foster Generators

- Το ανά μονάδα κόστος μεταφοράς για κάθε διαδρομή παρουσιάζεται στον παρακάτω Πίνακα (και απεικονίζεται στις ακμές του δικτύου):

Πηγή	Προορισμός			
	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington
Cleveland	3	2	7	6
Bedford	7	5	2	3
York	2	5	4	5

Foster Generators

- Το εξεταζόμενο πρόβλημα μεταφοράς μπορεί να επιλυθεί μέσω ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού.
- Συμβολίζουμε τις μεταβλητές απόφασης των προβλημάτων μεταφοράς με m πηγές και n προορισμούς ως εξής:

x_{ij} = αριθμός μονάδων που μεταφέρονται από την πηγή i
προς τον προορισμό j ,

όπου,

$i = 1, 2, \dots, m$ και

$j = 1, 2, \dots, n$

Foster Generators

- Χρησιμοποιούμε τα στοιχεία κόστους που έχουν δοθεί για να διατυπώσουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

Κόστος μεταφοράς των μονάδων που μεταφέρονται από το Cleveland $= 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14}$

Κόστος μεταφοράς των μονάδων που μεταφέρονται από το Bedford $= 7x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24}$

Κόστος μεταφοράς των μονάδων που μεταφέρονται από το York $= 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}$

- Το άθροισμα των ανωτέρω σχέσεων αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση που δείχνει το συνολικό κόστος μεταφοράς για τη Foster Generators.

Foster Generators

- Περιορισμοί:

Η δυναμικότητα του εργοστασίου στο Cleveland είναι 5.000 μονάδες. Εφόσον ο συνολικός αριθμός των μονάδων που μεταφέρονται από το Cleveland είναι $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$, ο περιορισμός προσφοράς για το συγκεκριμένο εργοστάσιο είναι:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 5.000 \quad \text{Προσφορά Cleveland}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 6.000 \quad \text{Προσφορά Bradford}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 2.500 \quad \text{Προσφορά York}$$

5.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Foster Generators

- Περιορισμοί:

Προκειμένου να εξασφαλιστεί η κάλυψη της ζήτησης στα τέσσερα κέντρα διανομής, απαιτούνται τέσσερις περιορισμοί:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6.000$$

Ζήτηση Boston

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4.000$$

Ζήτηση Chicago

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2.000$$

Ζήτηση St. Louis

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1.500$$

Ζήτηση Lexington

Η συνολική προσφορά θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με τη συνολική ζήτηση, προκειμένου να προκύψει εφικτή λύση του προβλήματος.

5.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

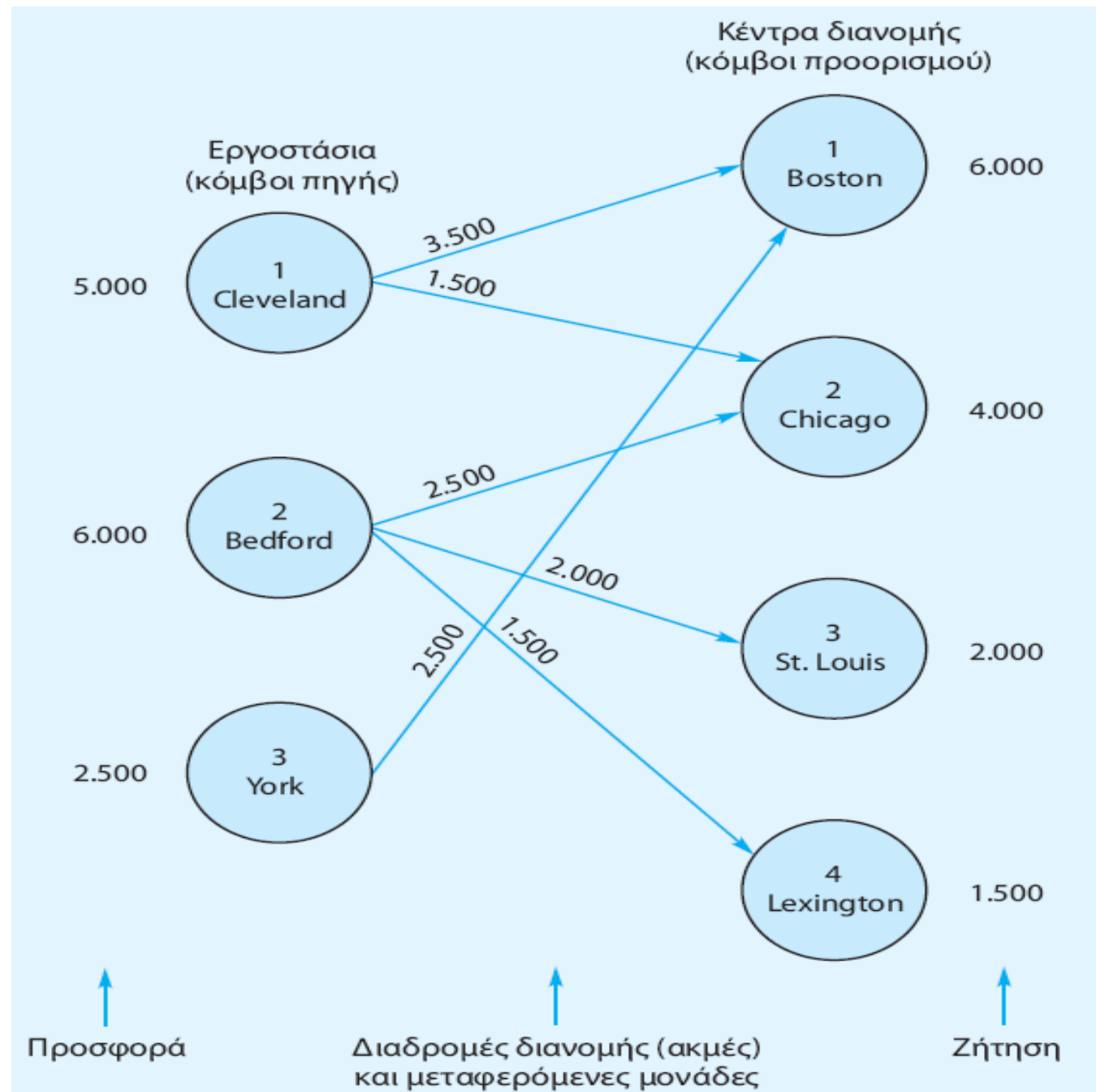
Foster Generators (λύση)

Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης =		39500,000
Μεταβλητή	Τιμή	Κόστος ευκαιρίας
-----	-----	-----
x11	3500,000	0,000
x12	1500,000	0,000
x13	0,000	8,000
x14	0,000	6,000
x21	0,000	1,000
x22	2500,000	0,000
x23	2000,000	0,000
x24	1500,000	0,000
x31	2500,000	0,000
x32	0,000	4,000
x33	0,000	6,000
x34	0,000	6,000

5.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Foster Generators (πρόγραμμα μεταφοράς ελάχιστου κόστους)

Από	Διαδρομή		Μεταφερόμενες μονάδες	Κόστος ανά μονάδα (\$)	Συνολικό κόστος (\$)
	Προς				
Cleveland	Boston		3.500	3	10.500
Cleveland	Chicago		1.500	2	3.000
Bedford	Chicago		2.500	5	12.500
Bedford	St. Louis		2.000	2	4.000
Bedford	Lexington		1.500	3	4.500
York	Boston		2.500	2	5.000
					<hr/> 39.500



Foster Generators

- Το ελάχιστο συνολικό κόστος μεταφοράς είναι \$39.500.
- Για παράδειγμα, το $x_{11} = 3.500$ σημαίνει ότι 3.500 μονάδες θα πρέπει να μεταφερθούν από το Cleveland στο Boston και το $x_{12} = 1.500$ σημαίνει ότι 1.500 μονάδες θα πρέπει να μεταφερθούν από το Cleveland στο Chicago.

Foster Generators (παραλλαγές του προβλήματος)

- Παραλλαγές του βασικού μοντέλου μεταφοράς ενδέχεται να περιλαμβάνουν τις ακόλουθες περιπτώσεις:
 1. Συνολική προσφορά διάφορη της συνολικής ζήτησης.
 2. Αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποίησης.
 3. Δυναμικότητα διαδρομών ή ελάχιστες ποσότητες διαδρομών.
 4. Μη αποδεκτές διαδρομές.

Foster Generators (παραλλαγές του προβλήματος)

1. Συνολική προσφορά διάφορη της συνολικής ζήτησης

- Εάν η συνολική προσφορά υπερβαίνει τη συνολική ζήτηση, δεν απαιτείται τροποποίηση του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού.
- Η υπερβάλλουσα προσφορά θα εμφανιστεί ως χαλαρή τιμή στη βέλτιστη λύση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Foster Generators (παραλλαγές του προβλήματος)

1. Συνολική προσφορά διάφορη της συνολικής ζήτησης

- Εάν η συνολική προσφορά είναι μικρότερη από τη συνολική ζήτηση, το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού δεν έχει εφικτή λύση.
- Σε αυτή την περίπτωση τροποποιούμε το δίκτυο, προσθέτοντας μια εικονική πηγή, με προσφορά ίση με τη διαφορά συνολικής ζήτησης και συνολικής προσφοράς.

Foster Generators (παραλλαγές του προβλήματος)

1. Συνολική προσφορά διάφορη της συνολικής ζήτησης

Όταν η συνολική προσφορά είναι μικρότερη από τη συνολική ζήτηση, το μοντέλο δεν είναι σε θέση να προσδιορίσει τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να διαχειριστούμε το τμήμα της ζήτησης που δεν θα καλυφθεί (π.χ. ακύρωση παραγγελιών). Τα διοικητικά στελέχη που είναι αρμόδια πρέπει να διαχειριστούν τη συγκεκριμένη πτυχή του προβλήματος.

Foster Generators (παραλλαγές του προβλήματος)

2. Αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποίησης

- Σε ορισμένες περιπτώσεις προβλημάτων μεταφοράς, ο στόχος είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης που μεγιστοποιεί τα κέρδη ή τα έσοδα.
- Χρησιμοποιώντας τα ανά μονάδα κέρδη ή έσοδα ως συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης, ουσιαστικά επιλύουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης αντί για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Foster Generators (παραλλαγές του προβλήματος)

3. Δυναμικότητα διαδρομών ή ελάχιστες ποσότητες διαδρομών

- Υποθέτουμε ότι η διαδρομή York Boston (πηγή 3 – προορισμός 1) έχει δυναμικότητα 1.000 μονάδων, εξαιτίας περιορισμένης χωρητικότητας του μέσου μεταφοράς που χρησιμοποιείται.
Ο αντίστοιχος περιορισμός θα είναι: $x_{31} \leq 1.000$.
- Με τον ίδιο τρόπο (αλλά με αντίστροφο πρόσημο) μπορούμε να ορίσουμε ελάχιστες ποσότητες διαδρομών.

Foster Generators (παραλλαγές του προβλήματος)

4. Μη αποδεκτές διαδρομές

- Τέλος, ενδέχεται να μην είναι δυνατή η δημιουργία διαδρομών από κάθε πηγή προς κάθε προορισμό.
- Για να διαχειριστούμε αυτή την κατάσταση, διαγράφουμε τη συγκεκριμένη ακμή από το δίκτυο και την αντίστοιχη μεταβλητή από το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού.

Γενικό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού

- Για την παρουσίαση του γενικού μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού για προβλήματα μεταφοράς με m πηγές και n προορισμούς, χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

x_{ij} = αριθμός των μονάδων που μεταφέρονται
από την Πηγή i προς τον Προορισμό j

c_{ij} = κόστος ανά μονάδα που μεταφέρεται
από την Πηγή i προς τον Προορισμό j

s_i = προσφορά ή δυναμικότητα της Πηγής i (σε μονάδες)

d_j = ζήτηση στον Προορισμό j (σε μονάδες)

5.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Γενικό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού

- Το γενικό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού έχει τη μορφή:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

υ.π.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{Προσφορά}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{Ζήτηση}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{για κάθε } i \text{ και } j$$

- Η γραφική απεικόνιση των δικτύων αποτελείται από κόμβους πηγής, προορισμού και, αν αυτό απαιτείται, από κόμβους μεταφόρτωσης.
- Για την αναπαράσταση της μεταφοράς, της μετακίνησης ή της ροής μεταξύ κόμβων, χρησιμοποιούμε ακμές.

- Το γενικό πρόβλημα μεταφοράς έχει m πηγές και n προορισμούς.
- Το μοντέλο μεταφοράς προσδιορίζει τη βέλτιστη ποσότητα που θα μεταφερθεί από κάθε πηγή προς κάθε προορισμό.