

Εισαγωγή στην Αποτίμηση Παραγώγων

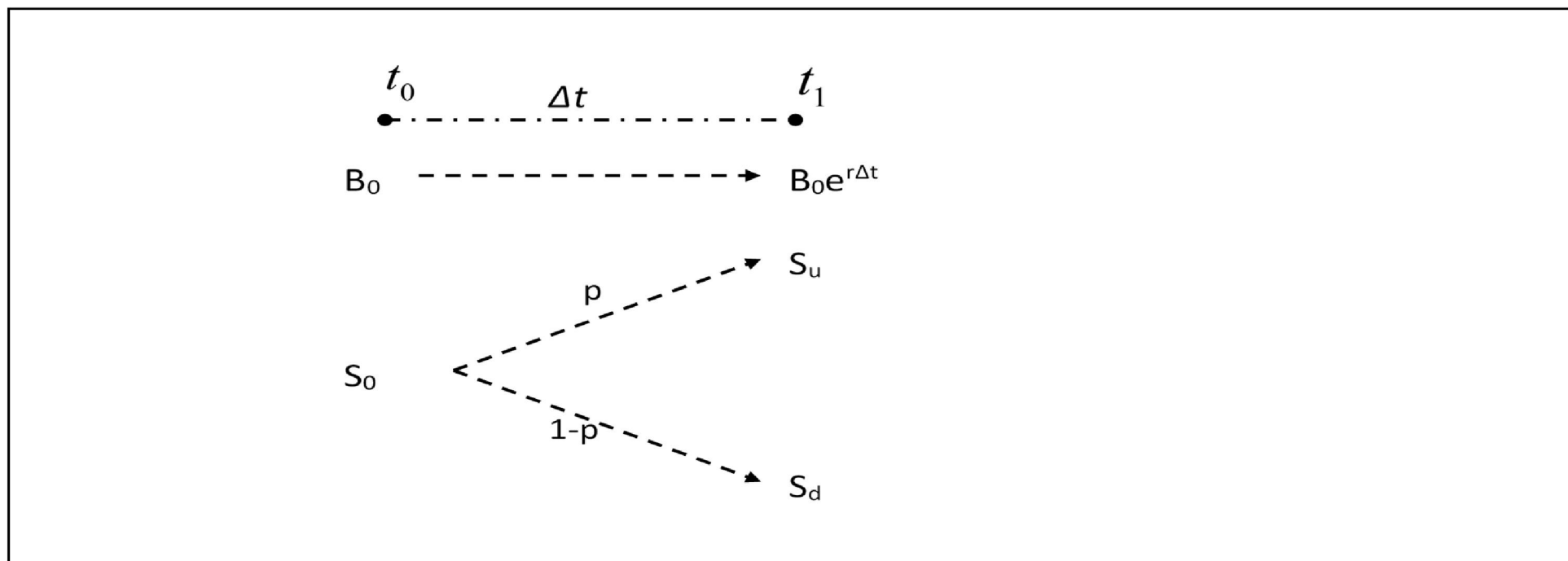
Στέλιος Ξανθόπουλος
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Εισαγωγή στο διωνυμικό μοντέλο

Το διωνυμικό μοντέλο μιάς περιόδου

- **Η Αγορά**
- Δύο μόνο χρονικές στιγμές, t_0 και t_1 που καθορίζουν μια χρονική περίοδο $\Delta t = t_1 - t_0$
- Η αξία του χρήματος για αυτή τη χρονική περίοδο αντιπροσωπεύεται από ένα Τραπεζικό λογαριασμό με σταθερό επιτόκιο r , συνεχώς ανατοκιζόμενο
- Η αβεβαιότητα για το μέλλον αντιπροσωπεύεται από ένα αξιόγραφο S το οποίο την t_0 αξίζει S_0 και την t_1 θα λάβει μια από δύο μόνο τιμές $S_u > S_d$ με κάποιες πιθανότητες p και $1-p$ αντίστοιχα

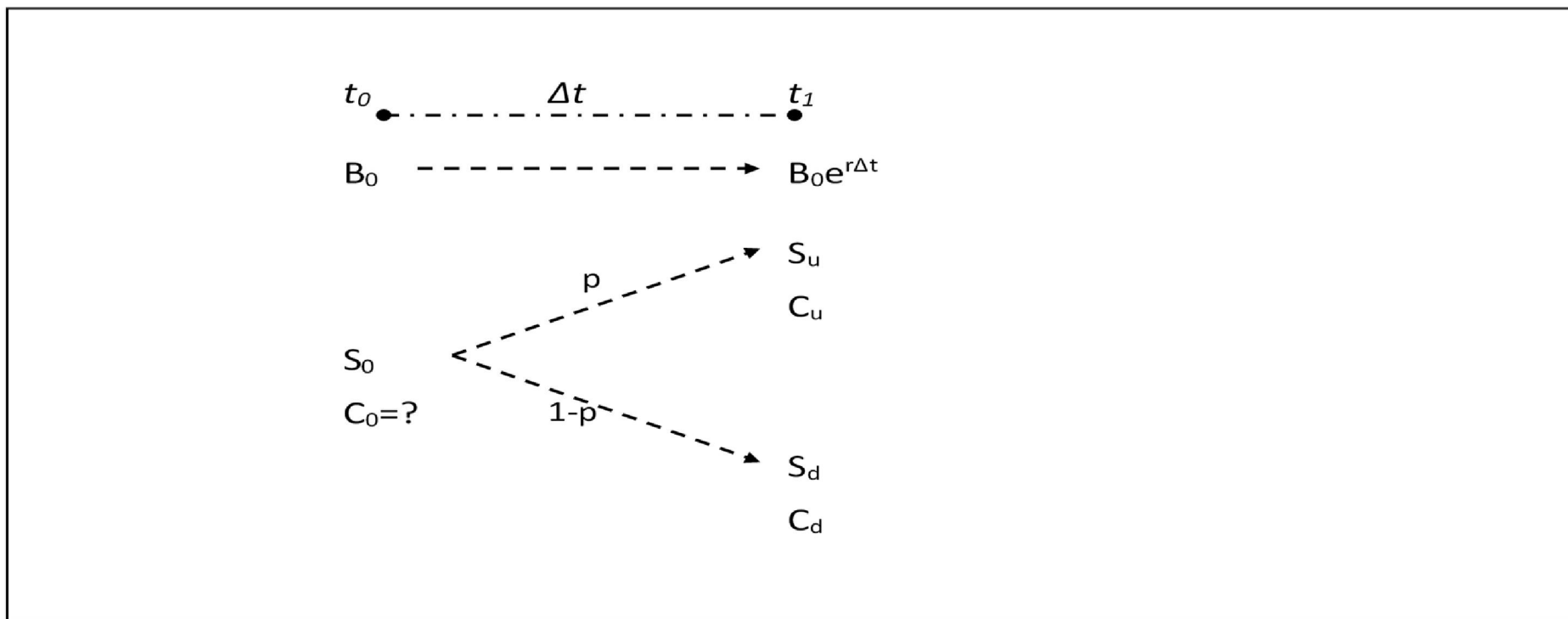
Η Αγορά

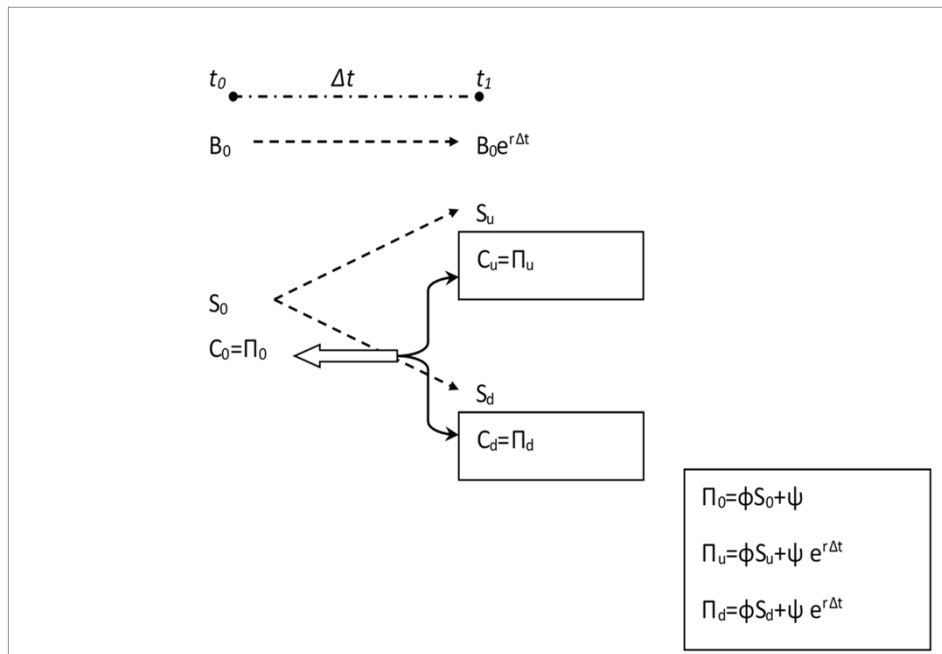


Για να μην υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage θα πρέπει προφανώς
$$S_d < S_0 \cdot e^{r\Delta t} < S_u$$

Το συμβόλαιο

Ποια πρέπει να είναι την χρονική στιγμή t_0 η τιμή C_0 του συμβολαίου C ώστε να μη δημιουργούνται ευκαιρίες arbitrage σε αυτήν την αγορά?





Η τιμολόγηση

Βρες ϕ και ψ ώστε

$$C_u = \phi S_u + \psi e^{r\Delta t}$$

$$C_d = \phi S_d + \psi e^{r\Delta t}$$

$$\phi = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \quad \text{και} \quad \psi = e^{-r\Delta t} \frac{S_u C_d - S_d C_u}{S_u - S_d}$$

Τότε:

$$C_0 = \underbrace{\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}}_{\phi} S_0 + e^{-r\Delta t} \underbrace{\frac{S_u C_d - S_d C_u}{S_u - S_d}}_{\psi}$$

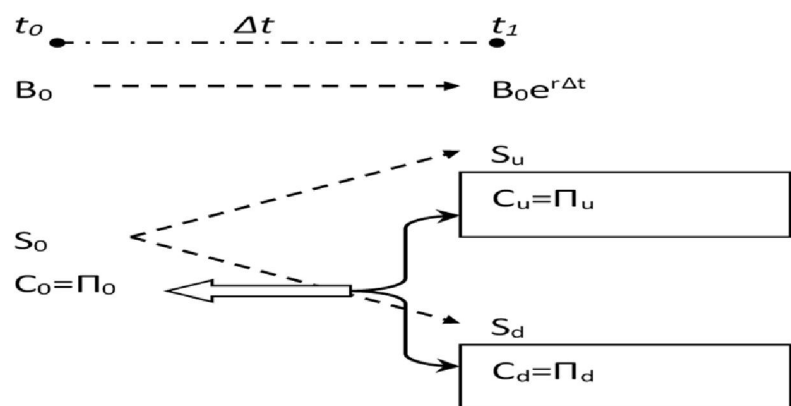
Risk neutral πιθανότητες

- Η τελευταία σχέση για το C_0 είναι ισοδύναμη με την

$$C_0 = \underbrace{e^{-r\Delta t}}_{\text{Παρούσα αξία}} \left[\underbrace{\left(\frac{S_0 e^{r\Delta t} - S_d}{S_u - S_d} \right)}_{0 < q < 1} C_u + \underbrace{\left(\frac{S_u - S_0 e^{r\Delta t}}{S_u - S_d} \right)}_{0 < 1 - q < 1} C_d \right]$$

Μίστη πμή κάτω από το μέτρο πιθανότητας Q της τελικής αξίας του συμβολαίου

Συνοψίζοντας



$$q = \frac{S_0 \cdot e^{r\Delta t} - S_d}{S_u - S_d}$$

$$\phi = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$$

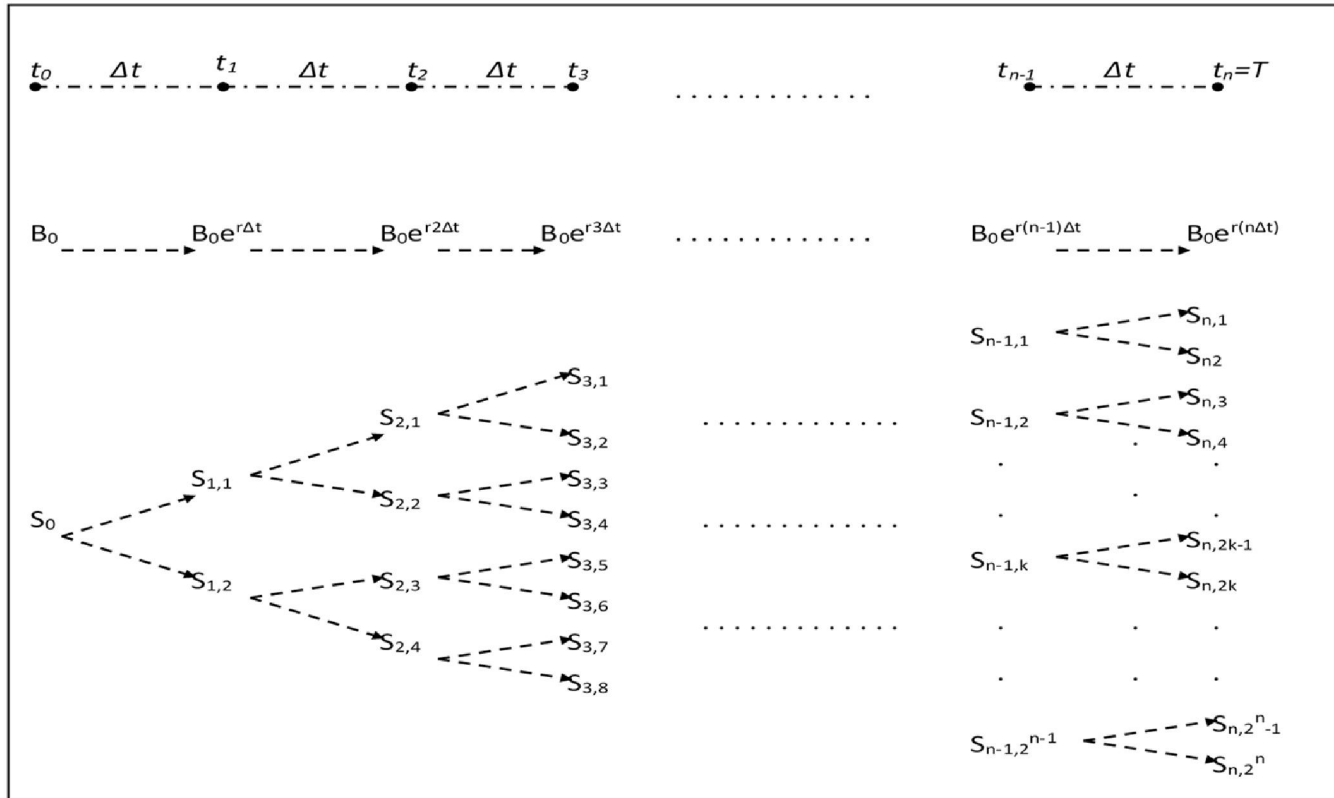
$$C_0 = e^{-r\Delta t} \cdot [q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d]$$

$$\Pi_0 = \phi S_0 + \psi$$

$$\Pi_u = \phi S_u + \psi e^{r\Delta t}$$

$$\Pi_d = \phi S_d + \psi e^{r\Delta t}$$

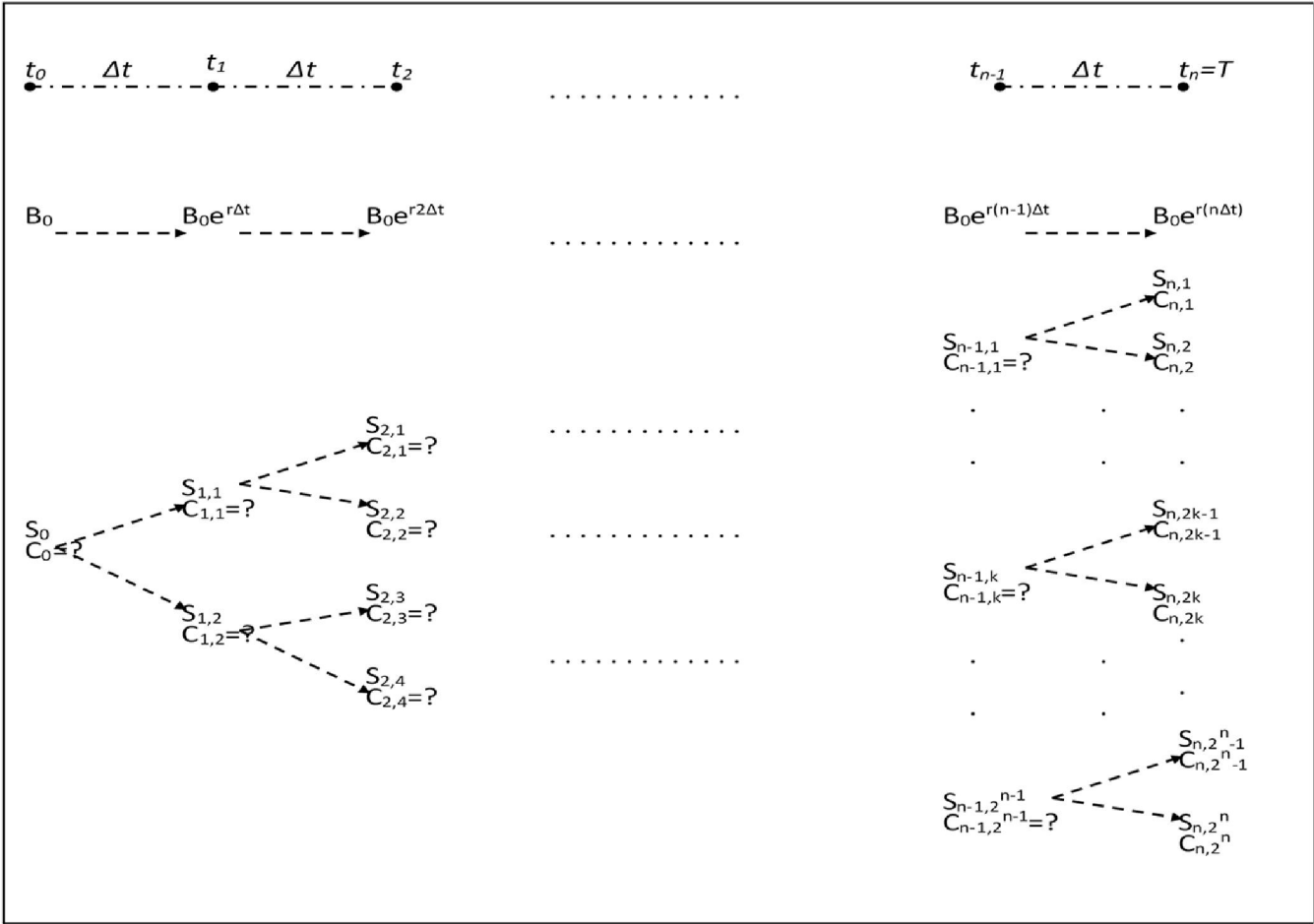
Το Διωνυμικό Μοντέλο Πολλών Περιόδων



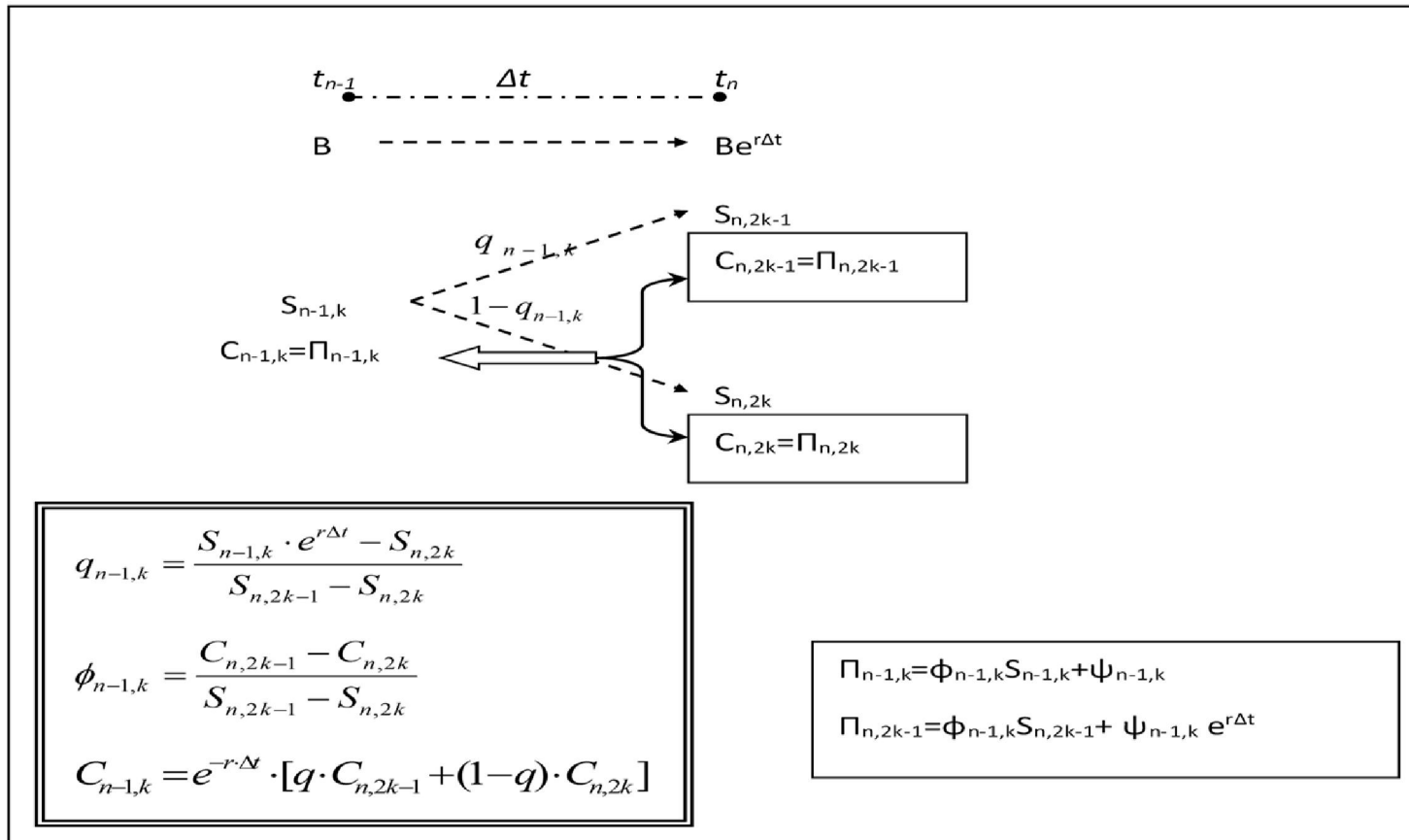
Για να μην υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage σε αυτή την αγορά θα πρέπει για όλα τα $t=1,2,\dots,n$ και για όλα τα $k=1,2,\dots,2^t$ να ισχύει ότι:

$$S_{t,2k} < S_{t-1,k} \cdot e^{r\Delta t} < S_{t,2k-1}$$

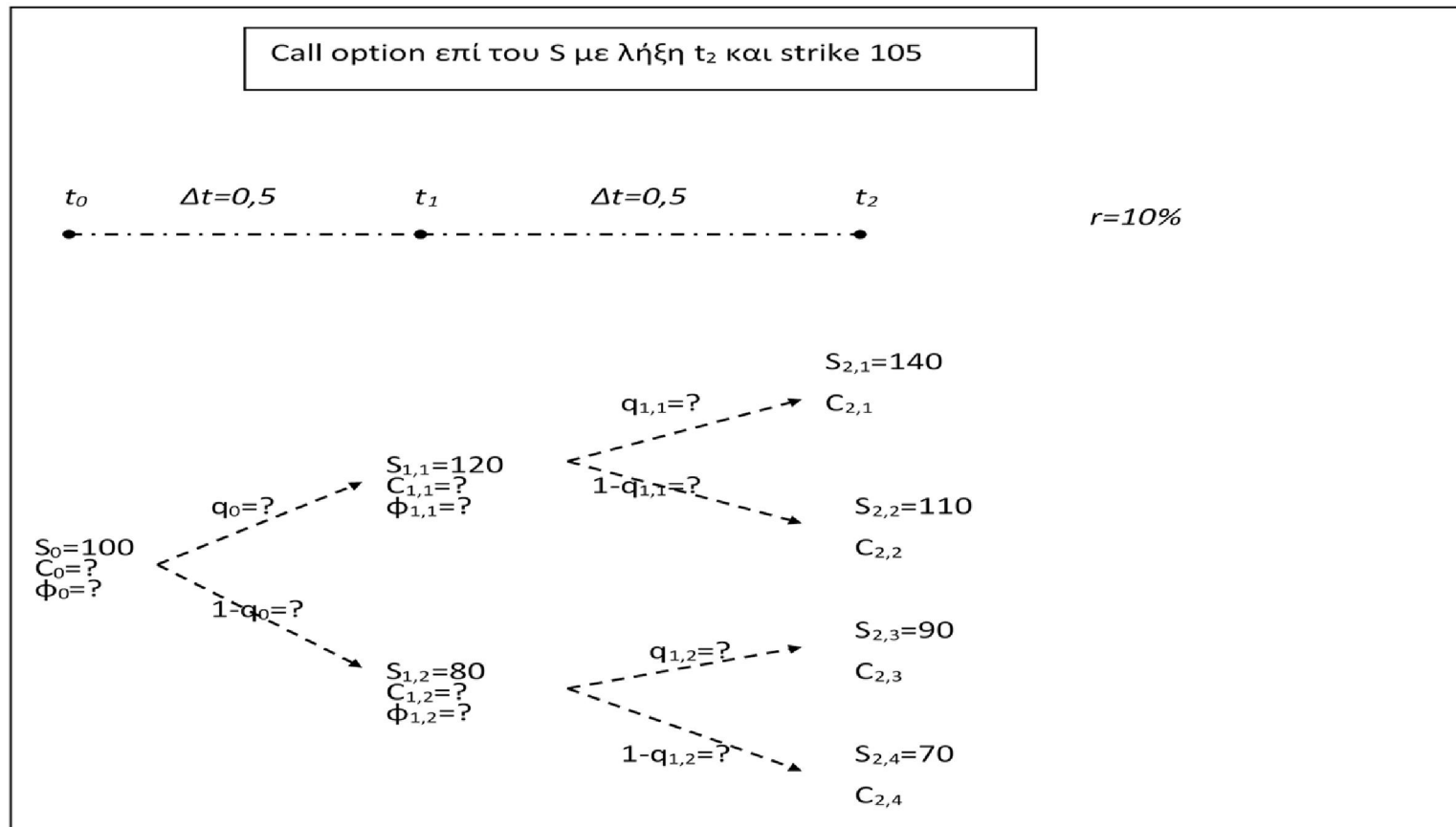
Το συμβόλαιο



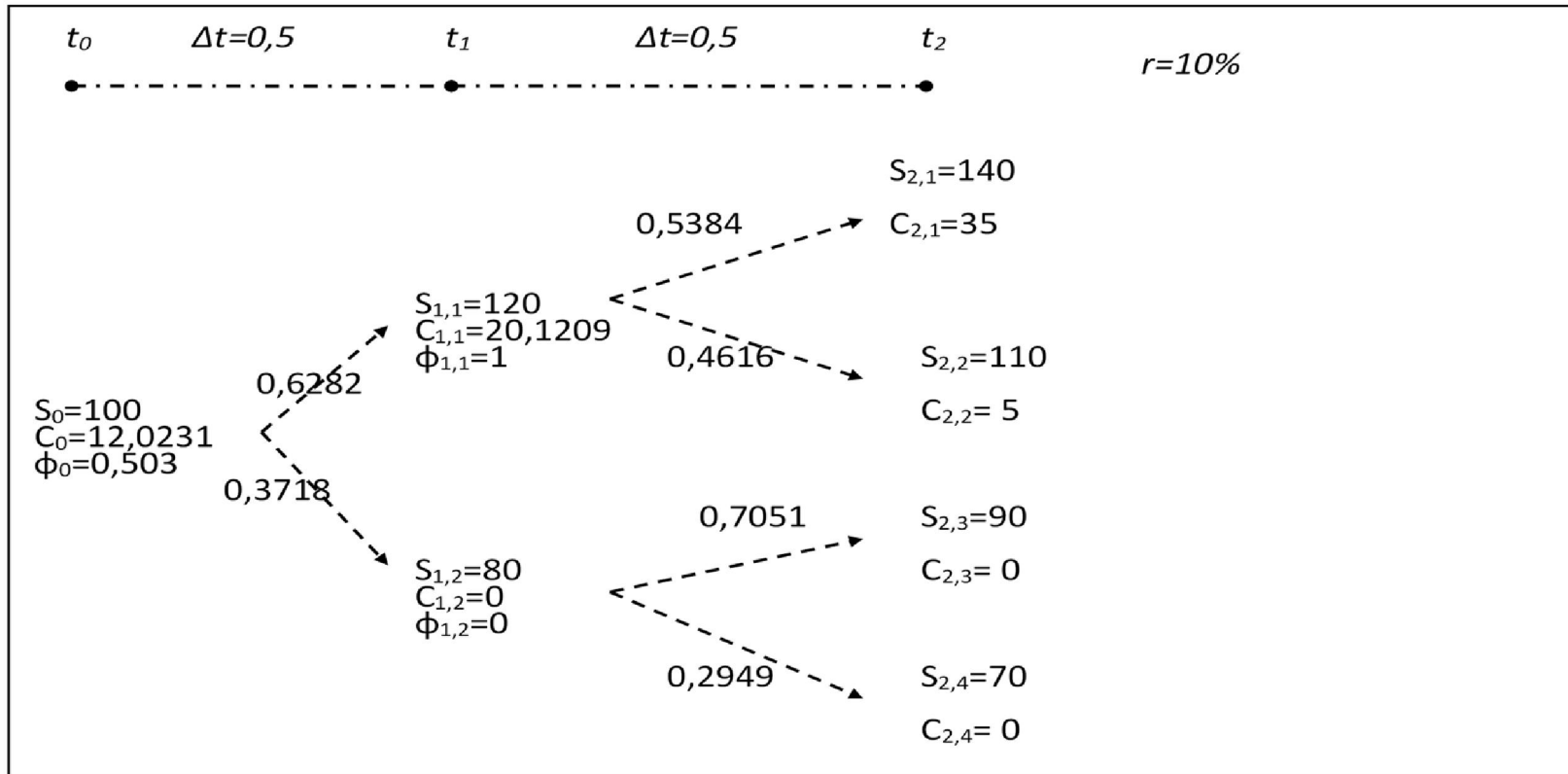
=πολλά μοντέλα μιας περιόδου



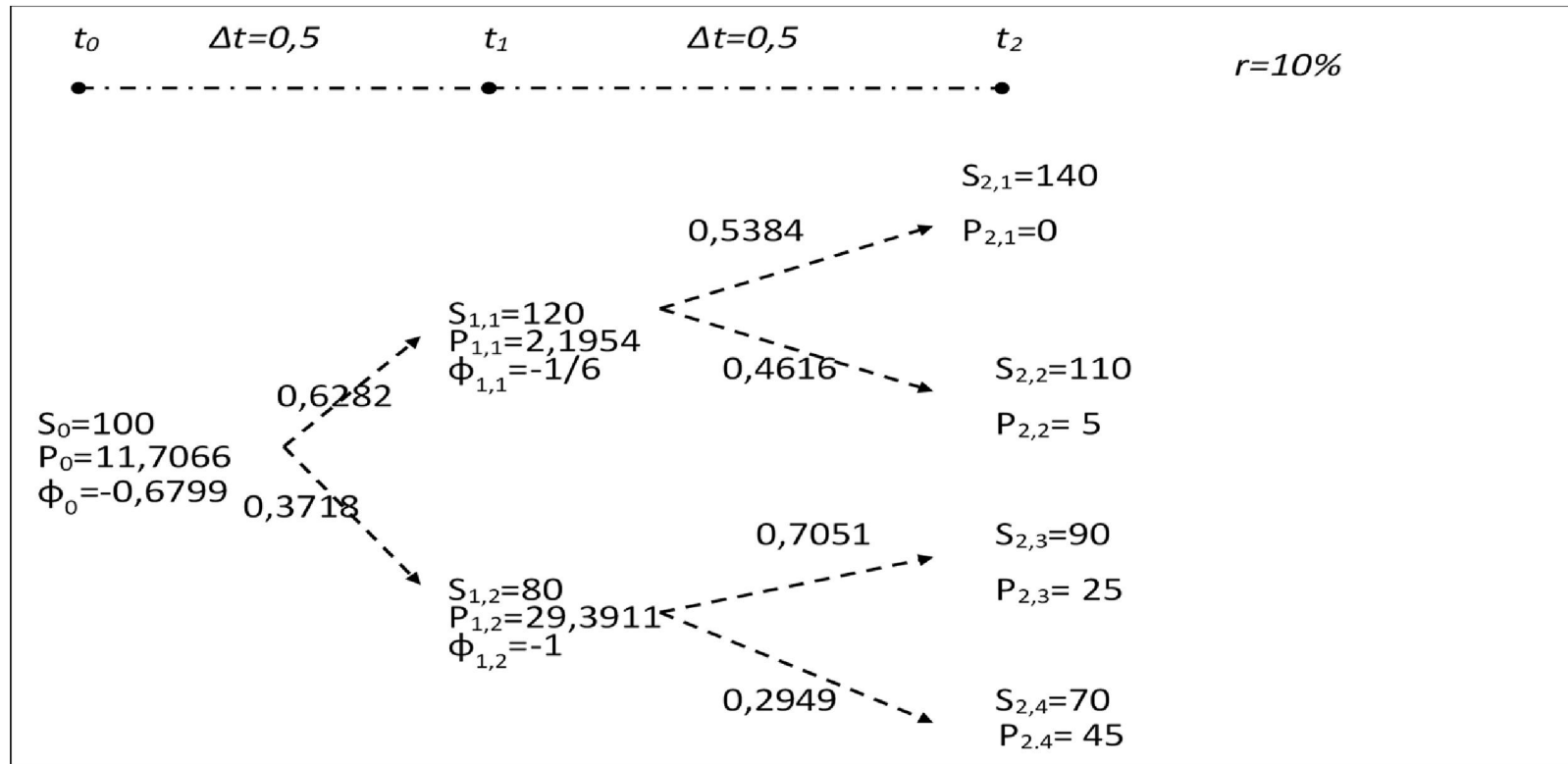
Παράδειγμα European Call



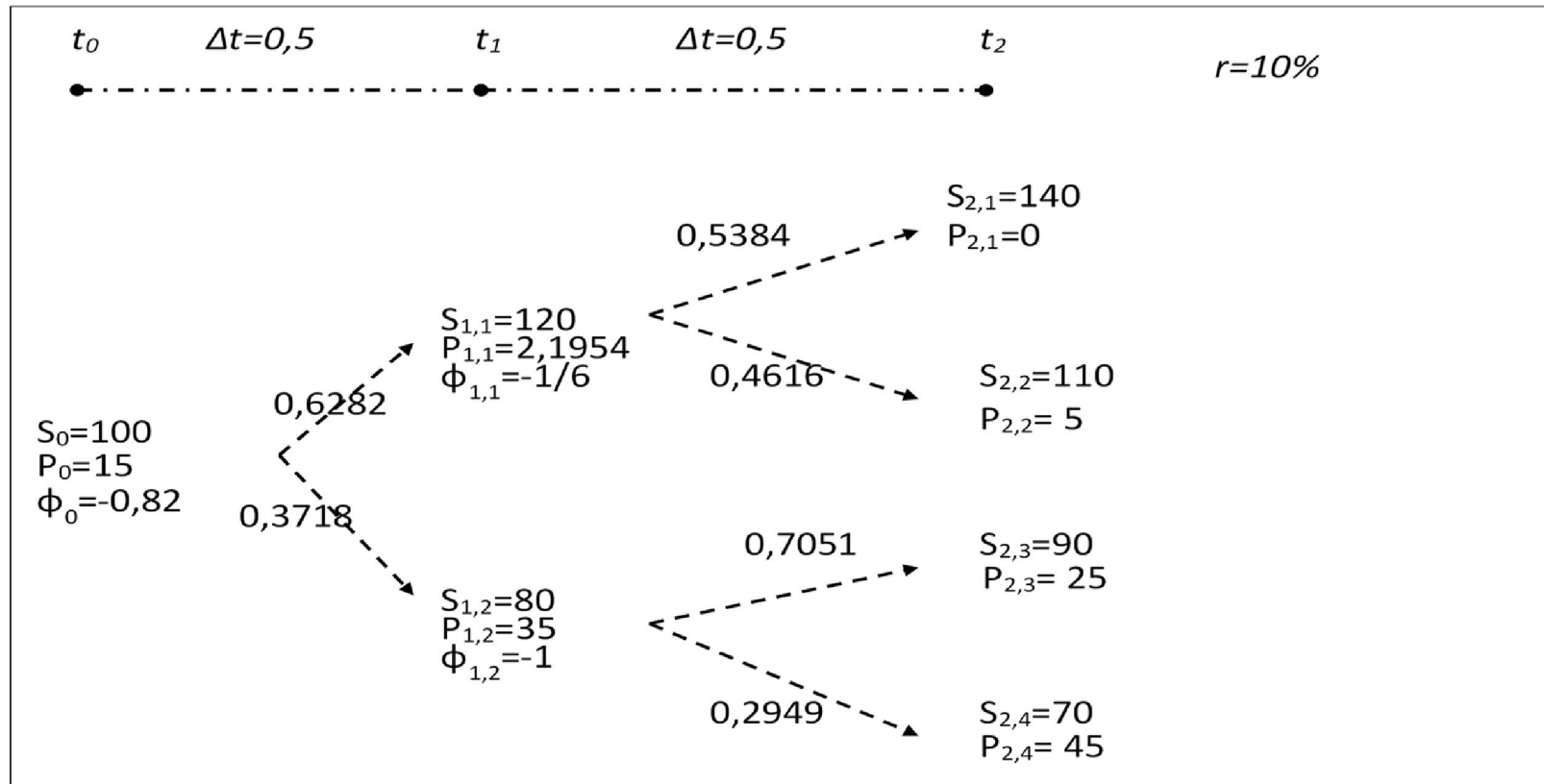
European Call λύση



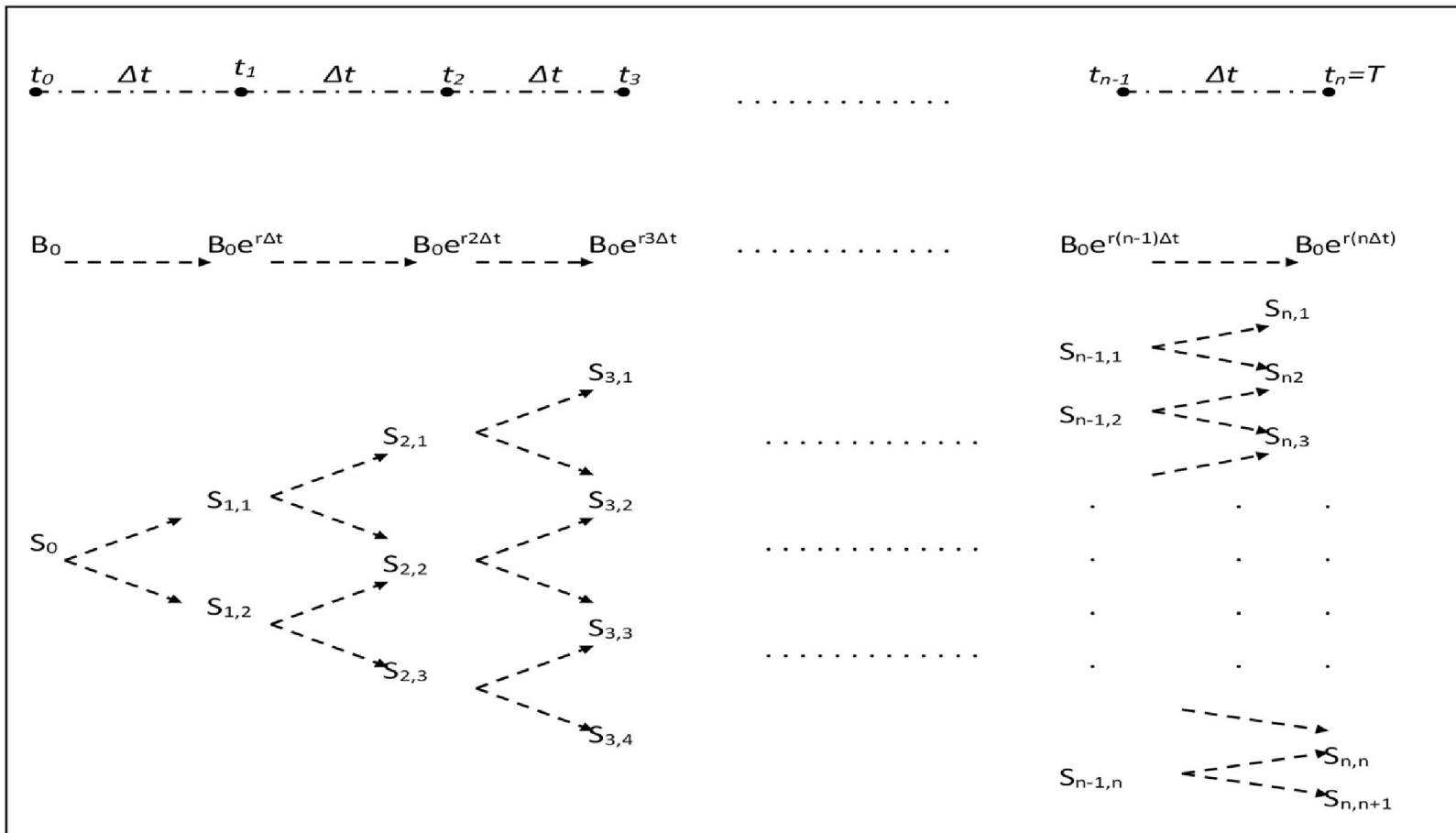
European Put (strike 115)



American Put (strike 115)



Αναδιπλούμενα δέντρα



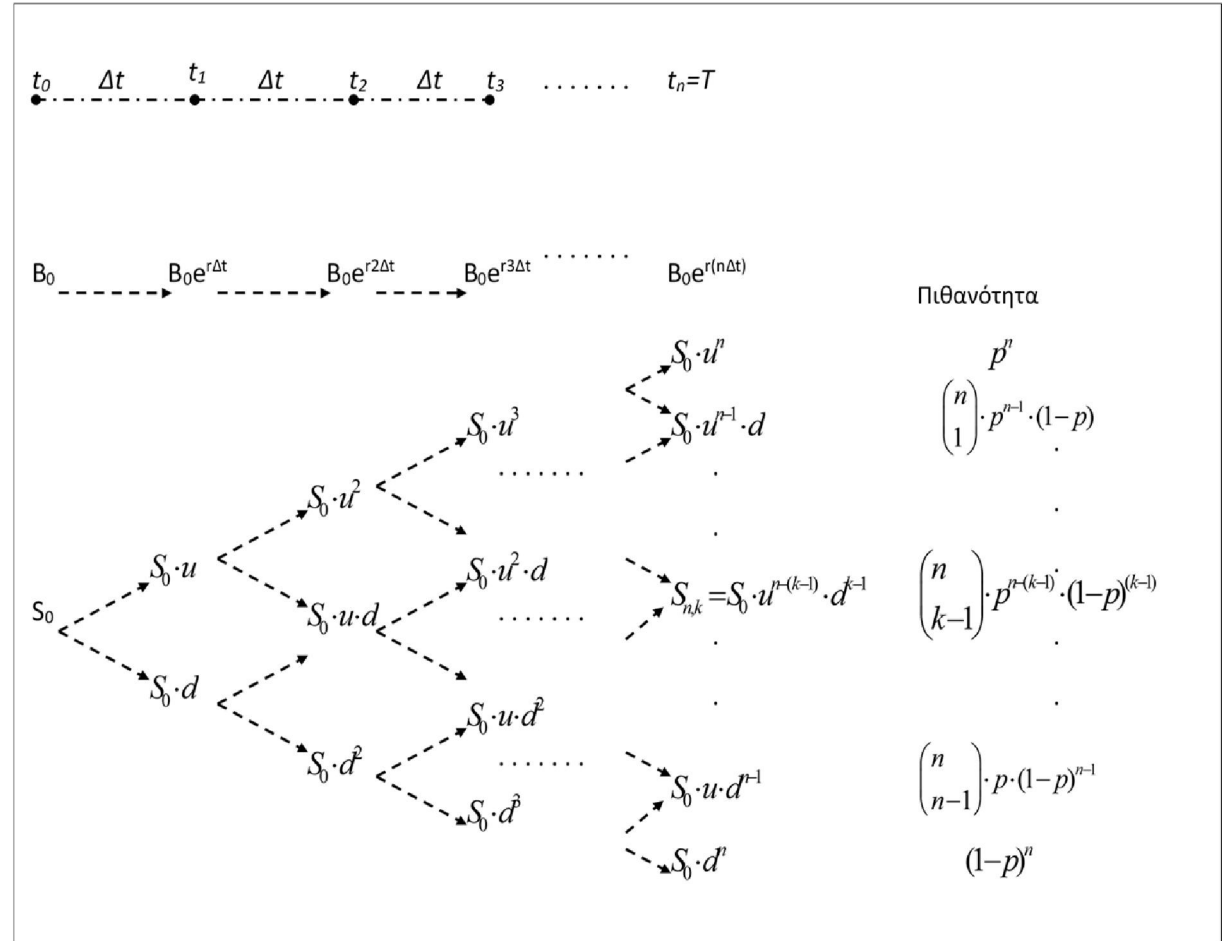
Απλοποίηση του μοντέλου

$$S(t_{k+1}) = \begin{cases} S(t_k) \cdot u & \text{με πιθανότητα } p \\ S(t_k) \cdot d & \text{με πιθανότητα } (1-p) \end{cases}$$

$$q = \frac{S_t \cdot e^{r\Delta t} - S_t \cdot d}{S_t \cdot u - S_t \cdot d} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

$$C_0 = e^{-rT} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot q^{(n-k)} \cdot (1-q)^k \cdot C_{n,k+1} = e^{-rT} \cdot E_Q[C_n]$$

Πώς να διαλέξω όμως τα u , d και p ?



Η λογαριθμοκανονική κατανομή των τιμών
του αβέβαιου τίτλου

Αριθμητική απόδοση

- αριθμητική απόδοση του S στο διάστημα από t_1 έως t_2 ορίζεται ως

$$r_{[t_1, t_2]} = \frac{S_{t_2} - S_{t_1}}{S_{t_1}}$$

- ισοδύναμο με το $S_{t_2} = S_{t_1} (1 + r_{[t_1, t_2]})$
- $r_{[t_1, t_3]} \neq r_{[t_1, t_2]} + r_{[t_2, t_3]}$, που δεν είναι ιδιαίτερα βολικό

Γεωμετρική (ή λογαριθμική) απόδοση

- γεωμετρική (ή λογαριθμική) απόδοση του S στο διάστημα από t_1 έως t_2 ορίζεται ως $R_{[t_1, t_2]} = \ln\left(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}\right)$
- ισοδύναμο με το $S_{t_2} = S_{t_1} \exp(R_{[t_1, t_2]})$
- Παρατηρείστε ότι τώρα $R_{[t_1, t_3]} = R_{[t_1, t_2]} + R_{[t_2, t_3]}$

Οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή?

- Το πιο απλό ρεαλιστικό μοντέλο υποθέτει ότι οι (γεωμετρικές) **αποδόσεις** του υποκείμενου τίτλου (π.χ. μιας μετοχής) ακολουθούν **κανονική** κατανομή (και κατά συνέπεια οι τιμές της μετοχής ακολουθούν *λογαριθμικοκανονική* κατανομή).
- Ας δούμε κάποιες ελάχιστες υποθέσεις κάτω από τις οποίες αυτό το μοντέλο αιτιολογείται

- Θεωρούμε μια πολύ μικρή χρονική περίοδο Δt
- χρονικές στιγμές $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_2 = 2 \cdot \Delta t, \dots$
- S_{t_k} τυχαία μεταβλητή της τιμής του τίτλου S την t_k
- $R_{\Delta t_k} \equiv R_{[t_{k-1}, t_k]} \equiv \ln \left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \right)$
- **Υπόθεση: Οι αποδόσεις $R_{\Delta t_k}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με κοινή μέση τιμή $\mu_{\Delta t}$ και κοινή διακύμανση $\sigma_{\Delta t}^2$**

- Έστω τώρα η χρ. στιγμή $T=1$ έτος
- $T = t_n = 1$ για κάποιο n , ή ισοδύναμα $\Delta t = \frac{1}{n}$
- $\mu = E[R_{[0,1]}], \sigma^2 = Var[R_{[0,1]}]$
- Προφανώς $R_{[0,1]} = R_{\Delta t_1} + \dots + R_{\Delta t_n}$, οπότε
- $\mu = n \cdot \mu_{\Delta t} \Rightarrow \mu_{\Delta t} = \mu \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \mu_{\Delta t} = \mu \cdot \Delta t$
- $\sigma^2 = n \cdot \sigma_{\Delta t}^2 \Rightarrow \sigma_{\Delta t}^2 = \sigma^2 \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \sigma_{\Delta t}^2 = \sigma^2 \cdot \Delta t$

- Έστω τώρα οποιαδήποτε χρονική στιγμή $T = t_N = N \cdot \Delta t$, για μεγάλο N
- Έστω $R_T = R_{[0,T]} = \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$
- Προφανώς $R_{[0,T]} = R_{\Delta t_1} + \dots + R_{\Delta t_N}$, άρα
- $E(R_T) = N \cdot \mu_{\Delta t} = \mu \cdot N \cdot \Delta t = \mu \cdot T$ και
- $Var(R_T) = N \cdot \sigma^2_{\Delta t} = \sigma^2 \cdot N \cdot \Delta t = \sigma^2 \cdot T$ και
- Κεντρικό Οριακό Θεώρημα $\Rightarrow R_T \rightarrow N(\mu T, \sigma^2 T)$
- Άρα $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim N(\mu T, \sigma^2 T)$ ή αλλιώς $\ln(S_T) \sim N(\ln(S_0) + \mu T, \sigma^2 T)$

Παρατήρηση 1: Εάν S_T ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή, τότε η μέση τιμή της S_T δεδομένης της σημερινής τιμής S_0 μπορεί να *δειχθεί* ότι δίνεται από τη

$$\text{σχέση } E[S_T | S_0] = S_0 \cdot \exp\left[\mu \cdot T + \sigma^2 \cdot \frac{T}{2}\right]$$

Παρατήρηση 2 (συνέχεια της προηγούμενης παρατήρησης)

Το μέτρο των risk neutral πιθανοτήτων κατασκευάστηκε έτσι ώστε κάτω από αυτό το μέτρο να ισχύει ότι $E_Q[S_T | S_0] = S_0 \cdot \exp[r \cdot T]$. Συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με αυτή της προηγούμενης παρατήρησης συμπεραίνουμε ότι κάτω από το risk neutral μέτρο θα

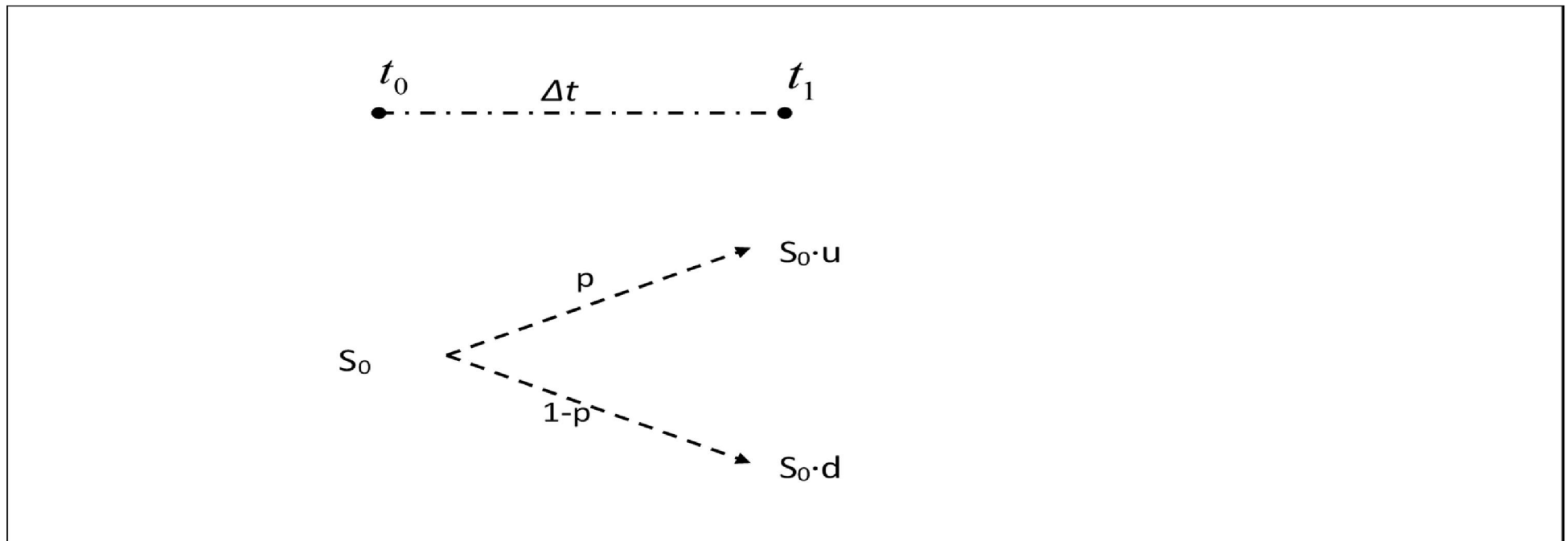
$$\text{πρέπει να ισχύει } \mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

Διωνυμικό μοντέλο με σταθερή τάση και θόρυβο

- Στην συνέχεια θα φτιάξουμε το διωνυμικό ανάλογο ενός μοντέλου που επιχειρεί να περιγράψει την εξέλιξη της τιμής του αβέβαιου τίτλου, εάν αυτή έχει σταθερή δεδομένη τάση μ και σταθερό δεδομένο θόρυβο σ .
- Καθώς η χρονική περίοδος Δt τείνει στο 0 , το διωνυμικό μοντέλο θα τείνει στη λογαριθμοκανονική κατανομή για την τιμή του αβέβαιου τίτλου.

Διωνυμικό δέντρο με μέση ετήσια απόδοση μ και volatility σ

- Πρώτα για μια περίοδο



- $S_1 = \begin{cases} S_0 \cdot u, & \text{με πιθανότητα } p \\ S_0 \cdot d, & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}$
- $R_1 = \ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right) = \begin{cases} \ln\left(\frac{S_0 \cdot u}{S_0}\right), & \text{με πιθανότητα } p \\ \ln\left(\frac{S_0 \cdot d}{S_0}\right), & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases} = \begin{cases} \ln(u), & \text{με πιθανότητα } p \\ \ln(d), & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}$
- $\mu \cdot \Delta t = E(R_1) = p \ln(u) + (1 - p) \ln(d)$
- $\sigma^2 \cdot \Delta t = \text{Var}(R_1) = E(R_1^2) - (\mu \cdot \Delta t)^2 =$

$$p(\ln(u))^2 + (1 - p)(\ln(d))^2 - (\mu \cdot \Delta t)^2$$
- Λύνοντας το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων ως προς u και d και λαμβάνοντας υπόψη ότι $u > d$ καταλήγουμε στα

$$u = \exp\left(\mu \cdot \Delta t + \sqrt{\frac{1-p}{p}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right)$$

$$d = \exp\left(\mu \cdot \Delta t - \sqrt{\frac{p}{1-p}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right)$$

- Παρατηρείστε ότι αν επιλέξουμε $p=1/2$ οι προηγούμενες σχέσεις παίρνουν την πιο απλή μορφή

$$u = \exp(\mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t})$$

$$d = \exp(\mu \cdot \Delta t - \sigma \cdot \sqrt{\Delta t})$$

- Για πολλές περιόδους

Απλά έχουμε πολλά δέντρα μιας περιόδου όπως αυτό που φτιάξαμε

- Ας δούμε χαρακτηριστικά τι γίνεται στη χρονική στιγμή $t_n = n \cdot \Delta t$

$$S_{t_n} = \left(S_0 \cdot u^{n-k} \cdot d^k \right)_{k=0,1,\dots,n}$$

όπου το $S_0 \cdot u^{n-k} \cdot d^k$ έχει πιθανότητα $\binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k$

- Αντικαθιστώντας τα u και d με τις εκφράσεις που βρήκαμε πριν έχουμε:

$$\begin{aligned}
S_{t_n} &= \left(S_0 \exp \left(\mu \Delta t + \sqrt{\frac{1-p}{p}} \sigma \sqrt{\Delta t} \right)^{n-k} \exp \left(\mu \Delta t - \sqrt{\frac{p}{1-p}} \sigma \sqrt{\Delta t} \right)^k \right)_{k=0,1,\dots,n} = \\
& \left(S_0 \cdot \exp \left(\mu \cdot n \cdot \Delta t + \frac{(1-p)(n-k) - pk}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \right) \right)_{k=0,1,\dots,n} = \\
& \left(S_0 \cdot \exp \left(\mu \cdot t_n + \frac{(1-p)(n-k) - pk}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \sigma \cdot \frac{\sqrt{t_n}}{\sqrt{n}} \right) \right)_{k=0,1,\dots,n} =
\end{aligned}$$

$$S_0 \cdot \exp \left(\mu \cdot t_n + \frac{(1-p)X_n - p(n - X_n)}{\sqrt{p(1-p)n}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n} \right)$$

όπου X_n παριστάνει το πλήθος των ανοδικών κινήσεων σε n βήματα.

Επομένως:

$$S_{t_n} = S_0 \cdot \exp \left(\mu \cdot t_n + \underbrace{\frac{X_n - pn}{\sqrt{p(1-p)n}}}_{\rightarrow N(0,1)} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n} \right) \text{ και \acute{a}ρα}$$

$$\ln \left(\frac{S_{t_n}}{S_0} \right) = \mu \cdot t_n + \underbrace{\frac{X_n - pn}{\sqrt{p(1-p)n}}}_{\rightarrow N(0,1)} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}$$

ΣΥΝΕΠΩΣ:

$$\ln \left(\frac{S_{t_n}}{S_0} \right) \rightarrow N(\mu t_n, \sigma^2 t_n) \text{ ή αλλιώς}$$

$$\ln(S_{t_n}) \rightarrow N(\ln(S_0) + \mu t_n, \sigma^2 t_n)$$

- Για κάθε p θα έχω και ένα διαφορετικό δέντρο. Όμως όλα αυτά τα δέντρα θα έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση μt , την ίδια διακύμανση $\sigma^2 t$ σε κάθε χρονική στιγμή t και επιπλέον ασυμπτωτικά οι αποδόσεις θα τείνουν στην κανονική κατανομή.
- Με αυτή την έννοια όλα αυτά τα δέντρα είναι «καλά» και συνεπώς μπορώ να διαλέξω το πιο απλό, δηλ. $p=1/2$

(προσέξτε ότι αυτές οι πιθανότητες p θεωρούνται ως οι πραγματικές πιθανότητες και όχι οι risk neutral).

Περιγραφή

Κάθε χρονική περίοδος είναι διάρκειας Δt .

Θεωρούμε τρεις καθορισμένες και σταθερές παραμέτρους

μ =τάση

σ =θόρυβος

r =επιτόκιο

όλα μετρημένα σε ετήσια βάση.

Η αξία B_t του τραπεζικού λογαριασμού B τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση

$$B_t = B_0 \cdot e^{r \cdot t}.$$

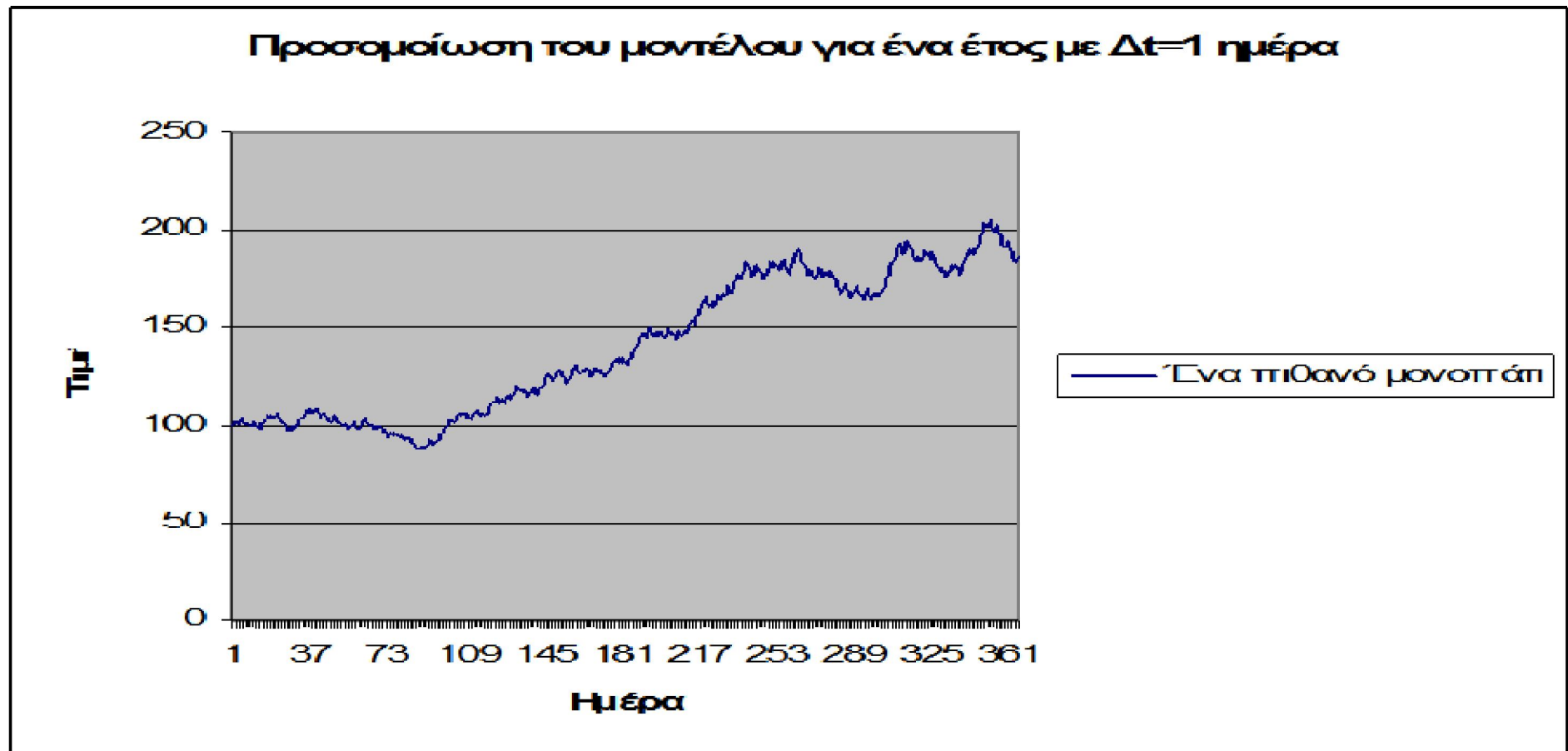
Η διαδικασία που θα ακολουθεί η τιμή του αξιόγραφου A , δίνεται από τη σχέση:

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t \cdot e^{\mu \cdot \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}}, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \\ S_t \cdot e^{\mu \cdot \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}}, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \end{cases}$$

(Οι πιθανότητες $1/2$ που αναφέρονται παραπάνω θεωρούμε ότι είναι οι πραγματικές πιθανότητες ανόδου και καθόδου σε κάθε σημείο.)

| | | | | | | |
|------------|----------|-----------|--------|--------|--------|--------|
| S_0 | 100 | | | | | |
| μ | 50% | ανά έτος | | | | |
| σ | 30% | ανά έτος | | | | |
| Δt | 0,027397 | 10 ημέρες | | | | |
| r | 4% | | | | | |
| | | | | | | 146,25 |
| | | | | | 137,27 | 132,42 |
| | | | 120,93 | 128,84 | 124,29 | 119,90 |
| | | 113,51 | 116,66 | 112,54 | 108,57 | 106,54 |
| 100,00 | 106,54 | 102,78 | 109,50 | 105,63 | 101,90 | 98,30 |
| | 96,47 | 93,06 | 99,15 | 95,65 | 92,27 | 89,01 |
| | | | 89,77 | 86,60 | 83,54 | 80,59 |

Το επόμενο διάγραμμα δείχνει ένα από τα μονοπάτια που θα μπορούσε να ακολουθήσει η τιμή της μετοχής στη διάρκεια ενός έτους στο αντίστοιχο δέντρο με $\Delta t=1$ ημέρα



Η κατανομή κάτω από το risk neutral μέτρο

- Είδαμε προηγουμένως ότι η απόδοση $\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) \rightarrow N(\mu t_n, \sigma^2 t_n)$.
- Αναρωτιόμαστε πώς να μοιάζει η κατανομή της απόδοσης $\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right)$ όταν αλλάξουμε τις πιθανότητες από $p=1/2$ στις risk neutral πιθανότητες q .

- Η σχέση $\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) = \mu \cdot t_n + \underbrace{\frac{X_n - pn}{\sqrt{p(1-p)n}}}_{\rightarrow N(0,1)} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}$

που είδαμε παραπάνω παίρνει για $p=1/2$ τη μορφή:

$$\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) = \mu \cdot t_n + \underbrace{\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}}_{\rightarrow N(0,1)} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}$$

- Η κατανομή της επηρεάζεται μόνο από την κατανομή της διωνυμικής X_n .
- Το μόνο που αλλάζει με την αλλαγή μέτρου στην X_n είναι η πιθανότητα ανόδου που τώρα είναι η risk neutral πιθανότητα q αντί για $\frac{1}{2}$.
- Επομένως η X_n εξακολουθεί να είναι διωνυμική αλλά με μέσο nq και διακύμανση $nq(1-q)$.
- Άρα η $\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}$ εξακολουθεί να τείνει στην κανονική κατανομή αλλά τώρα με μέσο $\frac{2nq - n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} (2q - 1)$ και διακύμανση $4q(1 - q)$.
- Συνεπώς η $\ln \left(\frac{S_{t_n}}{S_0} \right) = \mu \cdot t_n + \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}$ εξακολουθεί να τείνει στην κανονική αλλά με μέσο $\mu \cdot t_n + \sqrt{n} (2q - 1) \sigma \sqrt{t_n}$ και διακύμανση $4q(1 - q) \cdot \sigma^2 \cdot t_n$.
- Ας υπολογίσουμε και ας αντικαταστήσουμε λοιπόν τα q ώστε να δούμε πως μοιάζει κάτω από το risk neutral μέτρο η μέση τιμή και η διακύμανση της απόδοσης

- Ας θυμηθούμε ότι

$$q = \frac{\exp(r \Delta t) - d}{u - d} = \frac{\exp(r \Delta t) - \exp(\mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t})}{\exp(\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}) - \exp(\mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t})}$$

- Εάν αντικαταστήσουμε όλες τις δυνάμεις του e σε αυτόν τον τύπο με το αντίστοιχο ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0 και επίσης θεωρήσουμε $\Delta t^k = 0$ για όλα τα $k > 1$, λαμβάνουμε την εξής προσέγγιση:

$$q = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\Delta t} \left(\frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma} \right) \right]$$

- Αντικαθιστώντας τώρα με αυτό το q , παίρνουμε ότι

η $\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) = \mu \cdot t_n + \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}$ εξακολουθεί να τείνει στην κανονική αλλά με μέσο $(r - \frac{\sigma^2}{2})t_n$ και διακύμανση που ασυμπτωτικά παραμένει η ίδια $\sigma^2 t_n$.

- Δηλαδή κάτω από το risk neutral μέτρο

$$\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) \rightarrow N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_n, \sigma^2 t_n\right) \text{ ή αλλιώς}$$

$$\ln(S_{t_n}) \rightarrow N\left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_n, \sigma^2 t_n\right)$$

Το μοντέλο Cox-Ross-Rubinstein (CRR) για την τιμολόγηση παραγώγων

- Προσέξτε ότι η πραγματική μέση απόδοση μ του αβέβαιου τίτλου, έχει εξαφανιστεί από τον τύπο της κατανομής του S_t κάτω από το risk neutral μέτρο.
- Δηλαδή με όποιο μ και να είχα ξεκινήσει (π.χ. $\mu = 0$) θα κατέληγα στην ίδια σχέση

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} \cdot N(0,1) \right]$$

για την κατανομή του S_t κάτω από το risk neutral μέτρο. Αυτό μας κάνει να σκεφθούμε ότι για την τιμολόγηση των παραγώγων, δεν έχει σημασία ποια είναι η αναμενόμενη απόδοση μ του αβέβαιου τίτλου και ότι αυτό που πραγματικά παίζει ρόλο είναι το volatility σ . Άρα για λόγους τιμολόγησης παραγώγων θα μπορούσα να κατασκευάσω το διωνυμικό μου μοντέλο κατευθείαν και πιο απλά από τη σχέση

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t \cdot e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ S_t \cdot e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{cases}$$

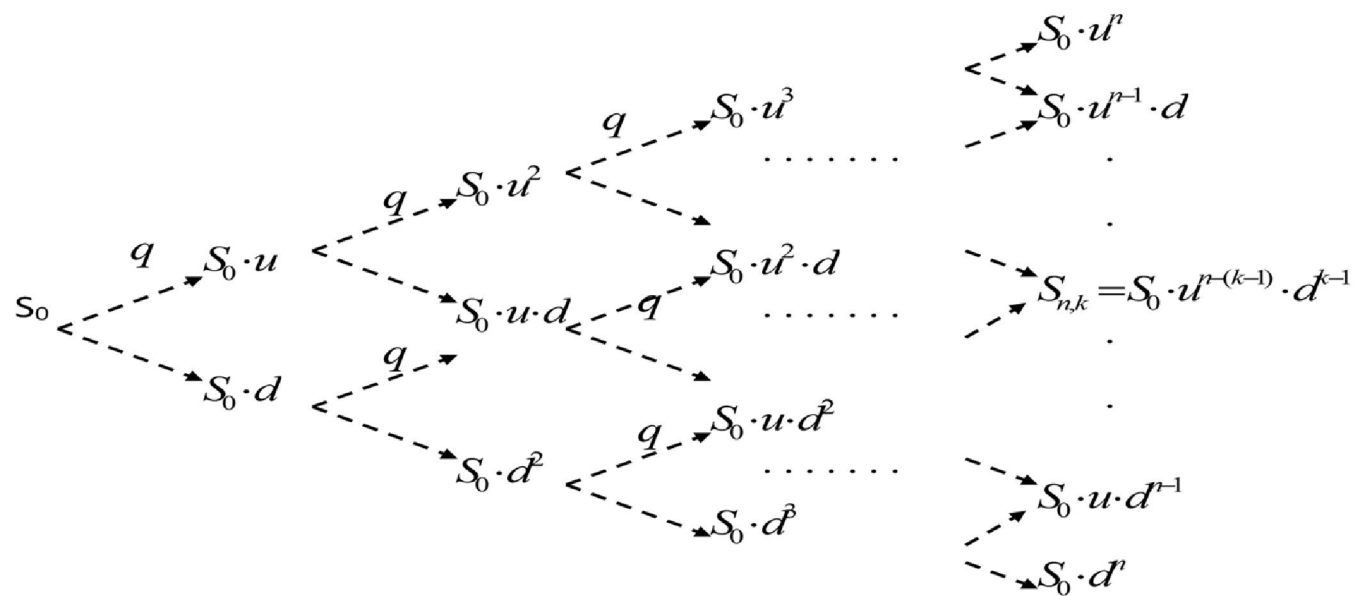
- Αυτό το τελευταίο μοντέλο ονομάζεται μοντέλο Cox, Ross, Rubinstein (CRR)

Τα (συνήθη) δέντρα τιμολόγησης παραγώγων πρακτικά

- Σύμφωνα με όσα έχουμε πει μέχρι στιγμής, σε μια αγορά που δεν επιτρέπει arbitrage κάθε παράγωγο μπορεί να τιμολογηθεί με την υπόθεση ότι η αγορά είναι risk neutral. Αυτό σημαίνει ότι για την αποτίμηση των παραγώγων μπορούμε να υποθέσουμε τα εξής:
 - 1. Η αναμενόμενη απόδοση όλων των αξιόγραφων ισούται με το τραπεζικό επιτόκιο
 - 2. Οι μελλοντικές χρηματοροές μπορούν να τιμολογηθούν βρίσκοντας την παρούσα αξία της αναμενόμενης τελικής τους αξίας.
- Στο επόμενο μοντέλο θέλουμε να προσδιορίσουμε τους παράγοντες u και d και τις risk neutral πιθανότητες q και $1-q$ ώστε το δέντρο που θα προκύψει να είναι συνεπές με τα παραπάνω και με την περιγραφή της τιμής μιας μετοχής που η απόδοση της έχει volatility σ .

$t_0 \quad \Delta t \quad t_1 \quad \Delta t \quad t_2 \quad \Delta t \quad t_3 \quad \dots \quad t_n = T$

$B_0 \quad \xrightarrow{\quad} \quad B_0 e^{r\Delta t} \quad \xrightarrow{\quad} \quad B_0 e^{r2\Delta t} \quad \xrightarrow{\quad} \quad B_0 e^{r3\Delta t} \quad \dots \quad B_0 e^{r(n\Delta t)}$



Πιθανότητα

$$\begin{matrix}
 \alpha & q^n \\
 \binom{n}{1} \cdot q^{n-1} \cdot (1-q) & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 \binom{n}{k-1} \cdot q^{n-(k-1)} \cdot (1-q)^{(k-1)} & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 \binom{n}{n-1} \cdot q \cdot (1-q)^{n-1} & \cdot \\
 (1-q)^n & \cdot
 \end{matrix}$$

Ισχύουν τα εξής

$$(1) \quad S_t e^{r\Delta t} = qS_t u + (1 - q)S_t d \quad (\text{από risk neutrality})$$

$$(2) \quad S_t^2 \sigma^2 \Delta t = E_Q(S_{t+\Delta t}^2) - E_Q(S_{t+\Delta t})^2 \quad (\text{από volatility})$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισοδυναμούν με τις

$$(1') \quad e^{r\Delta t} = q \cdot u + (1 - q) \cdot d$$

$$(2') \quad \sigma^2 \cdot \Delta t = q \cdot u^2 + (1 - q) \cdot d^2 - [q \cdot u + (1 - q) \cdot d]^2$$

Εάν υποθέσουμε μαζί με τις (1') και (2') την

$$(3^{\alpha}) \quad u \cdot d = 1$$

Καταλήγουμε στο μοντέλο

$$(A) \quad u = \exp(\sigma \cdot \sqrt{\Delta t})$$

$$d = \exp(-\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}) \quad (\text{CRR model})$$

$$q = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}$$

(3^β) Αν θέσουμε $q=1/2$ και λύσουμε το σύστημα των (1') και (2') και αγνοώντας τις δυνάμεις του Δt με εκθέτη μεγαλύτερο από τη μονάδα, καταλήγουμε στο μοντέλο

$$(B) \quad u = \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \right]$$

$$d = \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot \Delta t - \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \right]$$

Τιμολόγηση σε συνεχή χρόνο και η εξίσωση Black Scholes

- Κατά κάποιο τρόπο θα ζητήσουμε το χρονικό διάστημα Δt της προηγούμενης παραγράφου να είναι απειροστά μικρό και θα το ονομάσουμε dt , (το dt θα είναι τόσο ελάχιστο ώστε $dt^k = 0$ για κάθε $k > 1$).
- Επιπλέον θα ζητήσουμε (όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο) οι αποδόσεις ενός τίτλου σε διαφορετικά διαστήματα dt να είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες ακολουθώντας την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu^* dt$ και διακύμανση $\sigma^2 dt$.

- Ουσιαστικά λοιπόν θα ζητήσουμε η στιγμιαία απόδοση του υποκείμενου τίτλου να περιγράφεται ως

$$d \ln S_t = \mu^* dt + \sigma dW_t$$

όπου

- $d \ln S_t = \ln(S_{t+dt}) - \ln(S_t) = \ln\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right)$ παριστάνει τη στιγμιαία γεωμετρική απόδοση του τίτλου S στο διάστημα dt και
- $dW_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$ με τα ε_t να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και να ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή.
- Υποθέτοντας επιπλέον ότι $dt^k = 0$ για κάθε $k > 1$, είναι σχετικά απλό να δείξει κανείς ότι $(dW_t)^2 = dt$

Λήμμα του Ito

Έστω ότι έχουμε τη διαδικασία Ito

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)dW_t$$

όπου a και b είναι συναρτήσεις των x_t και t

- Αν $Y_t = Y(x_t, t)$ είναι μια συνάρτηση των x_t και t τότε,

$$dY_t = \left(\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \frac{\partial Y_t}{\partial x_t} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_t}{\partial x_t^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial Y_t}{\partial x_t} b dW_t$$

- [Αυτή η σχέση προκύπτει πολύ εύκολα (κάνοντας τις αντικαταστάσεις και τις σχετικές πράξεις) από την

$$dY_t = \frac{\partial Y_t}{\partial t} dt + \frac{\partial Y_t}{\partial x_t} dx_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_t}{\partial x_t^2} dx_t^2$$

η οποία ουσιαστικά είναι το ανάπτυγμα Taylor για το διαφορικό της $Y_t = Y(x_t, t)$

Παρατηρώντας ότι $S_t = \exp(\ln S_t)$, και εφαρμόζοντας το Λήμμα του Ito, μπορούμε να δούμε ότι η εξίσωση

$$d \ln S_t = \mu^* dt + \sigma dW_t$$

είναι ισοδύναμη με την παρακάτω εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική της τιμής του υποκείμενου τίτλου:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

(Γεωμετρική κίνηση Brown)

όπου

dS_t παριστάνει τη μεταβολή της τιμής του τίτλου S στο διάστημα dt ,

$$\mu = \mu^* + \frac{\sigma^2}{2}$$

$dW_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$ με τα ε_t να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και να ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή.

- (Απόδειξη: άσκηση)

Η διαφορική εξίσωση Black-Scholes

- Έστω $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$
- Έστω παράγωγο F επί του S , δηλαδή ένα συμβόλαιο που η αξία του την t είναι μια συνάρτηση $F_t = F(t, S_t)$
- Το Λήμμα του Ito δίνει

$$dF_t = \frac{\partial F_t}{\partial t} dt + \frac{\partial F_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} dS_t^2$$

- Η προηγούμενη έκφραση γράφεται και ως εξής:

- $$dF_t = \frac{\partial F_t}{\partial S_t} dS_t + \left(\frac{\partial F_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt$$

- Παρατηρούμε ότι η αβεβαιότητα στη μεταβολή της αξίας του παραγώγου προέρχεται μόνο από τον πρώτο όρο της εξίσωσης και οφείλεται αποκλειστικά στην αβεβαιότητα της μεταβολής της τιμής του υποκείμενου τίτλου. *Εάν απαλλαγούμε από αυτή την αβεβαιότητα, αυτό που θα προκύψει θα είναι βέβαιος τίτλος και άρα θα κερδίζει το risk free επιτόκιο.*

- Θεωρούμε την t ένα χαρτοφυλάκιο Π το οποίο να αποτελείται από:
 - μια long θέση σε μια μονάδα του παραγώγου F και
 - μια short θέση σε $\frac{\partial F_t}{\partial S_t}$ μονάδες του υποκείμενου τίτλου S .
- Η αξία του χαρτοφυλακίου Π την t θα είναι επομένως:

$$\Pi_t = F_t - \frac{\partial F_t}{\partial S_t} S_t$$

Η δυναμική της αξίας του χαρτοφυλακίου Π , θα δίνεται από τη σχέση

$$d\Pi_t = dF_t - \frac{\partial F_t}{\partial S_t} dS_t$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε το dF_t θα έχουμε ότι

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial F_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt$$

όπου όπως αναμενόταν δεν εμφανίζεται στοχαστικός όρος, άρα δεν υπάρχει αβεβαιότητα.

Αυτό σημαίνει ότι στιγμιαία το χαρτοφυλάκιο Π κερδίζει το risk free επιτόκιο και άρα

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = r\Pi_t$$

αντικαθιστώντας την αξία του Π_t στην τελευταία σχέση, έχουμε μια ντετερμινιστική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους:

Διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton (BSM) και την οποία πρέπει να ικανοποιεί κάθε παράγωγο F

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = r \left(F_t - \frac{\partial F_t}{\partial S_t} S_t \right)$$

- Αν επιπλέον γνωρίζουμε μια επιπλέον συνθήκη (όπως π.χ. είναι η αξία του παραγώγου στη λήξη), τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση και μας δίνει την non arbitrage τιμή του F τη χρονική στιγμή t . Η εξίσωση ενδέχεται να μην έχει αναλυτική λύση οπότε καταφεύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους για τον προσδιορισμό μιας προσεγγιστικής λύσης.

Ο τύπος των Black-Scholes για Call option Ευρωπαϊκού τύπου

$$C_t = S_t \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}}$$

και $N(\cdot)$ παριστάνει τη συνάρτηση της σωρευτικής τυπικής κανονικής κατανομής

Απόδειξη (άσκηση)

Από: Hull: Options futures and other derivatives, 9th ed.

- Λύστε την Άσκηση 15.17 (σελ.349)
- Σε αυτή την άσκηση δείχνετε ότι ο τύπος των Black Scholes για το Call Option ικανοποιεί όντως τη διαφορική εξίσωση των Black Scholes.

(α) Με τι ισούται το $N'(x)$?

(β) Δείξτε ότι $S_t N'(d_1) = K e^{-r(T-t)} N'(d_2)$

(γ) Υπολογίστε τα $\frac{\partial d_1}{\partial S_t}$ και $\frac{\partial d_2}{\partial S_t}$

(δ) Δείξτε ότι $\frac{\partial C_t}{\partial t} = -rK e^{-r(T-t)} N(d_2) - S_t N'(d_1) \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$

(ε) Δείξτε ότι $\frac{\partial C_t}{\partial S_t} = N(d_1)$

(στ) Δείξτε ότι το C_t ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση των Black Scholes Merton

(ζ) Δείξτε ότι το C_t ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη ενός call option Ευρωπαϊκού τύπου, δηλαδή ότι το $C_T = \max(S_T - K, 0)$

- Κοιτάξτε το παράρτημα του κεφαλαίου 13 στη σελίδα 298 του βιβλίου όπου αποδεικνύεται ο τύπος των Black Scholes για Call Options Ευρωπαϊκού τύπου **από το διωνυμικό μοντέλο**
- Κοιτάξτε το παράρτημα του κεφαλαίου 15 στη σελίδα 352 του βιβλίου όπου αποδεικνύεται ο τύπος των Black Scholes για Call Options Ευρωπαϊκού **χρησιμοποιώντας τη risk neutral valuation** μεθοδολογία (δηλαδή $C_t = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(S_T - K, 0)]$, όπου Q το risk neutral μέτρο)