ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Επικ. Καθ. Στέλιος Ζήμερας

Τμήμα Μαθηματικών

Κατεύθυνση Στατιστικής και Αναλογιστικών – Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

2017

Μέθοδος Monte Carlo

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\mu = \int_0^1 g(x)dx$$

Εναλλακτικά μπορεί να γραφτεί

$$E(g(U)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_U(x)dx = \int_0^1 g(x)\cdot 1dx = \mu$$

U είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο(0,1)

Επομένως επιθυμούμε να παράγουμε μία τ.μ. g(U) της οποίας επιθυμούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή.

Μέθοδος Monte Carlo

Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών αν εκτελέσουμε το ίδιο πείραμα πολλές φορές, το μ θα είναι (οριακά) ίσο με τον μέσο όρο των αποτελεσμάτων αυτών των πειραμάτων

Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ανεξάρτητες τ.μ. από την ομοιόμορφη στο (0,1) κατανομή. Οι νέες τ.μ. $g(U_1), g(U_2), \ldots, g(U_n)$ είναι προφανώς και αυτές ανεξάρτητες και ισόνομες και από τον (ισχυρό) νόμο των μεγάλων αριθμών θα ισχύει (με πιθανότητα 1) ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i) \underset{n\to\infty}{\to} E(g(U)).$$

Μέθοδος Monte Carlo

Επομένως, το

$$\mu = E(g(U))$$

προσεγγίζεται από το

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$$ ← εκτίμηση του μ

το οποίο είναι τυχαία μεταβλητή

Μέθοδος Monte Carlo

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε n τυχαίους αριθμούς U_1, U_2, ..., U_n~ U(0,1)

ΒΗΜΑ 2. Υπολογίζουμε την τιμή

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$$

Όσο μεγαλύτερο είναι το n, τόσο καλύτερη θα είναι η εκτίμηση

Μέθοδος Monte Carlo

Γενίκευση

Υπολογισμός ολοκληρώματος για διαφορετικά άκρα [α,β]

$$\int_a^b g(x)dx = \int_0^1 (b-a)g(a+(b-a)y)dy = \int_0^1 h(y)dy \qquad (y = \frac{x-a}{b-a})$$

$$\int_0^\infty g(x)dx = \int_0^1 y^{-2} g(y^{-1}-1)dy = \int_0^1 h(y)dy \qquad (y = \frac{1}{x+1})$$

Πολλαπλά ολοκληρώματα

$$\mu = \int_{[0,1]^k} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 g(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_k$$

$$\mu = E(g(\mathbf{U})) = E(g(U_1, U_2, \ldots, U_k))$$

Μέθοδος Monte Carlo

θεωρούμε $\mathbf{U}_i = (U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{ik})$, $i = 1,2,\ldots,n$ ανεξάρτητα μεταξύ τους τυχαία διανύσματα το καθένα οποία αποτελείται από k ανεξάρτητες τ.μ. από την ομοιόμορφη στο (0,1) κατανομή.

Οι τ.μ. $g(\mathbf{U_1})$, $g(\mathbf{U_2})$, …,$g(\mathbf{U_n})$ είναι ανεξάρτητες και

ισόνομες τ.μ. και επομένως από τον (ισχυρό) νόμο των μεγάλων αριθμών θα ισχύει

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{U}_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E(g(\mathbf{U}))$$

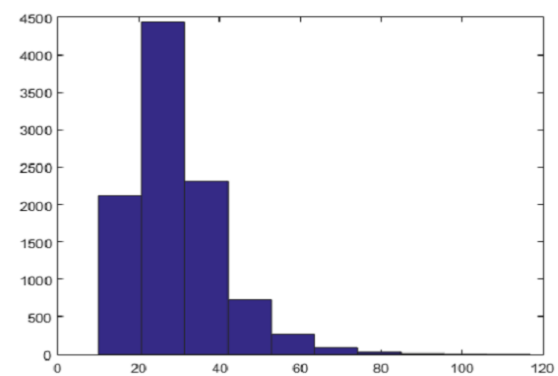
Μέθοδος Monte Carlo

Έστω ότι θέλουμε να μαζέψουμε κουπόνια όταν βρίσκουμε μια λέξη. Αν χρησιμοποιήσουμε την MC τεχνική θέλουμε να δούμε σε πόσες φορές θα μαζέψουμε την σωστή λέξη.

Αν η λέξη είναι MONTECARLO (10 γράμματα) και όλα έχουν την ίδια πιθανότητα να τα επιλέξουμε τότε σε πόσες επιλογές θα επιλέξουμε όλα τα γράμματα?

Μέθοδος Monte Carlo

```
nLetters = 10; % MONTECARLO
nTrials = 10000;
for i = 1:nTrials
success = 0;
nTries(i) = 0;
for j = 1:nLetters
MONTECARLO(j) = 0; % επαναλαμβάνουμε την διαδικασία
end
while success == 0
nTries(i) = nTries(i)+1; % αυξάνουμε τον αριθμό της επιλογής
buy = 1+floor(nLetters*rand); % γράμμα που διαλέγουμε σωστό
MONTECARLO(buy) = 1;
if sum(MONTECARLO) == nLetters % διαλέξαμε όλα τα γράμματα
success = 1;
end
end
end
hist(nTries)
```



Μέθοδος Monte Carlo

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 e^{-u^2}\, \mathrm{d}u.$$

```
N = 10^6;
U = rand(N,1);
Y = exp(-U.^2);
I_hat = sum(Y)/N
```

Μέθοδος Monte Carlo

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\pi = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbb{I}\{x^2+y^2 \le 1\}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 4\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \mathbb{I}\{x^2+y^2 \le 1\}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

$$= 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}\{x^2+y^2 \le 1\}\mathbb{I}\{u \in (0,1)\}\mathbb{I}\{v \in (0,1)\}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

$$= 4\mathbb{E}\mathbb{I}\{U^2+V^2 \le 1\},$$

```
N = 10^6;
U = rand(N,1);
V = rand(N,1);
Y = ((U.^2 + V.^2) <= 1);
p_hat = 4 * sum(Y) / N
```

Μέθοδος Monte Carlo

Υπολογισμός ολοκληρώματος (0,β)

Θέλουμε να υπολογίσουμε/εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\ell = \int_0^b S(x)\,\mathrm{d}x,$$

Χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη συνάρτηση στο (0,β), με $f(x) = 1/b$

$$\ell = \int_0^b S(x)\mathrm{d}x = \int_0^b \frac{(f(x)}{f(x)} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^b \frac{b}{b} S(x)\mathrm{d}x = b\int_0^b S(x)\frac{1}{b}\,\mathrm{d}x = b\mathbb{E}S(X).$$

Μέθοδος Monte Carlo

Επομένως η εκτίμηση είναι

$$\widehat{\ell} = \frac{b}{N}\sum_{i=1}^{N} S(X_i),$$

Αμεροληψία

$$\mathbb{E}\widehat{\ell} = \mathbb{E}\left[\frac{b}{N}\sum_{i=1}^{N} S(X_i)\right] = \frac{b}{N}\sum_{i=1}^{N} S(X_i) = b\mathbb{E}S(X_1) = b\int_0^b S(x)\frac{1}{b}\,\mathrm{d}x = \int_0^b S(x)\,\mathrm{d}x$$

Διακύμανση

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\widehat{\ell}) &= \mathrm{Var}\left(\frac{b}{N}\sum_{i=1}^{N} S(X_i)\right) = \frac{b^2}{N^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} S(X_i)\right)\\ &= \frac{b^2}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Var}(S(X_i)) = \frac{b^2}{N}\mathrm{Var}(S(X_1)).\end{aligned}$$

Μέθοδος Monte Carlo

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το $\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

```
N=10^4;
b = 2;
X = zeros(N,1);
Y = zeros(N,1);
for i = 1:N
X(i) = b*rand;
Y(i) = b*exp(-X(i)^2);
end
ell = erf(2) * sqrt(pi) / 2
ell_hat = mean(Y)
ell_hat_var = b^2/N * var(Y)
ell_hat_std = b/sqrt(N) * sqrt(Y)
```

Μέθοδος Monte Carlo

Υπολογισμός ολοκληρώματος (-∝,+∝,)

Έστω θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\ell = \int_I S(x)\,\mathrm{d}x$$

Τότε

$$\ell = \int_I S(x)\,\mathrm{d}x = \int_i S(x)\frac{g(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}\frac{S(X)}{g(X)},$$

$$\widehat{\ell} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{S(X_i)}{g(X_i)},$$

Μέθοδος Monte Carlo

Παράδειγμα

Έστω επιθυμούμε να εκτιμήσουμε

$$\ell = \int_0^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

Με χρήση εκθετικής κατανομής

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x^2/2+x}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}\exp\{-X^2/2+X\},$$

Όπου $X \sim \mathsf{Exp}(1)$

$$\widehat{\ell} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp\{-X_i^2 + X_i\},$$

Μέθοδος Monte Carlo

```
N=10^4;
X=zeros(N,1);
Y=zeros(N,1);
for i = 1:N
X(i) = -log(rand);
Y(i) = exp(-X(i)^2/2 + X(i));
end
ell = sqrt(pi/2)
ell_hat = mean(Y)
ell_hat_std = std(Y)/sqrt(N)
```