

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜCΜC

Σ. Ζήμερας
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

2017

Αλγόριθμος Metropolis-Hastings

Εταιρία θέλει να ανανεώσει την παραγωγή της, διαθέτοντας περισσότερα προϊόντα στους πελάτες της. Θεωρεί ότι το ποσοστό των νέων πελατών που θα αγοράσουν τα νέα προϊόντα υπερβαίνει το 0.5 (χρήση ομοιόμορφης $[0.5, 1]$). Σε 22 πελάτες που έγινε τεστ, οι 12 επέλεξαν νέα προϊόντα. Ποια η πιθανότητα π .

Αλγόριθμος Metropolis-Hastings

Λύση

Από την στιγμή που η πιθανότητα είναι $[0.5, 1]$,
μπορούμε να προβούμε σε μετασχηματισμό

$$\theta = \log \frac{p-0.5}{1-p}$$

με $(-\infty, +\infty)$

Λύνοντας ως προς p έχουμε

$$p = \frac{1/2 + \exp\{\theta\}}{1 + \exp\{\theta\}},$$

Αλγόριθμος Metropolis-Hastings

και η σ.π.π της θ θα είναι προσεγγιστικά

$$\frac{(1/2 + \exp\{\theta\})^{12} \exp\{\theta\}}{(1 + \exp\{\theta\})^{22}}$$

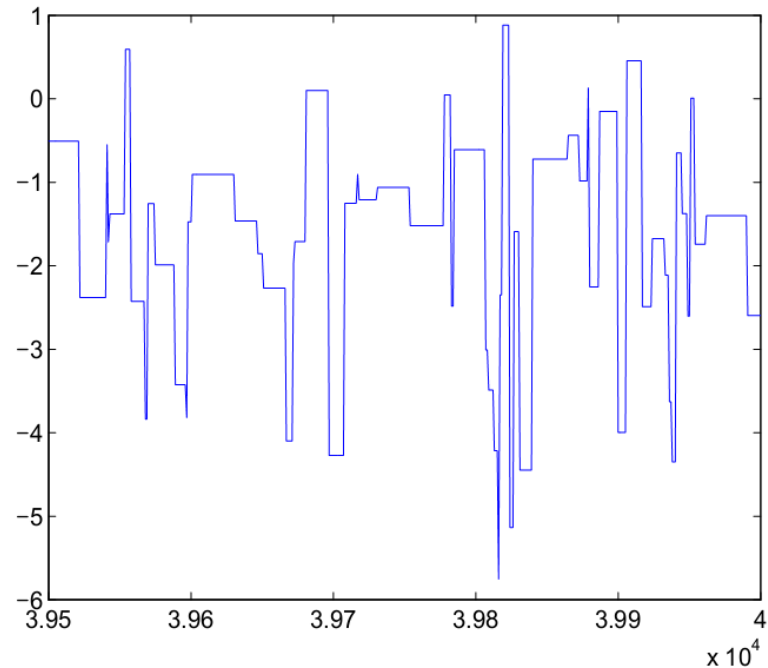
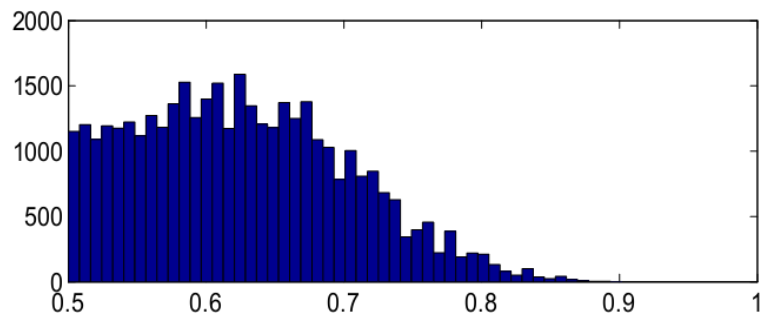
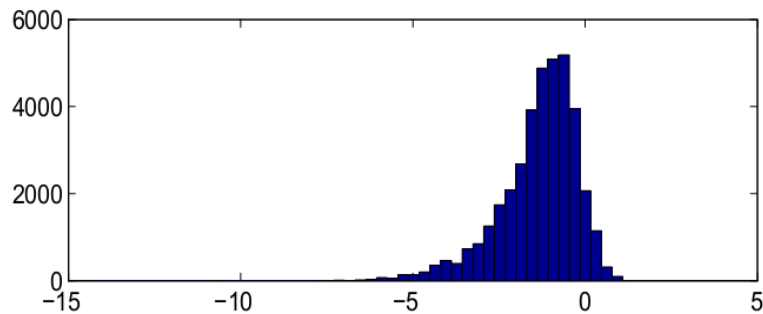
Η προτεινόμενη κατανομή είναι η $\mathcal{N}(\theta_n, s^2)$.

Αλγόριθμος Metropolis-Hastings

- `nn = 40000; % nn=αριθμός επαναλήψεων`
- `s=10; % s = τυπική απόκλιση`
- `burn=2000; % burn = burnin περίσδος`
- `%-----`
- `ps=[];`
- `thetas=[]; %καθορισμός p`
- `old = 0; % αρχική τιμή $\theta=0$`
- `for i = 1:nn`
- `prop = old + s`
- `randn(1,1); %προσομοίωση από $N(\theta_{old}, s^2)$`
- `u = rand(1,1);`
- `ep=exp(prop); eo=exp(old);`
- `post_p=((1/2 + ep)^12`
- `ep)/((1+ep)^22);`
- `post_o=((1/2 + eo)^12`
- `eo)/((1+eo)^22);`
- `new = old;`
- `if u <= min(post_p/post_o, 1)`

Αλγόριθμος Metropolis-Hastings

```
new = prop; %αποδοχή τιμής  
old = new; % θέτω παλιά = νέα τιμή  
end  
thetas = [thetas, new]; %συλλογή των  $\theta$   
ps=[ps, (1/2+exp(new))/(1+exp(new))]; %μετασχηματισμός των  $p$  .  
end
```



Αλγόριθμος Metropolis-Hastings

Weibull κατανομή

$$f(x|\alpha, \eta) = \alpha\eta x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha \eta},$$

Θεωρούμε αρχική συνάρτηση (prior)

$$\pi(\alpha, \eta) \propto e^{-\alpha \cdot \eta^{\beta-1}} e^{-\beta\eta}$$

και συνάρτηση αποδοχής

$$q(\alpha', \eta'|\alpha, \eta) = \frac{1}{\alpha\eta} \exp \left\{ -\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\eta'}{\eta} \right\}$$

Αλγόριθμος Metropolis-Hastings

```
for i = 1:10000 alpha_prop = - alpha * log(rand); eta_prop = -
eta * log(rand);
%-----
    prod1 = prod(data);
    prod2 = prod( exp( eta * data.^alpha - eta_prop * data.^alpha_prop));
%-----
rr = (eta_prop/eta)^(beta-1) * exp(alpha - alpha_prop - beta * ...
    (eta_prop - eta)) * exp(- alpha/alpha_prop - eta/eta_prop + ...
    alpha_prop/alpha + eta_prop/eta)*prod1.^(alpha_prop - alpha) * ...
    prod2 * ((alpha_prop * eta_prop)/(alpha * eta))^(n-1);
%-----
r = min( rr ,1);
    if (rand < r)
        alpha = alpha_prop; eta = eta_prop;
    end
alphas = [alphas alpha]; etas = [etas eta]; end
```


Δειγματολήπτης Gibbs

Προσομοίωση $X \sim \text{Bin}(N, r)$
 $r \sim \text{Beta}(X + \alpha, N - X + \beta)$

N = 100;

M = 1000;

a = 5; b=2;

r_alku = rand(1); %αρχική τιμή r

X = zeros(M,1); r = zeros(M,1);

X(1) = binornd(N,r_alku);

r(1) = betarnd(X(1)+a,N-X(1)+b);

for i = 2:M

X(i) = binornd(N,r(i-1));

r(i) = betarnd(X(i)+a,N-X(i)+b);

end