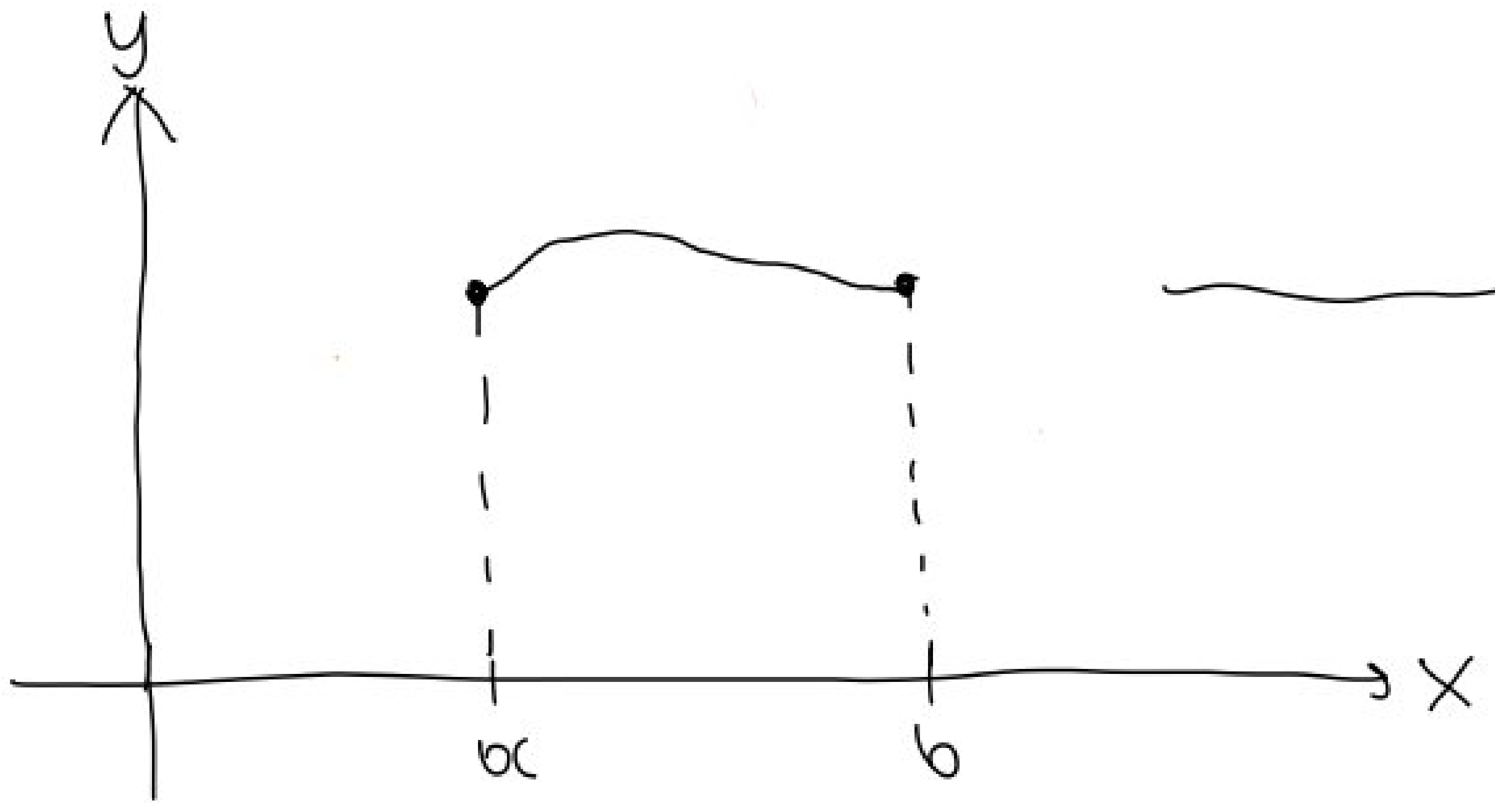
Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου:

Μάθημα 1:

Εισαγωγή:



$\longrightarrow \int_a^b f(x)dx$ (Riemann)

(Μέθοδος Εξάντλησης)

1) Έστω ένα σύνολο, όπου: $\Omega \neq \emptyset$.

Τότε, με: $\mu: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $\mu(\Omega)>0$, $\mu(\emptyset)=0$, και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

2) Το $\mathcal{F}$: σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω, με $A\in\mathcal{F}$, $A\subseteq\Omega$

Ιδιότητες $\mathcal{F}$:

i) $\emptyset\in\mathcal{F}$, $\Omega\in\mathcal{F}$

ii) $A,B\in\mathcal{F} \Rightarrow A\cup B\in\mathcal{F}$, $A^c\in\mathcal{F}$

iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}$

iv) Αν έχουμε μια αριθμήσιμη ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n\in\mathcal{F}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, με: $A_1,\dots,A_k$, $A_i\in\mathcal{F}$, $i=1,\dots,k$, το: $\boxed{\bigcap_{i=1}^{k} A_i\in\mathcal{F} \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^c\right)^c\in\mathcal{F} \text{ (De Morgan)}.}$

3) Έστω $\sigma(\mathcal{O}')$ = σ-άλγεβρα των χώρων $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, (X,d), με $|x-y|=d(x,y)$, στον χώρο $\mathbb{R}$,

με $\sigma(A)=\mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_n \in \mathcal{A}$, τότε:

Το $B_{\mathbb{R}}=\sigma(\mathcal{O}')$, $x\in\mathbb{R}$, $\{x\}\in B_{\mathbb{R}}$ (= σύνολο Borel $B_{\mathbb{R}}$), και τότε έχουμε τα εξής διαστήματα:

$$\{x\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}\right),\quad \text{με:}$$

$$\mathbb{R}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(-n,n),\quad \text{και αν } (\alpha,\beta)\in B_{\mathbb{R}},\ \alpha<\beta,\ \text{τότε:}$$

$$[\alpha,\beta)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\alpha-\frac{1}{n},\beta\right)$$

$$[\alpha,\beta]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\alpha-\frac{1}{n},\beta+\frac{1}{n}\right)$$

$$(\alpha,\beta]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\alpha,\beta+\frac{1}{n}\right)$$

$$(-\infty,\alpha)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(-n,\alpha)$$

$$(\alpha,\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\alpha,n)$$

$$[\alpha,\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\alpha-\frac{1}{n},n\right)$$

$$(-\infty,\alpha]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-n,\alpha+\frac{1}{n}\right)$$

4) <u>Πληρότητα</u> $(X\leq Y)$:

5) <u>Σώμα</u>:

Κάθε σύνολο Σ που έχει τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, λέγεται <u>σώμα</u>.

<u>Ιδιότητα</u>:

Κάθε άνω φραγμένο σύνολο δεν έχει ανοιχτό υποσύνολο που είναι ελάχιστο άνω φράγμα.

<u>Παράδειγμα</u>:

$A=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2<2\}$, που δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Κάθε κάτω φραγμένο σύνολο δεν έχει ανοιχτό υποσύνολο που είναι μέγιστο κάτω φράγμα.

Παράδειγμα.

$A=\{x\in\mathbb{Q}\,|\,x^2>2\}$, που δεν έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

Και από παραπάνω αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0(\varepsilon)}<\varepsilon,\ \text{με: } \frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

6) Μετρικός χώρος:

Έστω $X\neq\emptyset$.

Τότε: $\underset{\text{μετρικός χώρος}}{d}: X\times X\longrightarrow\mathbb{R}_+$,

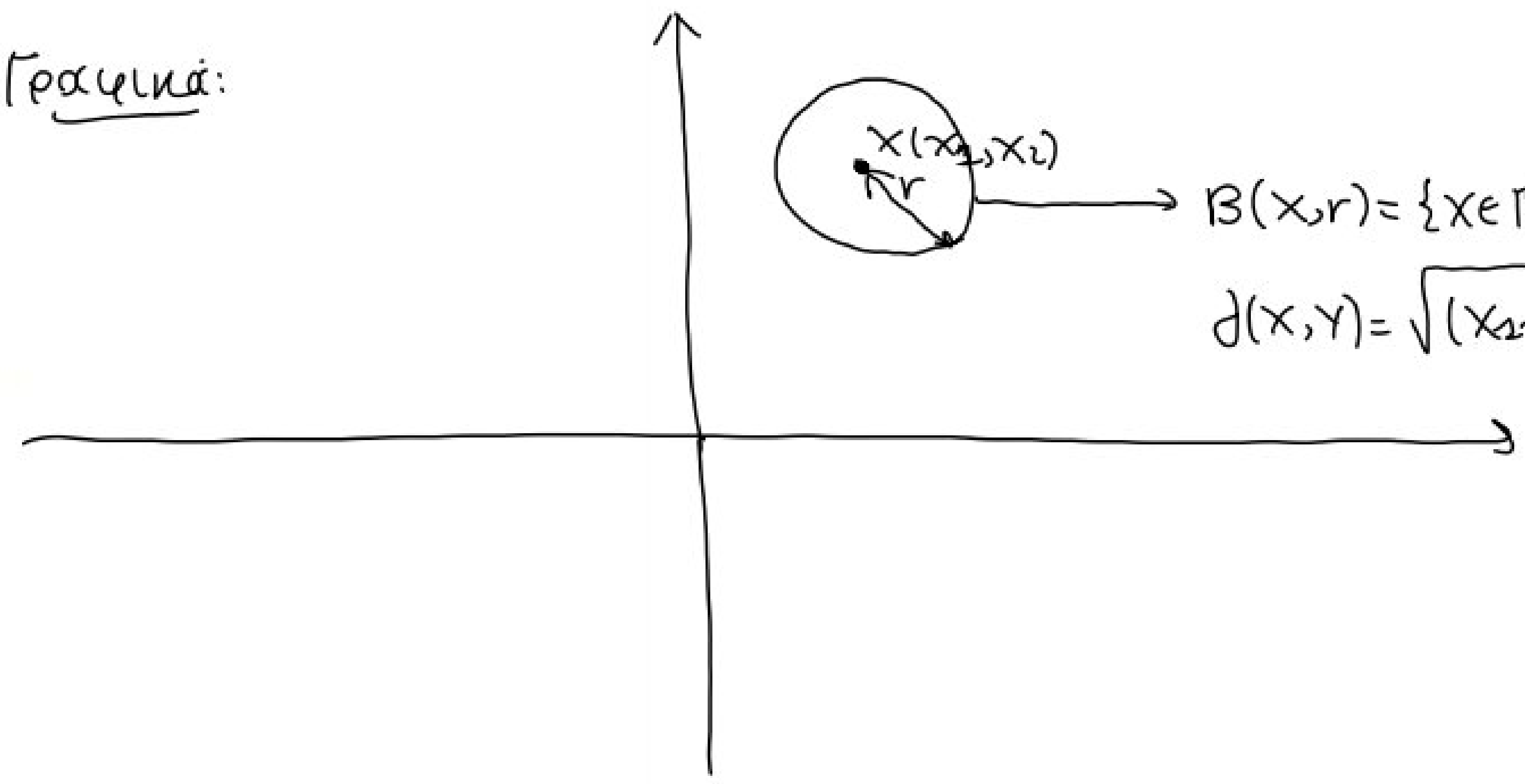
Ιδιότητες:

i) $d(x,y)=d(y,x)$ (συμμετρική)

ii) $d(x,x)=0 \iff x=0$ (μηδενικότητα)

iii) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ (Τριγωνική ανισότητα)

Γραφικά:



$\longrightarrow B(x,r)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,d(x,y)<r\}$,

$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

Για πολυμεταβλητή περίπτωση:

Το $B_{(\mathbb{R}^2,d_p)}$ (= σύνολο Borel πολυμεταβλητού) παράγεται από την $\sigma(\mathcal{O}')$.

Για $p\geq 2$: $d_p(x,y)=\sqrt[p]{(x_1-y_1)^p+(x_2-y_2)^p} \Rightarrow B_{(\mathbb{R}^2,d_p)}=\sigma(\mathcal{O}'_p)$

Για $p=+\infty$: $d_\infty(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$, $p=1,2,\dots,+\infty$.

7) Τα $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, A_i = ξένα μεταξύ τους και $A_n\in\mathcal{F}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Τότε: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, αφού $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, Το $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

αλλά σαν σειρά το άθροισμα του μεγέθους των μικρών κομματιών, συγκλίνει στο $+\infty$.

Π

Μάθημα 2: (4/3/2024).

Ανοιχτά σύνολα σε μετρικούς και παραμετρικούς και τοπολογικούς χώρους $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

1) Διαμέριση D ενός $\Omega \neq \emptyset$ ονομάζεται κάθε οικογένεια μη κενών και ξένων μεταξύ τους υποσυνόλων του Ω.

Συμβολισμός: $\sigma(D)$.

2) Η $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται μετρήσιμη (ή $\mathcal{F}$-μετρήσιμη), αν: $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

(αλλιώς να δείξουμε ότι $\boxed{f^{-1}(\Sigma) \in \mathcal{F}}$, $\forall \Sigma \in \Omega'$, τ.ω.: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\Omega')$), διότι η αντίστροφη εικόνα διατηρεί όλες τις ιδιότητες για να είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη, αρκεί ν.δ.ο.: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\Omega')$.

π.χ: Τα ανοιχτά διαστήματα: $\Omega' = \{I \subseteq \mathbb{R},\ I =$ ανοιχτό διάστημα$)$

Για να ελέγξουμε την μετρησιμότητα της f αρκεί ν.δ.ο: $\boxed{f^{-1}(B) \in \mathcal{F}}$

Μετρησιμότητα σημαίνει ότι η σχέση μεταξύ των διαμερίσεων και της σ-άλγεβρας.

π.χ: Αν $\Omega = \{1, \dots, K\}$ και έστω D μια διαμέριση του Ω που αποτελείται από τα $\sigma_1, \dots, \sigma_m$

(π.χ: $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ μια διαμέριση είναι: $\sigma_1 = \{1,2,3\}$, $\sigma_2 = \{4\}$, $\sigma_3 = \{5\}$)

Μπορεί σε κάθε σημείο του συνόλου για συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{R}$, να παίρνει διαφορετικές τιμές:

π.χ: $f(\{1\}) \neq f(\{2\}) \neq f(\{3\}) \neq f(\{4\}) \neq f(\{5\})$.

3) Έστω ότι έχουμε Ω πεπερασμένο και $D = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ είναι διαμέριση του Ω.

Τότε ισχύει η εξής Πρόταση:

Αν $\mathcal{F} = \sigma(D)$ και $f: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη. Τότε η f παίρνει το πολύ K διακεκριμένες τιμές:

$$f_i = f(\sigma_i) = f_i(s), \quad \forall i = 1, \dots, k., \text{ και } s \in \sigma_i.$$

Απόδειξη: (Με απαγωγή σε άτοπο).

Αν υπήρχε κάποιο διάστημα το οποίο θα περιείχε κάποια διαφορετική τιμή από τις $f_1, \dots, f_k$ έπρεπε μεταξύ κάποιων να ισχύει: $f^{-1}(()) \in D$.

Άρα, μετρησιμότητα σημαίνει ότι $\forall$ σ-άλγεβρα είναι μια ένδειξη της πληροφορίας που έχουμε για τις τιμές της συνάρτησης.

Όσο λεπταίνει η σ-άλγεβρα (όσο περισσότερες οι διαμερίσεις), τόσο περισσότερες διακεκριμένες τιμές παίρνει μια συνάρτηση.

Η $\sigma(f)$ που παράγουν οι αντίστροφες εικόνες των ανοικτών διαστημάτων είναι: $f^{-1}(a,b), a<b$.

4) i) Έστω ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $f_n: \Omega \to \mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}$.

Έστω $\Omega=\mathbb{R}$ ή κάποιο κλειστό υποδιάστημα του $\mathbb{R}$. $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, τ.ω.:

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, με $d(f_n,f)<\varepsilon$.

ii) Αν $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ και η f_n είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε η $f:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη.

Απόδειξη:

$\forall f^{-1}(A)\in\mathcal{F}$, όπου A είναι κάποιο υποσύνολο μιας οικογένειας συνόλων του $\mathbb{R}$, τ.ω.:

$$B_{\mathbb{R}}=\sigma(\tau')$$

Ως τέτοια σύνολα, επιλέγουμε τα άνω μη φραγμένα ανοιχτά διαστήματα που παράγουν την $B_{\mathbb{R}}$.

Έστω: $\mathcal{C}=\{(a,+\infty)\mid a\in\mathbb{R}\}$

Τότε: $f^{-1}((a,+\infty))$, με: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, τότε:

$$f(x)>a+\frac{1}{k}, \ \forall k\in\mathbb{N}: \frac{1}{k}>\varepsilon$$

Άρα $f^{-1}((a,+\infty))=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} f_n^{-1}\left(\left(a+\frac{1}{k},+\infty\right)\right)\in\mathcal{F}$,

και αποδεικνύεται ότι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμο άρα και το ομοιόμορφο όριο μιας f_n είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Το πιο απλό εργαλείο για να μελετήσουμε τις μετρήσιμες συναρτήσεις είναι οι απλές συναρτήσεις:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i I_{A_i}(x), \ A_i\in\mathcal{F}, x\in\Omega,$$

όπου A_i = πιθανότατα μια διαμέριση του Ω.

Το σύνολο των απλών συναρτήσεων εκτός από διανυσματικός χώρος, είναι και διανυσματικός σύνδεσμος.

5) Έστω f απλή συνάρτηση. Τότε:

$|f|, f^+, f^-$, όπου:

$f = f \vee (-f)$,

$f^+ = f \vee \mathbb{0}$ (= μηδενικό σύστημα).

$f^- = (-f) \vee \mathbb{0}$.

Επίσης, για τα f^+, f^-, ισχύει ότι:

$$\boxed{f = f^+ - f^-}$$

Και έτσι, η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ = <u>χώρος μέτρου</u>,

με το ολοκλήρωμα μιας απλής συνάρτησης να είναι το (F):

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i).$$

Μάθημα 3. (12/3/2024).

1) A° και $\overline{A}$:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος, με μετρική d, και $A \subseteq X$ μη κενό $(\neq \emptyset)$

Τότε:

A° = <u>η ένωση όλων των ανοιχτών υποσυνόλων που περιέχουν το A.</u>

$\overline{A}$ = <u>η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων που περιέχουν το A.</u>

2) Πρόταση:

i) Το A°: ανοιχτό υποσύνολο του (X, d) = μετρικού χώρου

ii) Το $\overline{A}$: κλειστό υποσύνολο του (X, d) = μετρικού χώρου.

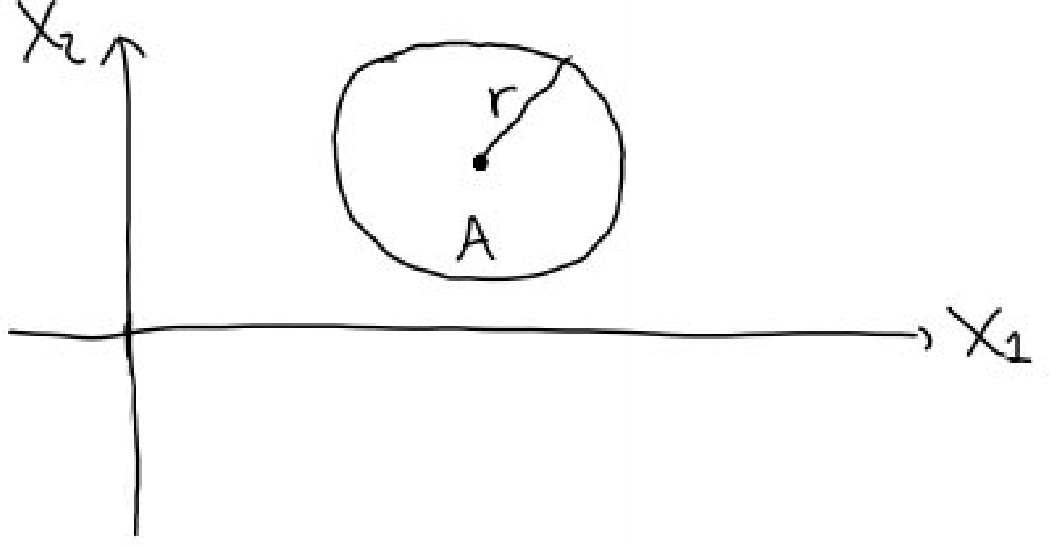
3) Πόρισμα:

Τα $A^\circ, \overline{A} \in \mathcal{B}_{(X,d)}$.

Επίσης, το:

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} \in \mathcal{B}_{(X,d)}$$

με <u>γραφική παράσταση:</u>



- με r=ακτίνα=radius, με: $A=B(x,r)=\{y_1\in\mathbb{R}^2 \mid (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\le r\}$,

ενώ σε κλειστό διάστημα έχουμε: $\{y_1\in\mathbb{R}^2 \mid (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2<r\}$

4) σ-άλγεβρες καρτεσιανών γινομένων και διαστημάτων:

Έστω ότι έχουμε τους εξής χώρους μέτρου:

$(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$

$\vdots$, και θέλουμε να βρούμε ένα καρτεσιανό γινόμενο $X_1\times\dots\times X_k$

$(X_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$

Θεωρούμε σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_1\times\dots\times\mathcal{F}_k$, με $\sigma(\mathcal{F}_1\times\dots\times\mathcal{F}_k)$ να παράγεται από αυτά τα σύνολα,

με $d(x,y)=\begin{cases}1, & x=y\\ 0, & x\neq y\end{cases}$, και $x,y\in Y_1$, και επομένως, για $0<\varepsilon<1$, το $d(x,y)<\varepsilon$, με $X_1=\{x\}$.

Επίσης, μαζί με το καρτεσιανό γινόμενο $X_1\times\dots\times X_k$ στην σ-άλγεβρα ανήκει και το διάνυσμα $(x_1,\dots,x_k)$,

όπως επίσης και ο χώρος: $A_1\times A_2$, με $A_1\in\mathcal{F}_1$, $A_2\in\mathcal{F}_2$, με το αντίστοιχο σύνολο:

$$\{A_1\times A_2,\ A_1\in X_1,\ A_2\in X_2 \mid 0<\varepsilon<1,\ d(x,y)<\varepsilon,\ X_1=\{x\}\}$$

5) Countably additive:

Έστω χώρος $(\Omega,\mathcal{F})$. Τότε, ορίζουμε $\mu, v:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$, με πρόσθεση $\mu+v$, και βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\lambda\cdot\mu$, έτσι ώστε να έχουμε το εξής:

$$\underbrace{ca}_{\text{(countably additive)}}(\Omega,\mathcal{F})=\{\mu:\Omega\to\mathbb{R} \mid \mu \text{ μέτρο στην } \mathcal{F},\ \mu(\emptyset)=0,\ \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),$$

όπου $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ξένα μεταξύ τους τα υποσύνολα της $\mathcal{F}\}$

6) $\mu\vee v$, και ιδιότητες:

α) Έστω ότι: $\mu:\mathcal{F}\to\mathbb{R}^+$, και $v:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$, με: $\max\{f_1,f_2\}(A)=\max\{(f_1,f_2)(A)\}=\max\{f_1(A), f_2(A)\}$, και αντίστοιχα για το min: $\min\{f_1,f_2\}(A)=\min\{(f_1,f_2)(A)\}=\min\{f_1(A),f_2(A)\}$.

Έστω, επίσης, ότι $(\Omega,\mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος, με $\mu_1,\mu_2:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$.

Τότε:

$$(\mu_1\vee\mu_2)(A)=\sup\{\mu_1(A)+\mu_2(B\setminus A),\ B\subseteq A,\ B\in\mathcal{F}\}$$

$$(\mu_1\wedge\mu_2)(A)=\inf\{\mu_1(A)+\mu_2(B\setminus A),\ B\subseteq A,\ B\in\mathcal{F}\}$$

β) Ιδιότητες:

i) $\mu_1\vee\mu_2=\mu_2\wedge\mu_1$

ii) $\mu_1\wedge\mu_2=\mu_2\wedge\mu_1$

Έστω χώρος $L_\infty(\Omega,\mathcal{F})$. Υπάρχει παράδειγμα $f(\Omega,\mathcal{F})$, τ.ω. $(L(\Omega,\mathcal{F}))^c$;

Απάντηση:

Βεβαίως και υπάρχει. Το $\mathcal{L}_\mu(\overset{\mathbb{N}}{\Omega}, \overset{2^{\mathbb{N}}}{\mathcal{F}})$ είναι μια χαρακτηριστική περίπτωση, όπου είναι και σ-άλγεβρα.

Έστω ακολουθία με όρους, αντίστοιχα. Τότε: $e_n = \chi_{\{n\}} = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$, με: $\sum_{i=1}^{k} e_j = f_k$, και: $f = \lim_{n\to\infty} f_n = 0$,

Συνεπώς, το κατάλληλο σύνολο για αυτήν την ακολουθία είναι το $\mathbb{N}$ = το σύνολο των φυσικών αριθμών, με $\mathcal{F}=2^{\mathbb{N}}$, οπότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει παράδειγμα $f(\Omega,\mathcal{F})$, έτσι ώστε $(\mathcal{L}(\Omega,\mathcal{F}))^c$.

7) Εξωτερικό μέτρο και ιδιότητες:

Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος.

Τότε: $\mu: \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ εξωτερικό μέτρο, με τις εξής ιδιότητες:

i) $\mu(\emptyset)=0$,

ii) Για $A, B \in \mathcal{F}$ και $A\subseteq B \Rightarrow \mu(A)\leq\mu(B)$

iii) Το $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

8) Μέτρα Lebesgue:

Έστω $\lambda([a,b]) = b-a$ (μέτρο Lebesgue).

Τότε: $\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n) \,\middle|\, A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right\} =$

$= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \,\middle|\, A\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right\}$ (εξωτερικό μέτρο Lebesgue).

Μάθημα 4: (13/3/2024):

1) Εξωτερικό μέτρο:

Έστω σύνολο Ω, μη κενό. Τότε η $\mu: 2^{\Omega} \to \mathbb{R}$, ονομάζεται εξωτερικό μέτρο στο Ω αν ικανοποιεί την ιδιότητα:

i) $\mu(\emptyset)=0$

ii) Αν $A\subseteq B \Rightarrow \mu(A)\leq\mu(B)$

iii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_n)$,

αν $A_n \subseteq \Omega$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

2) Υποδακτύλιος:

Έστω R μια κλάση υποσυνόλων του Ω.

Τότε η R ονομάζεται υποδακτύλιος του Ω, αν: $\emptyset\in R$, $A\cup B\in R$, αν $A, B\in R$, και:

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{m} C_k \text{ , όπου } A, B \in R \text{ , } C_k \in R \text{ ,}$$

αν είναι ξένα μεταξύ τους.

π.χ.: $[a, b)$, $a<b$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$

3) μ-μετρήσιμο:

Έστω $A \subseteq \Omega$. Το A ονομάζεται ~~μ-~~ μετρήσιμο αν:

$$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c) \text{ , } \forall S \subseteq \Omega.$$

4) Πρόταση: (Σ_μ).

Το $\Sigma_\mu = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ είναι μετρήσιμο}\}$ είναι μια σ-άλγεβρα του Ω, με:

$$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c)$$

$\emptyset, \Omega \in \Sigma_\mu$.

Επίσης, έστω $A \in \Sigma_\mu$. Τότε το $A^c \in \Sigma_\mu$

Το $\mu : R \to \mathbb{R}_+$ και το μ^* ορίζεται ως εξής:

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in R, \forall n \in \mathbb{N}\} \text{ ,}$$

μ^*: εξωτερικό μέτρο στο Ω $(\inf \emptyset = +\infty)$.

Όμως, το μ^* είναι μέτρο στην Σ_μ, με: $\mu^*|_{\Sigma_\mu} = \mu$

Ποια είναι η σχέση μεταξύ υποδακτυλίων και αλγεβρών (σ-αλγεβρών)?

Το $\mathcal{F}$: άλγεβρα υποσυνόλων του Ω, με:

$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$,

$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,

$\bigcup_{i=1}^{k} C_{ki} \in \mathcal{F}$,

με $C_1, \ldots, C_k$ ξένα μεταξύ τους υποσύνολα της $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subseteq R$.

5) Ολοκληρώματα:

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ απλή συνάρτηση δηλαδή έχει την εξής μοναδική έκφραση:

$$f(w) = \sum_{j=1}^{k} a_j I_{A_i}(w),$$

όπου $a_j \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{F}, i=1,2,\dots,k$, και $I_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$.

Τότε:

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} a_j \mu(A_j)$$

Επίσης, το σύνολο των απλών συναρτήσεων με πράξεις πρόσθεσης (+), και βαθμωτού πολλαπλασιασμού (·), καθώς και τα 1, ν είναι διανυσματικός σύνδεσμος

6) Πρόταση:

Κάθε θετική μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$, είναι το κατά σημείο $\left(f_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(w), w \in \Omega\right)$ όριο μιας ακολουθίας $f_n : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ που είναι απλές, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την εξής διαμέριση του $[0, +\infty)$:

$$\Big[\ 0 \ \Big|\ \tfrac{1}{2^n} \ \Big|\ \tfrac{2}{2^n} \ \cdots \ \Big|\ \tfrac{n-1}{2^n} \ \Big|\ \tfrac{n}{2^n} \ \cdots \ \Big|\ 2^n+1 \Big], \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{F} \ni A_n^i = f^{-1}\big([i-1, i)\big) + f^{-1}\big([n, +\infty)\big), \quad i=1,\dots,n.$$

με:

$$f_n(w) = \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{i-1}{2^n}\right) I_{A_n^i}(w) + \frac{n}{2^n} I_{f^{-1}\left(\left[\frac{n}{2^n}, +\infty\right)\right)}(w), \quad f(w) \nearrow,$$

και:

$$\int_{\Omega} f_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{2^n} (i-1)\, \mu(A_n^i) + n\, \mu(A_{n+1})$$

Μάθημα 5: (20/3/2024):

1) Ολοκλήρωση ως προς ένα μέτρο:

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου ή $(\Omega, \Sigma_\mu, \mu)$, όπου Σ_μ = σ-άλγεβρα των μ-μετρήσιμων συνόλων για την οποία από το Θ. Καραθεοδωρή: $\boxed{\mu^*(A) = \mu(A)}$

2) Ορισμός (Απλή συνάρτηση - Ολοκλήρωμα της f):

Απλή συνάρτηση ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $f: \Sigma_\mu \to \mathbb{R}$, τ.ω.:

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{A_i}(\omega), \forall \omega \in \Omega \text{ και } \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, k, \text{ ενώ } A_i \in \Sigma_\mu, \forall i = 1, \dots, k.$$

Τότε ως ολοκλήρωμα της f ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) = \int_\Omega f \, d\mu$$

3) Ορισμός (Κατά σημείο όριο ακολουθίας απλών συναρτήσεων):

Μια άνω συνάρτηση είναι κάθε $f: \Omega \to \mathbb{R}$ που είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας απλών συναρτήσεων. Μια τέτοια την οποία συμβολίζουμε με:

$\varphi_n: \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και $\forall$ τέτοια $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα κατά σημείο, τότε:

$$\varphi_{n+1}(\omega) \geq \varphi_n(\omega), \forall \omega \in \Omega \text{ και } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ το } \varphi_n \nearrow f \left(\lim_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(\omega) = f(\omega)\right)$$

4) Ορισμός (ολοκλήρωμα της f ως προς το μ):

Αν $\exists \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \varphi_n \, d\mu < +\infty$

Τότε ονομάζεται ολοκλήρωμα της f ως προς το μ και

και συμβολίζεται με:

$$\int_{\Omega} f \, d\mu$$

5) Ορισμός: (ολοκληρώσιμη συνάρτηση)

Μια $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται <u>ολοκληρώσιμη</u> αν το $\int_{\Omega} f\, d\mu < +\infty$,

και είναι καλά ορισμένος πραγματικός αριθμός.

i) παράδειγμα (Άνω και κάτω φράγματα):

Έστω P μια διαμέριση του $[0,1]$ που αποτελείται από τα σημεία:

$$P = \{t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1\},$$

και έστω $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, με $f(x) = a_i$, $i \in [t_{k-1}, t_k)$, και $f(x) = a_k$, και $x = 1 - t_k$,

και $\Sigma \lambda$, όπου λ μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$

$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda = \sum_{i=1}^{k} a_i (t_i - t_{i-1})$$

με $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $P = \{t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1\}$, $i = 1, \dots, k$, έχουμε τα άνω και κάτω φράγματα:

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{k} M_i (t_i - t_{i-1}), \quad M_i = \max\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i)\}$$

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{k} m_i (t_i - t_{i-1}), \quad m_i = \min\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i)\}$$

$$\int_0^{L} f(x)\,dx = \sup\{L(f, P),\ P = \text{διαμέριση του } [0,1]\}$$

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \inf\{U(f, P),\ P = \text{διαμέριση του } [0,1]\}$$

6) Κριτήριο Riemann

Μια φραγμένη $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ διαμέριση του $[0,1]$, τ.ω.:

$$\boxed{U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon}$$

7) (Ακολουθία A_n^i):

Έστω P_n διαμέριση του $[0,1]$ που $\forall n\in\mathbb{N}$ ορίζεται ως εξής:

$$A_n^i=\{t_0=0<\dots<t_{i-1}=\tfrac{i-1}{2}<t_i=\tfrac{i}{2}<\dots<t_n=n\cdot 2^n\},$$

Κάθε ακολουθία A_n^i είναι μια ακολουθία σε διαμέριση που έχει $n+1$ σημεία.

8) (Συνάρτηση και ολοκλήρωμα $\varphi_n(x)$):

Έστω $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ ορίζουμε την εξής ακολουθία απλών συναρτήσεων:

$$\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^{n2^n} f(t_{i-1})\underbrace{I_{A_n^i}(x)}_{\substack{\text{χαρακτηριστική}\\ \text{συνάρτηση}\\ \text{του } A_n^i}}+f(x_n)I_{\{x_n\}}(x_n)=n\cdot 2^n,\ n\in\mathbb{N},$$

με:

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\,d\lambda(x)=\sum_{i=1}^{n2^n} f(t_{i-1})\lambda(A_n^i)+f(x_n)\cdot\lambda(\{\cancelto{0}{x_n}\}),$$

$$\varphi_{n+1}(x)\geq\varphi_n(x),\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N},$$

με $\varphi_n\nearrow f$ είναι πραγματική συνάρτηση f όπως συνάρτηση?

Απάντηση: ΟΧΙ; δεν είναι τόσο προφανές ότι $\varphi_n \nearrow f$.

Ισχύει μόνο όταν η f είναι Σ, με:

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x)\, d\lambda(x) = \int_{\Omega} f(x)\, dx.$$

Μάθημα 6: 27/3/2024:

Εστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος μέτρου, με $\underset{\text{(απλής συνάρτησης)}}{f(\omega)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{A_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ και $A_i \in \mathcal{F}$, $i=1,\ldots,k$, με:

$$\int_{\Omega} f\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i)$$

Εάν $n = n^+ - n^-$, με $n^+ = \max\{n, 0\}$, και $n^- = \max\{-n, 0\}$

Τα παρακάτω ισχύουν αν η θετική συνάρτηση και εξαιτίας της παραπάνω ισότητας και ισχύουν και αντίστοιχα για τις αντίστοιχες συναρτήσεις.

1) Ορισμός 1: Μια άνω συνάρτηση f (upper function) είναι το κατά σημείο όριο (μ-σ.β.) μιας ακολουθίας $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών και απλών συναρτήσεων και είναι και αύξουσα η $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δηλαδή $\varphi_{n+1}(\omega) \geq \varphi_n(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$ (μ-σ.β.) και έχουμε ότι:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega} \varphi_n\, d\mu < +\infty \quad (1)$$

Εάν υπάρχει το ελάχιστο:

$$\min\{\varphi_n, \psi_n\} = k_n$$

θα είναι και αυτή μια ακολουθία από απλές ενδεικτικές συναρτήσεις $k_n \nearrow$ και:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} k_n < +\infty$$

Το θεώρημα που προκύπτει από την k_n είναι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Το (1) είναι κοινό και για τις δύο ακολουθίες.

2) Ορισμός 2: Το ολοκλήρωμα (1) μιας άνω συνάρτησης είναι το όριο:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \varphi_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

3) Θεώρημα (Μονότονης σύγκλισης)

Έστω $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία άνω συναρτήσεων η οποία είναι αύξουσα (μ-σ.β.) δηλαδή:

$$f_{n+1}(\omega) \geq f_n(\omega),$$

και συγκλίνει κατά σημείο (μ-σ.β.) στην f.

Παίρνοντας μια ακολουθία απλών συναρτήσεων που συγκλίνουν στην f_n μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία αύξουσα που συγκλίνει στην f.

Το θεώρημα μας λέει ότι το κατά σημείο όριο της ακολουθίας των άνω συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμο, και:

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu,$$

το οποίο από τον προηγούμενο ορισμό $\exists$, $\forall f_n$.

Το θεώρημα κυριαρχημένης Σύγκλισης έχει ίδιες υποθέσεις με αυτές της μονότονης.

4) Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης:

Έστω ακολουθία άνω συναρτήσεων $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει κατά σημείο (μ-σ.β.) σε μια $f:\Omega\to\mathbb{R}$ και $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένες από μια $g:\Omega\to\mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-μετρήσιμη.

Τότε το:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu, \text{ με:}$$

$$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \left\{ f:\Omega\to\mathbb{R},\ \mathcal{F}\text{-μετρήσιμες και ισχύει: } \int_\Omega |f| d\mu < +\infty \right\}$$

Στις συναρτήσεις ορίζουμε την πρόσθεση $f+g$, και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό λf.

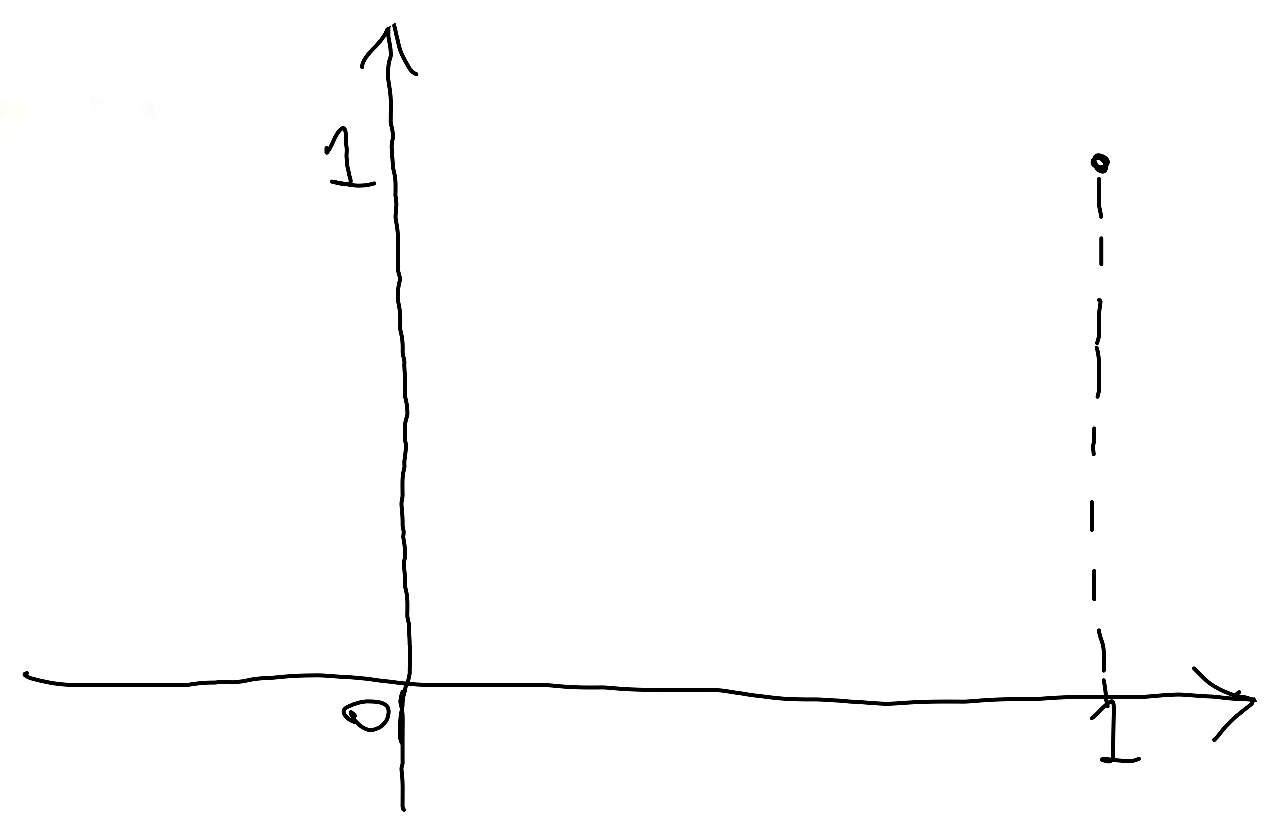
Το σύνολο αυτών των πράξεων είναι διανυσματικός χώρος. Αυτό ισχύει και για $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$

Αυτό ισχύει και για:

$$L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})=\{f:\Omega\to\mathbb{R},\ \mathcal{F}\text{-μετρήσιμη, και } \int_\Omega |f|^p d\mu<+\infty\}$$

Για να αποδειχθεί η συνθήκη ότι $\forall p\geq 1$ ισχύει ότι το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο για τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

Η απόδειξη για το άθροισμα γίνεται με τις ανισότητες minkofski:



$g: \to \mathbb{R},\ \lambda\in[0,1]$

$g(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y).$

Παράδειγμα:

Έστω $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-μετρήσιμες και επίσης

$$\int_\Omega |f|^p d\mu,\ \int_\Omega |g|^p d\mu<+\infty,$$

τότε το άθροισμα της $f+g$ θα δείξουμε ότι είναι πεπερασμένο.

Στην βάση της κυρτότητας:

$$|f+g|^p=2^p\left|\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}g\right|^p. \quad \left(\text{Αν } \lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow(1-\lambda)=\frac{1}{2}\right)$$

Επειδή η $h(x)=x^p$ είναι κυρτή, τότε:

$$2^p\left(\frac{1}{2}|f|^p+\frac{1}{2}|g|^p\right),$$

με $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})=\{f:\Omega\to\mathbb{R},\ \mathcal{F}$-μετρήσιμες απολύτως μετρήσιμες απολύτως φραγμένες και $\inf\{M>0,\ |X|\leq M<+\infty\}\}$

5) Ορισμός: (Συζυγείς):

Δύο $p,q\in\mathbb{R}$ και $p,q<1$ και αν $p=1,\ q=+\infty$, ονομάζονται συζυγείς αν:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

6) Ανισότητα Hölder:

Έστω ότι f και g είναι ορισμένες στο Ω, $\mathcal{F}$-μετρήσιμες και άλλα.

Αν $\int_\Omega |f\cdot g|\, d\mu \leq \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q}\left(\int_\Omega |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$

Στην ειδική περίπτωση όπου κάποιο από τα p ή q είναι ίσο με το ∞, τότε:

$$\inf\{M>0 \mid |g|\leq M,\ \mu\text{-σ.β.}\}$$

Επομένως, μας ενδιαφέρει η περίπτωση μέτρων πιθανότητας $\mu^*(\Omega)=1$.

Μάθημα 7. (1/4/2024)

1) Σύγκλιση ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών: (Νόρμα):

Έστω E διανυσματικός χώρος.

Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$

και $X : \longmapsto \|X\|$ ονομάζεται νόρμα στον E,

αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

i) $\|X\|=0 \Rightarrow \boxed{X=\emptyset}$

ii) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, $x, y\in E$

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και $x\in E$

Παραδείγματα:

i) Η $\|X\|_2 = \left(\int_\Omega |X|^2(\omega)\, d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{2}}$ στον $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)$,

όπου $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$: χώρος πιθανότητας.

ii) Η $\|X\|_p = \left(\int_\Omega |X|^p(\omega)\, d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$, $1\leq p<+\infty$,

iii) Η $\|X\|_\infty = \underbrace{\text{ess.sup}}_{\text{(essential supremum)}}(|X|)$, όπου $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$

2) Ολοκλήρωμα καρτεσιανού συνόλου με ανισότητα Hölder:

Με καρτεσιανό σύνολο $(\Omega,\mathcal{F},\mu)\times$ πιθανότητες:

$$E(|XY|)=\int_\Omega |XY|\, d\mu \leq \|X\|_p\, \|Y\|_q,$$

Αν ισχύει η ανισότητα του Hölder: $\Longrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1\leq p<+\infty,\ \frac{1}{+\infty}=0.$

3) Ομοιόμορφες και L^p συγκλίσεις:
Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρήσιμων τυχαίων μεταβλητών, όπου:

$$X_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} X \quad (X_n(\omega)\longrightarrow X(\omega), \text{ κατά σημείο } \mu\text{-σ.β. (σχεδόν βέβαια)}).$$

Αν $X_n \xrightarrow{o\mu.} X$, τότε: Από παρατήρηση, από τον ορισμό της $\|\cdot\|_\infty$, στην L^∞:

$$\lim_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_\infty = 0.$$

Αν $X_n \xrightarrow{L^p} X \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0$, αν $1\leq p<+\infty$.

4) Πρόταση (Σύγκλιση L^p χώρου – Πρόταση Young):

$$\text{Αν } X_n \xrightarrow{L^p} X \underset{(\not\Leftarrow)}{\Rightarrow} X_n \xrightarrow{L^1} X,\ 1\leq p<+\infty$$

5) Συνάρτηση Young:

$$\phi(x)=\frac{1}{p}|x|^p, \text{ με } \|x\| = \left(\int_\Omega |x|\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

6) Εσωτερικό Γινόμενο:

Αν το $p=\frac{1}{2}$, και $q=\frac{1}{2}$, από ανισότητα Hölder:

$$\int_\Omega |xy|\, d\mu \leq \|x\|_2\, \|y\|_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x, y\rangle = \int_\Omega xy\, d\mu.}$$

7) Χώρος Hilbert:

Απάντηση: Θέτω ανισότητα Hölder $X_1 = X_n - X$ και $y_1 = 1_\Omega$.

Τότε: $0 \leq \underbrace{\int_\Omega (|X_n - X| - 1)\, d\mu}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \leq \|X_n - X\|_p \cdot \|1_\Omega\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Ο χώρος $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι χώρος <u>Hilbert</u>. $(E, <,>, \|\cdot\|, \|x\| = \sqrt{<x,x>}$, $x \in E, <x,y> \geq 0$,

$$\text{με: } \ell^2(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \underset{\mu(\{n\})}{\mu_n} < +\infty\}$$

(Ο χώρος Hilbert ισχύει μόνον όταν: $\boxed{p=2}$, δηλαδή. μόνον ο $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι χώρος Hilbert

8) <u>Ορισμοί</u>:

Αν $X_n \to X$, και $Y_n \to Y \Rightarrow \boxed{X=Y}$ ή $\boxed{X \neq Y}$.

Αν $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \boxed{X \neq Y}$

και τότε: $\|\cancel{X_n} - x + (y - \cancel{X_n})\| \leq \|X_n - X\| + \|X_n - Y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, με $0 < \|x - y\|$.
(ή $y - x$)

9) <u>Ανισότητα Markov</u>:

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και έστω $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-μετρήσιμη.

Αν $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, τότε:

$$0 \leq \mu(\underbrace{|\overset{Y_n - Y}{X}| \geq \varepsilon}_{\{\omega \in \Omega \mid |X| \geq \varepsilon\}}) \leq \frac{\int_\Omega |X| d\mu \; (= E(|X|))}{\varepsilon}$$

$$\to \underbrace{\alpha(|Y_n - Y|)}_{\alpha_n < \delta.} <$$

(Από Πιθανότητες 1, $P(|X| \geq \alpha) \leq \frac{E(|X|)}{\alpha}$ (Ανισότητα Markov)).

Έστω $Y_n \xrightarrow{\mu} Y$, και $\varepsilon > 0$ <u>ενδεχόμενο</u>, με $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Y, $\delta > 0$, $n_0(\delta)$, όπου $n \geq n_0(\delta)$.

τότε για να βρούμε την μοναδικότητα του ορίου κατά πιθανότητας ($Y_n \xrightarrow{d} Y$), κάναμε χρήση των ιδιοτήτων της μετρικής, και ένας τύπος υπολογισμού της απόστασης είναι:

$$d(X,Y) = \int_\Omega \frac{|x-y|}{1+|x-y|} d\mu.$$

(Στην αντίθετη περίπτωση, κάναμε χρήση των ιδιοτήτων της νόρμας, όπως παραπάνω και βρήκαμε την μοναδικότητα των ακολουθιών $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.)

1) Σύγκλιση κατά κατανομή:

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τ.μ.: $X_n:\Omega\to\mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-μετρήσιμες.

Τότε έχουμε σύγκλιση κατά κατανομή $\left(X_n \xrightarrow{d} X\right)$, ανν: $F_{X_n}(x)\longrightarrow F_X(x)$, $\forall x$ σημείο συνέχειας των F_{X_n}, F_X, $n\in\mathbb{N}$.

2) Συνάρτηση Κατανομής ως προς το αντίστοιχο μέτρο:

α) Έστω F_Y = η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας τιμής μεταβλητής Y.

$$F_Y(y)=\mu\left(\{\omega\in\Omega \mid Y(\omega)\le x\}\right) = \mu\left(Y^{-1}((-\infty,x])\right)$$, $x\in\mathbb{R}$, όπου μ_Y = μέτρο κατανομής της Y.

β) Ιδιότητες της F_Y:

i) F_Y αύξουσα

ii) F_Y συνεχής από δεξιά. $\left(\lim_{x\to a^+}F_Y(x)=F_Y(a)\right)$

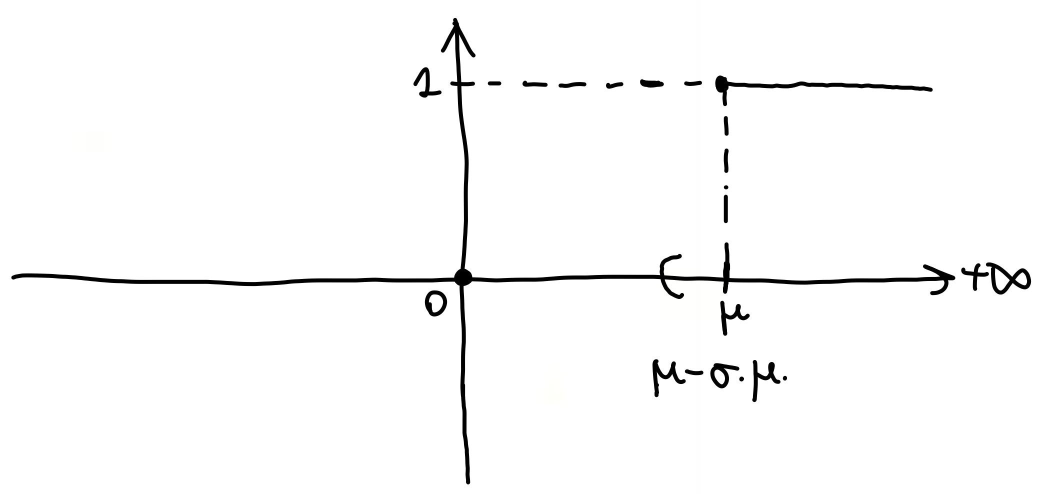
iii) $\lim_{x\to+\infty}F_Y(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty}F_Y(x)=0$.

3) Σύγκλιση κατά κατανομή στο $E(X)$:

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, με:

$$E(X_n)=\mu \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} \mu.$$

Γραφικά:



με χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$, με μετρική συνάρτηση:

$$d(X,Y)=\int_0^\infty \frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\,d\mathbb{P}$$

Με χώρο $(E, \|\cdot\|)$, το:

$$d_{\|\cdot\|}(x,y)=\|x-y\|$$

και με χώρο (E,d), το:

$$\|x\|=d(x,0).$$

Έστω χώρος $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, με $p\neq 2$, και χώρο νόρμας $(E,\|\cdot\|_p)$

Ερώτημα: Με την σχέση: $\|X\|_p=\left(\int_\Omega |X|^p\,d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p}}$, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα;

Απάντηση: Όχι, διότι:

$$\boxed{\|X-Y\|_p \neq \|X\|_p+\|Y\|_p}$$

Με χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$, σ-προσθετική και βαθμωτό πολλαπλασιασμό,

έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένα ανά δύο: $A_n\in\mathcal{F}$, τότε:

$$V\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} V(A_n).$$

4) Απόλυτη συνέχεια και ισοδυναμία μεταξύ δύο χώρων μέτρων.

Έστω $ca(\Omega,\mathcal{F})$ ο χώρος των αριθμήσιμα προσθετικών προσημασμένων μέτρων στον $(\Omega,\mathcal{F})$.

Έστω επίσης $v,\mu\in ca(\Omega,\mathcal{F})$, και $v(A)=0$, αν το $\mu(A)=0$, $A\in\mathcal{F}$.

Τότε: το $v\ll\mu$ και το v ονομάζεται απολύτως συνεχές ως προς το μ.

Αν $\mu(A)=0$ στην περίπτωση όπου $\mu(A)=0$, $A\in\mathcal{F}$, τότε: $\boxed{\mu\ll v}\Rightarrow$ Το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ

Αν $\mu\ll v$ και $v\ll\mu$, τότε τα v,μ ονομάζονται ισοδύναμα.

Συμβολισμός: $\boxed{\mu\sim v}$.

Μάθημα 9: 8/4/2024.

1) σ-πεπερασμένο μέτρο:

Έστω $(\Omega,\mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος και μ,v σ-πεπερασμένα μέτρα στον $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$

σ-πεπερασμένο ονομάζεται ένα μέτρο $m:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$, αν υπάρχει διαμέριση $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τ.ω. $A_n\in\mathcal{F}$, $\forall n\in\mathbb{N}$,

έτσι ώστε:

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

2) Απόλυτη συνέχεια και ισοδυναμία:

Ένα μέτρο μ ονομάζεται απόλυτα συνεχές ως προς το v (συμβολίζεται ως $\mu\ll v$),

αν $\forall A\in\mathcal{F}$, τ.ω: $v(A)=0 \Longrightarrow$ ισχύει $\mu(A)=0$

Όταν έχουμε $\mu\ll v$ και $v\ll\mu\Rightarrow$ Τα μ,v είναι ισοδύναμα.

3) Ανακλαστική και συμμετρική και μεταβατική ισοδυναμία:

Το $\mu\sim v$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας με την συνολοθεωρητική έννοια, δηλαδή είναι ανακλαστική ($\mu\sim\mu$), συμμετρική γιατί αν $\mu\sim v$, τότε ισχύει και η σχέση $v\sim\mu$, και μεταβατική διότι αν $\mu\sim v, v\sim\lambda\Rightarrow\boxed{\mu\sim\lambda}$

4) Θεώρημα Radon-Nikodym:

Αν $v\ll\mu$ και $\mu\ll v$ είναι σ-πεπερασμένα μέτρα στον χώρο $(\Omega,\mathcal{F})$, τότε $\exists$ μια μ-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$, τ.ω.:

$$v(A)=\int_A f\,d\mu \quad \left(f=\frac{dv}{d\mu}\right).$$

5) Μέτρο πιθανότητας V_X.

Έστω τυχαία μεταβλητή $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ μετρήσιμη.

Τότε αυτή η X επάγει ένα μέτρο πιθανότητας V_X όπου: $V_X(A)=V(X^{-1}(A))$

Για τα επαγόμενα μέτρα ισχύει ότι:

$$V_X(A)=\int_A f\,d\lambda,\ f(\cdot),\ V_X\ll\lambda.$$

Τότε, αυτή η f είναι συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

6) Σύγκλιση ακολουθίας Cauchy:

Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n\in\mathbb{R}$ συγκλίνει (σε κάποιο πραγματικό αριθμό a),

αν είναι βασική (ή αλλιώς ακολουθία Cauchy), δηλαδή αν $\forall \varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$,

τ.ω.:

$$|a_m-a_n|<\varepsilon,$$

$\forall\, m,n\geq n_0(\varepsilon)$, $m,n\in\mathbb{N}$.

Επομένως, θα μετρήσουμε την σύγκλιση ακολουθιών χώρου συναρτήσεων και οι ακόλουθες τυχαίες μεταβλητές $X: f\to\mathbb{R}$.

Αν E υπόχωρος (στον $\mathbb{R}^f$) εφοδιασμένος με μια νόρμα $\|\cdot\|$, θεωρούμε τον $(E,\|\cdot\|)$.

7) Προϋπόθεση εύρεσης βασικής ακολουθίας.:

Μια ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $X_n\in E$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ονομάζεται βασική ή ακολουθία Cauchy ως προς την $\|\cdot\|$,

αν $\forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, τ.ω. $\|X_m-X_n\|<\varepsilon$.

8) Χώρος Banach:

Αν κάθε βασική ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n\in E$, συγκλίνει στον E, δηλαδή $\exists X\in E$, τ.ω.: $\forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, τ.ω.:

$$\|X_n-X\|<\varepsilon,\quad n\geq n_0(\varepsilon)$$

ονομάζεται χώρος Banach.

9) Ισοδυναμία νορμών $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$:

Έστω $E=\mathbb{R}^m$. Τότε αποδεικνύεται ότι $\forall$ ζεύγος από νόρμες $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ στον E ισχύει ότι:

$$\boxed{k_1\|x\|_1\leq\|x\|_2\leq k_2\|x\|_1},\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^m,$$

και κάποιους $k_1,k_2>0$.

(Οι άλλες όπως συνήθως λέγεται, οι $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες.)

Έστω ότι: $\|X_n-X\|<\varepsilon$, $n\geq n_0(\varepsilon)$, $\forall\varepsilon>0 \Longleftrightarrow |X_n(i)-X(i)|<\varepsilon(i)$, $n\geq n_0(\varepsilon,i)$, $i=1,\dots,m$.

Τότε η ακολουθία είναι χώρος banach για την L^p, $\|\cdot\|_p$, $1\leq p\leq+\infty$

10) Θεώρημα (χώρος banach με χρήση της ανισότητας Hölder):

Έστω (Ω,f,μ) χώρος μέτρου που είναι σ-πεπερασμένος. Τότε ο $L^p(\Omega,f,\mu)$ είναι χώρος banach

ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_p$, για συγκεκριμένο p.

$$\|X\|_p = \left(\int_\Omega |X|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ αν } 1\le p\le +\infty,$$

και $\|X\|_\infty = \inf\{M>0 |$

Τότε ισχύει η ανισότητα του Hölder:

$$\int_\Omega \underbrace{|XY|}_{L^1} d\mu \le \underbrace{\|X\|_p}_{L^p,\ p>1}\underbrace{\|Y\|_q}_{I_0}, \text{ όπου για } p,q: \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

και αν $p=1 \Rightarrow q=+\infty$.

Οπότε, αν συνδυάσουμε τα δύο μέλη της ανισότητας Hölder, διαπιστώνουμε ότι ακόμα και αν οι τυχαίες μεταβλητές είναι καλά ορισμένες, η νόρμα $\|\cdot\|_p$ δεν είναι χώρος banach, διότι η $\|\cdot\|_p$ είναι χώρος banach με βασική συνάρτηση να είναι στο L^1, όχι όμως στο L^p απαραίτητα, διότι εφοδιάζουμε τον χώρο L^p με τον L^1.

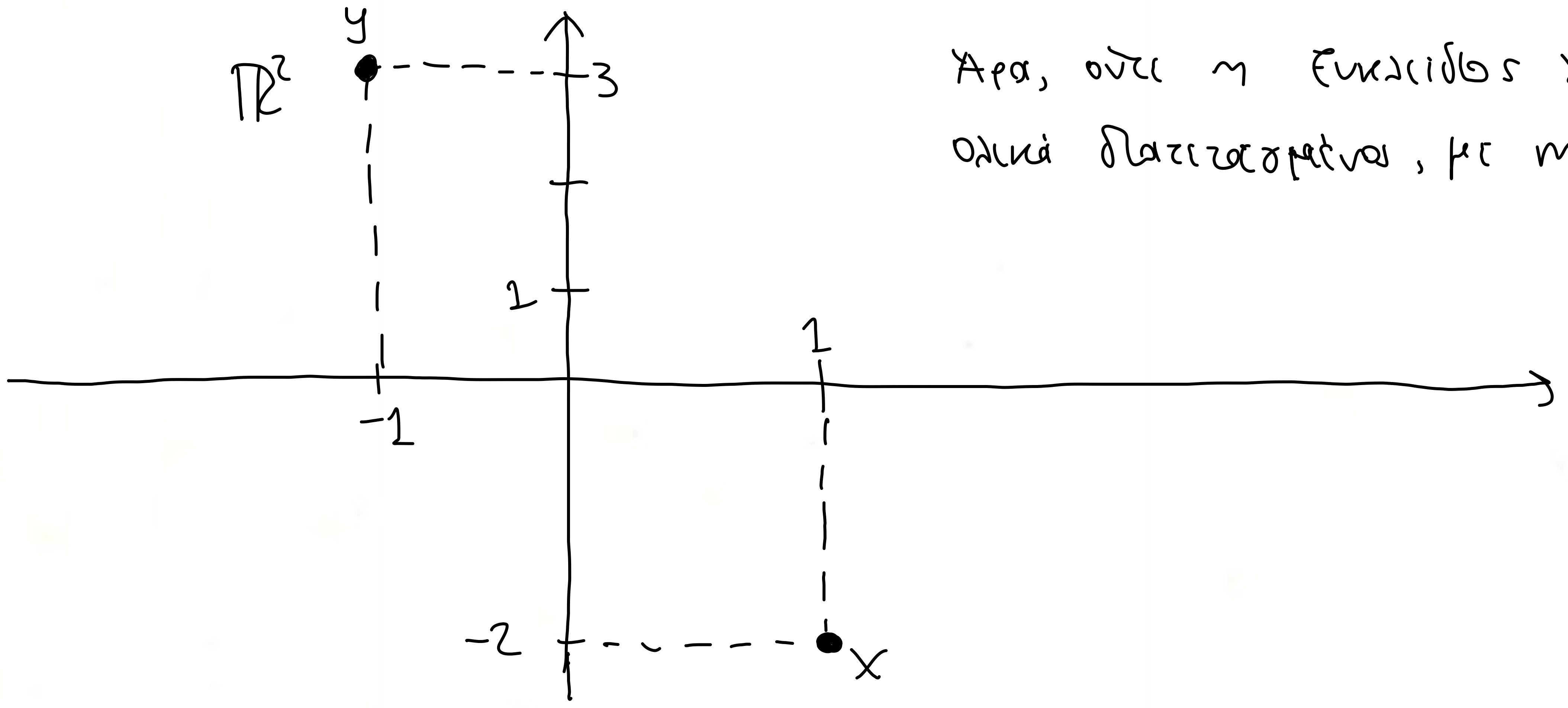
Ένας χώρος άπειρης διάστασης είναι χώρος banach μόνο το πολύ ως προς μία νόρμα.

Αν ένας χώρος είναι χώρος banach σε όλες τις νόρμες, τότε αναγκαστικά θα είναι και πεπερασμένης διάστασης. Ισχύει και το αντίστροφο.

11) Ολική και μερική διάταξη για άπειρο και πεπερασμένο χώρο.

Έστω σύνολο $\mathbb{R}$, με α, β τ.ω.: $\alpha\le\beta$

Τότε, πάνω στον δισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^2$, έχουμε την ακόλουθη γραφική απεικόνιση:



Άρα, ούτε η Ευκλείδειος χώρος είναι ολικά διατεταγμένος, με $m>1$

και ονομάζεται μερικά διατεταγμένος χώρος, για $m>1$.

Για χώρο άπειρης διάστασης L^p, η μερική διάταξη είναι:

$$X(\omega)\ge Y(\omega),\ \forall\ \mu\text{-σ.β.}$$

Αν $\|X_n - X\| \le \|Y_n - X\|$, $X \in L^p$, $1 \le p < +\infty$, $p \neq +\infty$

Όμως η μερική διάταξη δεν είναι ολικά διατεταγμένη.

Και επομένως, αυτό μπορούμε να το βρούμε για πολλά είδη συναρτήσεων, όπως το $X^+, X^-, |X|$.

Μάθημα 10: 15/4/2024:

1) Σχέση μεταξύ σύγκλισης κατά σημείο και σύγκλιση κατά μέτρο και σχέση μεταξύ σύγκλισης κατά σημείο και L^p-σύγκλισης:

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τ.ω.:

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

και η ακολουθία:

$$\mu^*(\{w \in \Omega \mid |f_n(w) - f(w)| \ge \varepsilon\})$$

συγκλίνει στο 0, $\forall \varepsilon > 0$.

Από τον ορισμό της σύγκλισης κατά μέτρον, έστω $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n > 1$.

Τότε, επαγωγικά, για k_n: ακολουθία των φυσικών αριθμών, δηλαδή για $k_{n+1} > k_n > \dots > k_1$, ισχύει:

$$\mu^*(\underbrace{\{w \in \Omega \mid |f_{k_n}(w) - f(w)| \ge \tfrac{1}{n}\}}_{E_n}) < \frac{1}{2^n}, \quad n > n_0,$$

είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στο 0.

Έστω: $$E = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \Longrightarrow \left(\mu^*(E) \le \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) \le \frac{2}{2^n}\right.,$$

μονοτονία του εξωτερικού μέτρου, δηλαδή αν $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$

ορισμός εξωτερικού μέτρου.

με: $$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n} \ge \mu^*(E) \ge 0 \Longrightarrow \boxed{\mu^*(E) = 0}$$

$\forall w \notin E$, $\exists$ κάποιος $k_n \in \mathbb{N} \ge n$, να ισχύει:

$$|f_{k_n}(w) - f(w)| < \frac{1}{n} \iff f_{k_n} \to f, \text{ κατά σημείο.}$$

Αν το μ είναι πεπερασμένο μέτρο, με $1 \le p \le +\infty$

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \iff \int_\Omega |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

και αφού η $f_n \xrightarrow{\mu} f \Longrightarrow \exists$ υπακολουθία $f_{k_n} \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ (μ-σ.π.)

2) Συναρτησιακό του E.

Εστω E διανυσματικός χώρος. Κάθε γραμμική συνάρτηση $x: E \to \mathbb{R}$ ονομάζεται γραμμικό συναρτησοειδές ή απλά συναρτησιακό του E.

Το σύνολο γραμμικών συναρτησιακών με πεδίο ορισμού τον E με τις πράξεις $x'+y'$ και $\lambda x'$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x', y' \in E$

$$(x'+y')(x) = x'(x) + y'(x) \quad \text{και} \quad (\lambda x')(x) = \lambda x'(x)$$

έτσι είναι διανυσματικός χώρος και ονομάζεται αλγεβρικός δυϊκός χώρος του E.

3) Εσωτερικό γινόμενο με ανισότητα Hölder:

Εστω $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \le p \le +\infty$ και $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου, με $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$,

δηλαδή: $\boxed{X_n \xrightarrow{L^p} X}$, τίθεται το ερώτημα:

Για ποια $x' \in (L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu))'$, ισχύει ότι:

$$X'(X_n) \not\longrightarrow X'(X).$$

Αποδεικνύεται ότι ο υπόχωρος του $(L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu))$ για τον οποίο αν ισχύει $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow$

$$\Longrightarrow X'(X_n) \longrightarrow X'(X),$$

είναι ο L^q, όπου $q = $ ο συζυγής αριθμός του p ως ανισότητα Hölder δηλαδή:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 \le p \le +\infty, \text{ και } \frac{1}{+\infty} = 0.$$

και έτσι:

$$\langle x', x \rangle = \int_\Omega |x \cdot x'| d\mu \overset{\text{Hölder}}{\le} \|x\|_p \, \|x'\|_q,$$

με σχετικά παραδείγματα.

4) Ζεύγη Riesz:

Εστω ότι: $\langle E, E^* \rangle$, με E^* υπόχωρος του E, με αντίστοιχο συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x^*, x \rangle$.
(πρέπει να αποδειχθεί).

και $\langle E^*, (E^*)^* \rangle$, με $(E^*)^*$ υπόχωρος του E^*, με αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα.

Τότε, αν το E είναι υπόχωρος $(E^*)^*$, τότε, για τους συγκεκριμένους χώρους μόνο, ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα των εσωτερικών γινομένων. (Πρέπει να το αποδείξουμε).

Μάθημα 11: (22/4/2024):

1) Διανυσματικός χώρος γραμμικών συναρτησιακών του χώρου E.

Έστω E: διανυσματικός χώρος. Συμβολίζουμε με E' τον διανυσματικό χώρο των γραμμικών συναρτησιακών του E, άρα τα $x' \in E'$, ανν: $x': E \to \mathbb{R}$, και:

$$x'(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha x'(x_1) + \beta x'(x_2), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ και } x_1, x_2 \in E.$$

2) Χώρος των συνεχών γραμμικών συναρτήσεων:

Με $E^* =$ ο υπόχωρος του E' ως προς τον οποίο ισχύει ότι:

$$x^*(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*(x),$$

όπου $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ και $x \in E$.

Ο E^* έχει το εξής νόημα στην θεωρία μέτρου και στην θεωρία πιθανοτήτων ειδικότερα:

Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$: μετρήσιμος χώρος τα προσημασμένα μέτρα απέχουν διανυσματικό χώρο και θεωρούμε μια ακολουθία $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα.

3) Γραμμικό συναρτησιακό μ:

Κάθε μ: γραμμικό συναρτησιακό που "δρα" πάνω από "απλές" συναρτήσεις

$\left(\sum_{j=1}^{k} a_i I_A \right.$, A_i ανά δύο μεταξύ τους και $a_i \in \mathbb{R}_i$, οπότε:

$$\mu(A) = \mu(I_A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A), \ A \in \mathcal{F}.$$

4) Θεώρημα Diedonne:

Το μ είναι μέτρο, αν η $\mathcal{F}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα ενός μετρικού χώρου (X, d), που είναι διαχωρισμός (X, d), για την οποία υπάρχει ένα αριθμήσιμο $D(X_n) \le X$ που είναι $D = X$, και:

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = L^p(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu) \quad \text{(Polish)}$$

5) Borel:

Το $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ακολουθία μέτρων πιθανότητας (ορίζεται στην Borel σ-άλγεβρα ενός μετρικού χώρου),

και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ακολουθία πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στο $+\infty$, και τότε:

$$\lim P_n(A) = P(A) \quad \text{(από το Θεώρημα Vitali-Hahn-Saks),}$$

όπου A: Borel υποσύνολο του (X, d), και ισχύει ότι:

$$f_n(A) = \frac{A}{a_n} \log P_n(A), \ \log x < 0, \ 0 < x < 1, \text{ και}$$

$$f(g(X)) \le \lim_{x\in A^o} \inf(f_n(A)) \le \lim\sup(f_n(A)) \le -\inf(g(x)), \ x \in A, \text{ με } g: X \to \mathbb{R}_+ \text{ συνεχής και φραγμένη.}$$

Μάθημα 12: (13/5/2024):

1) Ακολουθία M_n

Με $0<p<1 \Rightarrow \log p<0$, p πιθανότητα, τότε έχουμε το $\log P_X(\alpha)$, αν $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και X: μετρήσιμη συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$, με ακολουθίες $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ανεξάρτητες και ισόνομες, με $E(e^{\lambda X_i})<+\infty$, $\forall \lambda>0$, και $\forall i=1,2,\dots$, $(i\in\mathbb{N})$ και επιπλέον $Var(X_i)=\sigma^2$, $\forall i\in\mathbb{N}$, τότε ορίζεται η ακολουθία:

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k\leq n} X_k ,$$

η $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει την εξής ιδιότητα:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^2}{n} \log \mathbb{P}(\alpha_n M_n \geq x) = -\frac{x^2}{2\sigma^2} ,$$

αν η $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ακολουθία πραγματικών αριθμών) έχει την ιδιότητα:

$$1\leq \alpha_n \leq \sqrt{n} , \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

2) Θεώρημα Vintelli-Hahn-Saks:

Έστω $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πεπερασμένων (που λαμβάνουν πεπερασμένες τιμές) στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$.

Έστω συνάρτηση $\mu: \Omega \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A), \ \forall A\in\mathcal{F} \text{ είναι μέτρο ορισμένο στην } \mathcal{F}.$$

Το Θεώρημα αυτό εξειδικεύεται από το Θεώρημα Dieudonne.

Μάθημα 13: (20/5/2024):

Ασκήσεις:

1) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $\mathbb{P}$ μη ατομικό μέτρο. Επίσης, έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία $\mathcal{F}$-μετρήσιμων συναρτήσεων τ.ω.

$X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X$.

Να διχθεί ότι:

$$\int_\Omega X_n \, d\mathbb{P} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$$

ΛΥΣΗ:

Το $X_n - X \leq |X_n - X|$ και $X - X_n \leq |X_n - X|$. Με $\mathbb{P}$-σχεδόν βέβαιο:

$$\int_\Omega (X_n - X) \, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega |X_n - X| \, d\mathbb{P},$$

και

$$\int_\Omega (X - X_n) \, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega |X_n - X| \, d\mathbb{P},$$

διότι από τον ορισμό το ολοκλήρωμα ως προς ένα μέτρο, αν:

$f \leq g$, $\mathbb{P}$-σχεδόν βέβαιο (σ.β), τότε:

$$\int_\Omega f \, d\mathbb{P} = \int_\Omega g \, d\mathbb{P}$$

(αν τα ολοκληρώματα αυτά είναι καλώς ορισμένα, δηλαδή πραγματικοί αριθμοί.)

Από τις (1),(2), και την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, αφού η $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$:

$$\beta_n = \int_\Omega (X_n - X) \, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega |X_n - X| \, d\mathbb{P} \quad (1)$$

$$\gamma_n = \int_\Omega (X - X_n) \, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega |X_n - X| \, d\mathbb{P} \quad (2)$$

Άρα, το:

$$\left(E(X_n) = \right) \int_\Omega X_n \, d\mathbb{P} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega X \, d\mathbb{P} \left(= E(X) \right).$$

Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει αν $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$ $(1 \leq p < +\infty)$, γιατί η σύγκλιση κατά L^p συνεπάγεται την σύγκλιση κατά L^1.

2) Να δοθεί παράδειγμα μιας μη μετρήσιμης συνάρτησης.

ΛΥΣΗ:

Έστω $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ και $\sigma_1 = \{1,2,3\}$, $\sigma_2 = \{4,5\}$, με διαμέριση $\mathbb{F} = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, και η $\sigma(\mathbb{F}) = \{\emptyset, \Omega, \sigma_1, \sigma_2\}$,

και η $f(w) = \begin{cases} 1, & w = 1,2 \\ 4, & w = 3 \\ 5, & w = 4,5 \end{cases}$ (όπου η $\sigma(\mathbb{F})$ είναι $\sigma(\mathbb{F})$-Borel).

Όμως, $f^{-1}\left(\left(3,\frac{9}{2}\right)\right)=\left\{w\in\Omega \mid f(w)\in\left(3,\frac{9}{2}\right)\right\}=\{3\}\notin\sigma(\mathbb{F})$.

Αν η $f(w)=\begin{cases}1, & w=1,2,3\\ 5, & w=4,5\end{cases}$, και $f^{-1}((3,6))=\{w\in\Omega \mid f(w)\in(3,6)\}=\{4\}\notin\sigma(\mathbb{F})$, τότε επίσης δεν θα είχαμε μετρήσιμη συνάρτηση.

Αν το αποτέλεσμα παραπάνω ήταν $\{2\}$, τότε, δεν θα αναφερόταν στα στοιχεία του σ_2 και τότε θα είχαμε μετρήσιμη συνάρτηση. Αλλιώς, δεν θα είχαμε. $\square$.

ΤΕΛΟΣ.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner