Εργασία στο μάθημα 'Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου' -Ιούνιος 2024

31 Μαΐου 2024

1. Αν (X, d) είναι μετρικός χώρος με μετρική d να δείξετε ότι το σύνολο των σημείων της κλειστής θήκης $\overline{A}$ ενός μη κενού συνόλου A του X, ανήκει στη σ -άλγεβρα του Borel που παράγεται από αυτόν - δηλαδή που παράγεται από τα ανοικτά σύνολα του X.

2. Έστω Ω πεπερασμένο σύνολο και $\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ μια διαμέρισή του. Να δείξετε ότι οι μετρήσιμες συναρτήσεις ως προς τη σ- άλγεβρα που παράγεται από τη διαμέριση αυτή είναι εκείνες που λαμβάνουν σταθερή τιμή σε κάθε σ_i, $i = 1, ..., k$.

3. Αν (Ω, F, P) είναι χώρος πιθανότητας τότε να δείξετε ότι αν μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n \in N}$-όπου N είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών συγκλίνει κατά L^1 σε κάποια τυχαία μεταβλητή X, τότε η ακολουθία των ολοκληρωμάτων $E(X_n)$ αυτών των τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει στο ολοκλήρωμα $E(X)$ της X. Οι αναφερόμενες τυχαίες μεταβλητές ανήκουν στον $L^1(\Omega, F, P)$ και έχουν πραγματικές τιμές.

4. Ισχύει το ίδιο αν οι τυχαίες μεταβλητές ανήκουν στον $L^p(\Omega, F, P)$, όπου $1 < p < +\infty$;

5. Να δοθεί ο ορισμός της σύγκλισης κατά μέτρο.