

20/05/2024

Εστω  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  χώρος πιθανότητας και  $\mathbb{P}$  η ατομική μέτρο. Επ' ου, έστω  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία τυχ. βερ.  $\mathcal{F}$ -βερ. συσφρτη-  
σεων τ. ω.  $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$   
και  $X_n \xrightarrow{L^1} X$ . Ν. δ. ο.:

$$\int_{\Omega} X_n d\mathbb{P} \longrightarrow \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$X_n - X \leq |X_n - X| \text{ και } X - X_n \leq |X_n - X|$$

,  $\mathbb{P}$ -σ.β.

$$\text{Τη ολοκλήρω } \int_{\Omega} (X_n - X) d\mathbb{P} \leq \int_{\Omega} |X_n - X| d\mathbb{P} \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} (X - X_n) d\mathbb{P} \leq \int_{\Omega} |X_n - X| d\mathbb{P} \quad (2)$$

Διότι από ορισμό του ολοζου ω/ ηρ ο  
ένσ βέρρο

$$\text{Αν } f \leq g, \mathbb{P} \text{ σ.β. τότε}$$

$$\int_{\Omega} f d\mathbb{P} \leq \int_{\Omega} g d\mathbb{P}$$

αν τη ολοκλήρω αυτή είναι κατά ορισμό  
δηλαδή ηρσ ηησ ηησ αριθροί.



Από τις ① και ② η γραμμικότητα του ολοζου φαν η  $a_n = |X_n - X| \rightarrow 0$

Επομένως  $B_n = (X_n - X) \xrightarrow{L^1} 0$   
και  $f_n = (X - X_n) \xrightarrow{L^1} 0$

Επομένως  $\int_{\Omega} X_n dP \longrightarrow \int_{\Omega} X dP$



Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει αν η ακολουθία  $X_n \xrightarrow{L^p} X$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) γιατί η σύγκλιση κατά  $L^p$  συνεπάγεται στην σύγκλιση κατά  $L^1$

$$\int_{\Omega} X_n dP \xrightarrow{=} \int_{\Omega} X dP = E(X)$$

$E(X_n)$

□

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δώστε παράδειγμα της υποεργασίας του  $\sigma$ -αλγεβρας

Έστω  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  και  $\sigma_1 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \sigma_2 = \{\emptyset, \{4, 5\}\}$

$\mathcal{F} = \{\sigma_1, \sigma_2\}$  και η  $\sigma(\mathcal{F}) = \{\emptyset, \Omega, \sigma_1, \sigma_2\}$

και  $f(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = 1, 2 \\ 4, & \omega = 3 \\ 5, & \omega = 4, 5 \end{cases}, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

( $\sigma(\mathcal{F})$  - Borel).

$$\text{Όπως } f'((3, 9/2)) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in (3, 9/2)\} = \\ = \{3\} \notin \sigma(\mathcal{F})$$

Γεν ορίσθηκε την

$$f = \begin{cases} 1 & \omega = 1, 2, 3 \\ 5 & \omega = 4 \\ 7 & \omega = 5 \end{cases}$$

Εδώ ηρώ ευν ηαρον ηε την αοη/οηρ.  
Ελκδνq του αοοιχτου δ(4δ7. (3,6) δλδ.

$$f'((3,6)) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in (3,6)\} = \{4\} \notin \sigma(\mathcal{F})$$

ήρω ούη εδω είνα, βεηρ. η ουνάρτηση.

Ευν  $f_2(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = 1, 2, 3 \\ 5, & \omega = 4, 5 \end{cases} \quad f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

είνα, ηλq ηεηρ. ουνάρτηση