Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής Ι:

Τυπολόγιο:

$a(t) = \dfrac{A(t)}{A(0)}$: Συνάρτηση Συσσώρευσης

$i_k = \dfrac{A(k) - A(k-1)}{A(k-1)}$: Επιτόκιο

$d_k = \dfrac{A(k) - A(k-1)}{A(k)}$: Προεξοφλητικό Επιτόκιο

$\delta_t = \delta(t) = \dfrac{a'(t)}{a(t)}$ $(\ln a(t))'$: Ισχύς Τόκου

$a(t) = e^{\int_0^t \delta(u)du}$: Μας δίνει την συνάρτηση συσσώρευσης όταν μας δίνουν την ισχύς του τόκου.

$a(t) = 1 + i \cdot t$: Απλός Τόκος

$A(t) = (1+i)^t$: Σύνθετος Τόκος

$$\left.\begin{aligned} a(t) &= \frac{A(t)}{A(0)} \\ u(t) &= a^{-1}(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A(0) = u(t) \cdot A(t)$$: Παρούσα Αξία

$u(t) = (1+i)^{-t}$: Παρούσα Αξία στον Σύνθετο Τόκο

$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{1-u^n}{1-u}$: Παρούσα Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

$a_{\overline{n}|} = u \dfrac{1-u^n}{1-u} \Rightarrow a_{\overline{n}|} = u\ddot{a}_{\overline{n}|}$: Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$: Συσσωρευμένη Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

$S_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)-1}{i}$: Συσσωρευμένη Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

$(1+i)$: συντελεστής συσσώρευσης
$v = \frac{1}{1+i}$: συντελεστής προεξόφλησης
$\Rightarrow v(t) = v^t$: συντελεστής προεξόφλησης

$v(t) = a^{-1}(t)$: Συνάρτηση Παρούσας Αξίας

$S_T = P(T>x)$: Συνάρτηση Επιβίωσης
$F_T(x) = P(T \leq x)$: Συνάρτηση Κατανομής
$\Rightarrow$ Ισχύει $\boxed{S_T(x) + F_T(x) = 1}$

$f_T(x) = F'_T(x)$
$f_T(x) = F_T'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$
$f_T(x) = (1 - S_T(x))' = S_T(x)$
: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$P(x_1 < T \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_T(x)dt = F_T(x_2) - F_T(x_1) = S_T(x_1) - S_T(x_2)$: Η πιθανότητα ένα νεογέννητο να αποβιώσει μεταξύ των ηλικιών x_1 και x_2 $(x_1 < x_2)$.

$P(x_1 < T \leq x_2 | T > x_1) = P\frac{(x_1 < T \leq x_2 | T > x_1)}{P(T>x_1)} = \frac{P(x_1 < T \leq x_2)}{P(T>x_1)} = \frac{F_T(x_2) - F_T(x_1)}{1 - F_T(x_1)}$

: Η δεσμευμένη πιθανότητα ένα νεογέννητο να αποβιώσει στο διάστημα (x_1, x_2) δοθέντος ότι έχει ζήσει x_1 χρόνια.

$P(x < T \leq x+dx | T>x) = \frac{F_T(x+dx) - F_T(x)}{1 - F_T(x)} = \lim_{dx \to 0} \frac{P(x < T \leq x+dx | T > x)}{dx}$

$= \lim_{dx \to 0} \frac{F_T(x+dx) - F_T(x)}{dx} = \frac{1}{1 - F_T(x)} = \frac{F'(x)}{1 - F(x)}$: Η πιθανότητα ένα άτομο να αποβιώσει στο χρονικό διάστημα $(x, x+dx)$ δοθέντος ότι έχει ζήσει x χρόνια.

$$\mu_T(x) = \lim_{dx \to 0} P(x < T < x + dx \mid T > x) = \frac{f'_T(x)}{1 - F_T(x)} \quad : \qquad (3)$$

Συνάρτηση κινδύνου

$$\mu_T(x) = \frac{f'_T(x)}{S_T(x)} = \frac{(1 - S_T(x))'}{S_T(x)} = -\frac{S'_T(x)}{S_T(x)} = -(\ln S_T(x))'$$

$$= -\mu_T(x) = (\ln S_T(x))' \Rightarrow -\int_0^x \mu_T(u)\,du = \ln S_T(x) \Rightarrow$$

$$S_T(x) = e^{-\int_0^x \mu_T(u)\,du}$$ (Συνάρτηση κινδύνου)

Δεύτερος τρόπος ορισμού της συνάρτησης κινδύνου:

Έστω l_0: Ο αριθμός των νεογέννητων

Έστω $1 \leq j \leq l_0$ και ορίζω $P(T^j > x) = P(T > x)$

Ορίζω ως $S(x)$: Το πλήθος των επιζώντων από τα l_0 στην ηλικία x. Έχω την δεικτρια τυχαία μεταβλητή

$$I_j = \begin{cases} 1, & T > x \\ 0, & T \leq x \end{cases}$$ (διακριτή τυχαία μεταβλητή)

Τότε $S(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$ τότε,

$$E(I_j) = 1\,P(T > x) + \cancel{0\,P(T \leq x)}^{\,0} = P(T > x) = S_T(x)$$

$$= E(S(x)) = E\left(\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right) = E(I_1 + I_2 + \dots + I_j) = E(I_1) + E(I_2)$$

$$+ \dots + E(I_j) = \underbrace{S_T(x) + S_T(x) + \dots + S_T(x)}_{l_0}$$

Scanned with CamScanner

Άρα $E(S(x)) = l_0 S_T(x)$

Ονομάζω $l_x = E(S(x)) = l_0 S_T(x)$ l_x: είναι η μέση τιμή του πλήθους που επιβιώνουν μέχρι την ηλικία x.

Η I_j $1 \leq j \leq l_0$ παίρνει τις τιμές 1,0 είναι δοκιμές Bernoulli

$S(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$ (άθροισμα δοκιμών Bernoulli) τότε ακολουθεί την Διωνυμική

$$S(x) = Bin(l_0, S_T(x))$$: Η τυχαία μεταβλητή

$$l_x = l_0 \cdot S_T(x) \Rightarrow l'_x = l_0 S'_T(x) \Rightarrow \frac{l'_x}{l_x} = -\frac{l_0}{l_x} f_T(x) \Rightarrow$$

$$\frac{l'_x}{l_x} = -\frac{l_0}{l_x} \frac{f_T(x)}{S_T(x)} \Rightarrow -\frac{l'_x}{l_x} = \frac{f_T(x)}{S_T(x)} \Rightarrow \mu_T(x) = -\frac{l'_x}{l_x}$$

ή $\mu_T(x) = -(\ln l_x)'$: Συνάρτηση κινδύνου (μας δείχνει τον σχετικό ρυθμό μείωσης του πληθυσμού

Ορίζω ${}_n\Delta_x$: Είναι ο αριθμός των θανάτων μεταξύ των ηλικιών $x, x+n$

και ${}_nd_x = E_n(\Delta_x)$ το μέσο πλήθος των θανάτων μεταξύ x, $x+n$. Ορίζω την δείκτρια συνάρτηση:

$$C_j = \begin{cases} 1, & x < T \leq x+n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα, $ {}_n\Delta_x = \sum_{j=1}^{l_0} C_j \Rightarrow E[{}_n\Delta_x] = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} C_j\right]$

$$E[C_j] = 1P(x<T\le x+n) + \underbrace{0P(T\ \text{αλλού})}_{\to 0} \Rightarrow$$

$$E[C_j] = P(x<T\le x+n) = F_T(x+n) - F(x) = S_T(x) - S_T(x+n)$$

Άρα, $E[C_j] = S_T(x) - S_T(x+n)$

Άρα,

$$ {}_nd_x = E[{}_n\Delta_x] = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} C_j\right] = \sum_{j=1}^{l_0} E(C_j) \Rightarrow$$

$$ {}_nd_x = l_0\left[S_T(x) - S_T(x+n)\right] \Rightarrow$$

$$ {}_nd_x = l_0 S_T(x) - l_0 S_T(x+n) \Rightarrow$$

$$ {}_nd_x = l_x - l_{x+n}$$

Πέμπτη 25 Οκτωβρίου 2021

Βιβλίο: Κ. Χατζόπουλου. Μαθηματικά Ασφ. Ζωής.

Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής:

Κεφάλαιο 1:

Εισαγωγικές Έννοιες Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών:

Οι ασφαλίσεις ζωής είναι χρηματοοικονομικές συναλλαγές και πρέπει να λάβουμε υπόψη την χρονική αξία του χρήματος.

Θα πρέπει να ασχοληθούμε με την θεωρία του τόκου.

Τεχνικό Επιτόκιο:

Είναι το εγγυημένο επιτόκιο για τους υπολογισμούς στα αναλογιστικά μεγέθη στις ασφαλίσεις ζωής.
Το τεχνικό επιτόκιο δεσμεύει τις ασφαλιστικές εταιρίες στις αποδόσεις.

Ορισμοί:

α) **Κεφάλαιο:** Είναι το χρηματικό ποσό που συσσωρεύεται με την πρόοδο του χρόνου. Το συμβολίζω με $A(t)$. Άρα $A(0)$ είναι το αρχικό κεφάλαιο.

β) **Συνάρτηση Συσσώρευσης:** $a(t)=\frac{A(t)}{A(0)}$ είναι ένας δείκτης συσσώρευσης

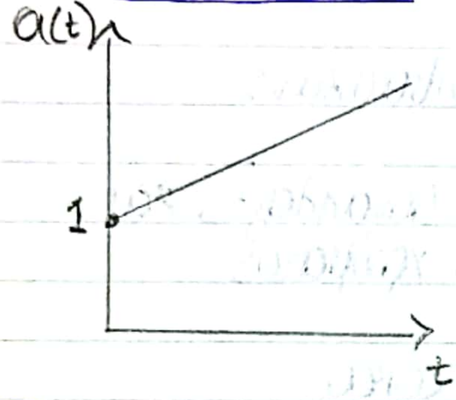
$a(0)=1$ (αρχή της συνάρτησης)

γ) Τόκος: Σε μια χρονική περίοδο t. Ορίζεται ως αποζημίωση του δανειστή και είναι $A(t) - A(0)$

Τόκος $= A(t) - A(0) = a(t)A(0) - A(0) = A(0)(a(t) - 1)$

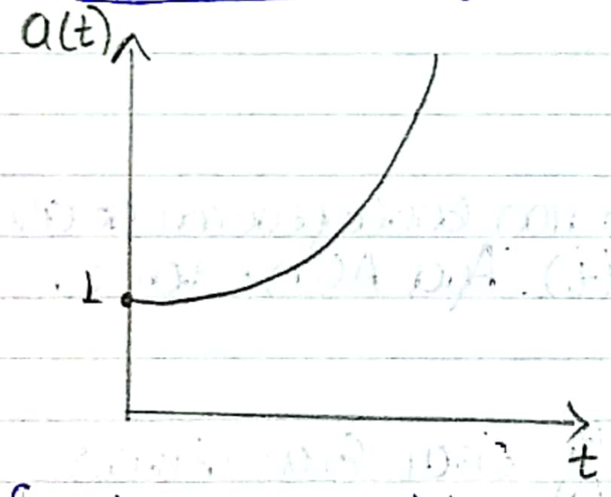
Έχουμε τρία είδη τόκων:

1) Απλός Τόκος:



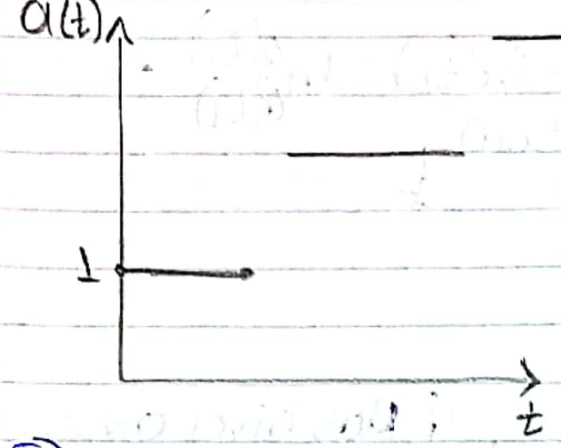
Το κεφάλαιο αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο (συνάρτηση του χρόνου t)

2) Σύνθετος Τόκος:

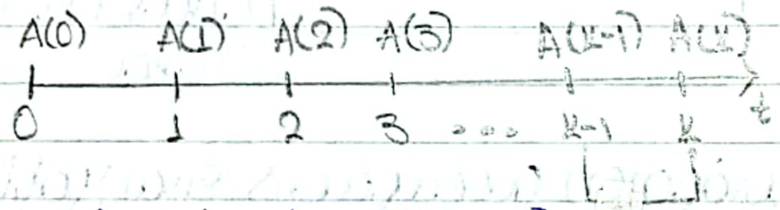


Έχουμε ανατοκισμό του κεφαλαίου

3) Πληρωμές Ανά Τακτά Χρονικά Διαστήματα:



δ) Επιτόκιο: Είναι το πηλίκο του τόκου που κερδίζουμε σε μια χρονική περίοδο t προς το αρχικό κεφάλαιο.



Στο χρονικό διάστημα (k-1, k) το επιτόκιο $\boxed{i_k = \frac{A(k)-A(k-1)}{A(k-1)}}$

• Προεξοφλητικό Επιτόκιο:

$$d_k = \frac{A(k)-A(k-1)}{A(k)}$$

Είναι το πηλίκο του τόκου προς το συσσωρευμένο κεφάλαιο.

ε) Ισχύς Του Τόκου: Είναι η σχετική μεταβολή της συνάρτησης συσσώρευσης. Συμβολίζεται με $\delta(t)$ ή δ_t και ο τύπος είναι:

$$\delta_t = \delta(t) = \frac{a'(t)}{a(t)} \qquad (\ln a(t))'$$

Είναι ένας δείκτης της μεταβολής του τόκου.

Scanned with CamScanner

Εάν $t \in (t_1, t_2)$

Τότε $\int_{t_1}^{t_2} \delta(u)\,du = \ln a(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \ln a(t_2) - \ln a(t_1) = \ln \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(u)\,du} = e^{\ln \frac{a(t_2)}{a(t_1)}} \Rightarrow \frac{a(t_2)}{a(t_1)} = e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(u)\,du} \Rightarrow$

$a(t_2) = a(t_1)\, e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(u)\,du}$

Για $t_1 = 0$ και $t_2 = t$

$a(t) = a(0)\, e^{\int_0^t \delta(u)\,du} \Rightarrow \boxed{a(t) = e^{\int_0^t \delta(u)\,du}}$ Μας δίνει την συνάρτηση συσσώρευσης όταν μας δίνουν την ισχύ του τόκου

Απλός Τόκος:

Στην περίπτωση που η συνάρτηση συσσώρευσης είναι γραμμική σε σχέση με τον χρόνο.

$A(t) = A(0) + i A(0) t \Rightarrow$

$\frac{A(t)}{A(0)} = \frac{A(0)}{A(0)} + \frac{i A(0) t}{A(0)} \Rightarrow$

$\boxed{a(t) = 1 + \underbrace{i \cdot t}_{\text{Τόκος}}}$ όπου i είναι το επιτόκιο

Το χρησιμοποιούμε τον απλό τόκο σε περίπτωση που θέλαμε να επενδύσουμε για μικρά χρονικά διαστήματα.

Παράδειγμα:

Έστω $i = 2\%$ το επιτόκιο για το εξάμηνο. Εάν το αρχικό κεφάλαιο είναι $A(0) = 100$ (μονάδες) να βρεθεί το συσσωρευμένο κεφάλαιο μετά από δύο έτη.

Λύση:

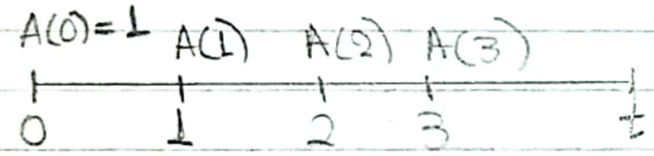
$t =$ 4 εξάμηνα

$A(t) = A(0) + A(0)it \Rightarrow$

$A(4) = 100(1 + 0{,}02 \cdot 4) \Rightarrow$

$A(4) = 108$ (μονάδες)

Σύνθετος Τόκος:



Έστω ότι το αρχικό κεφάλαιο $A(0) = 1$ μονάδα και το επιτόκιο είναι i σε μια χρονική μονάδα.

$A(0)$

$A(1) = A(0) + A(0) \cdot i = 1 + i$

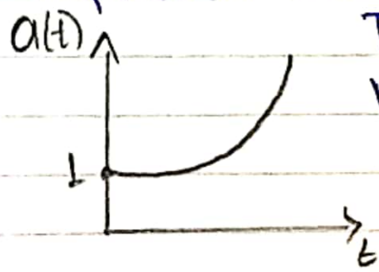
$A(2) = A(1) + A(1) \cdot i = A(1)(1+i) = (1+i)^2$

$A(3) = A(2) + A(2) \cdot i = A(2)(1+i) = (1+i)^3$

$\vdots$

$$\boxed{A(t) = (1+i)^t}$$

Στην περίπτωση του ανατοκισμού



Τον χρησιμοποιούμε για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

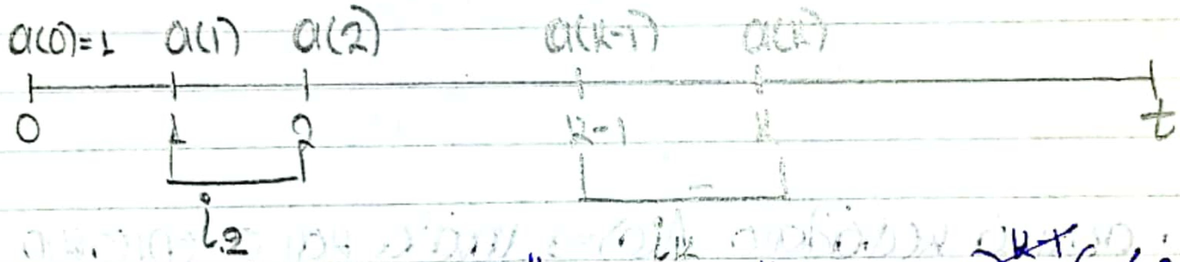
Παράδειγμα 2:

Έστω $i = 2\%$ το εξάμηνο (με ανατοκισμό). Έστω $A(0) = 100$ μονάδες. Να βρεθεί το συσσωρευμένο κεφάλαιο μετά από 2 έτη.

Λύση:

$$A(4) = 100\,(1+0{,}02)^4 \Rightarrow$$
$$A(4) = 100\,(1{,}02)^4 \Rightarrow$$
$$A(4) = 108{,}24 \text{ μονάδες}$$

Παρατήρηση:

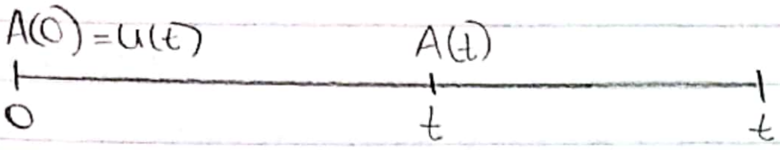


$$i_k = \frac{a(k) - a(k-1)}{a(k-1)} = \frac{(1+i)^k - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^{k-1}} = \frac{\cancel{(1+i)^{k-1}}\,(\cancel{1}+i-\cancel{1})}{\cancel{(1+i)^{k-1}}} = i$$

Στον ανατοκισμό το επιτόκιο παραμένει το ίδιο σε οποιαδήποτε χρονική περίοδο.

Τετάρτη 27 Οκτωβρίου 2021

5) Παρούσα Αξία:



Έστω ότι το συσσωρευμένο κεφάλαιο $A(t)=K$.
Το αρχικό κεφάλαιο $A(0)=u(t)$ και λέγεται παρούσα αξία του κεφαλαίου K.

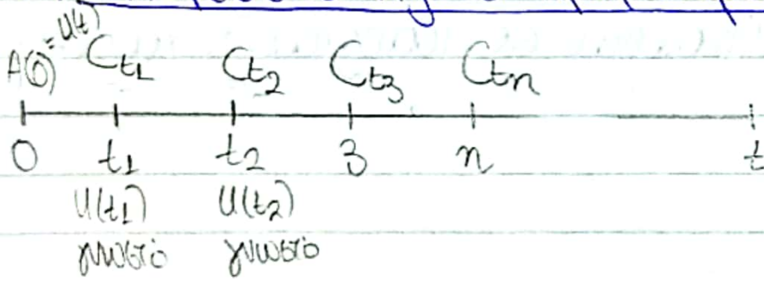
Για $K=1$ τότε $A(t)=K=1 \Rightarrow \frac{A(t)}{A(0)} = \frac{1}{A(0)} \Rightarrow a(t)=\frac{1}{u(t)} \Rightarrow$

$\boxed{u(t)=a^{-1}(t)}$ (2) $\qquad a(t)=\frac{A(t)}{A(0)}$ (1)

και άρα $u(t)=a^{-1}(t)=\frac{A(0)}{A(t)} \Rightarrow$

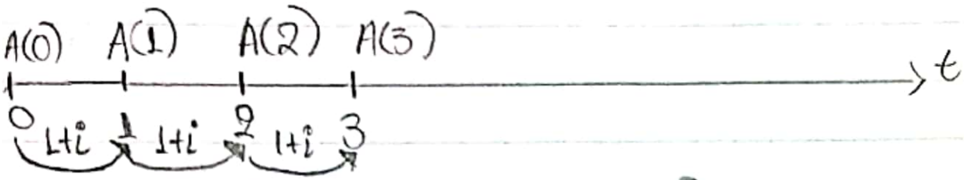
$$\boxed{A(0)=u(t)\cdot A(t)}$$

α) Παρούσες Αξίες Χρηματοροών:



Συνολική παρούσα αξία: $u(t)=A(0)=u(t_1)\cdot C_{t_1}+u(t_2)\cdot C_{t_2}+\dots+C_{t_n}\cdot u(t_n)$.

Παρατήρηση στον Σύνθετο Τόκο:



$a(1) = (1+i)$ $\quad a(2) = (1+i)^2$

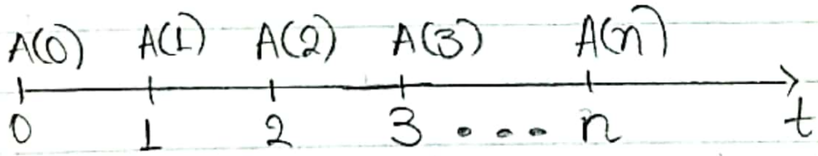
$A(1) = A(0)(1+i)$ $\quad A(2) = A(0)(1+i)^2$

- Το $1+i$ ονομάζεται <u>συντελεστής συσσώρευσης</u>
- Το $u = \frac{1}{1+i}$ ονομάζεται <u>συντελεστής προεξόφλησης</u>
- Τότε στον σύνθετο τόκο η παρούσα αξία

$u(t) = (1+i)^{-t}$ $\quad \left(a(t) = (1+i)^t \right)$

Ράντες:

- <u>Ορισμός</u>: Ράντα είναι μια σειρά πληρωμών σε ισαπέχουσες χρονικές στιγμές.



- Η χρονική απόσταση μεταξύ δύο πληρωμών λέγεται <u>Περίοδος</u>.
- Αν το πλήθος των πληρωμών είναι πεπερασμένο το πλήθος λέγεται <u>Διάρκεια της Ράντας</u>.
- Αν έχει άπειρους όρους λέγεται <u>Διηνεκής</u>.

• Αν τα ποσά που δίνονται είναι ίσα η ράντα λέγεται ομοιόμορφη. Διαφορετικά λέγεται μη ομοιόμορφη.

• Αν οι πληρωμές γίνονται στην αρχή της χρονικής περιόδου τότε η ράντα λέγεται προκαταβλητέα.

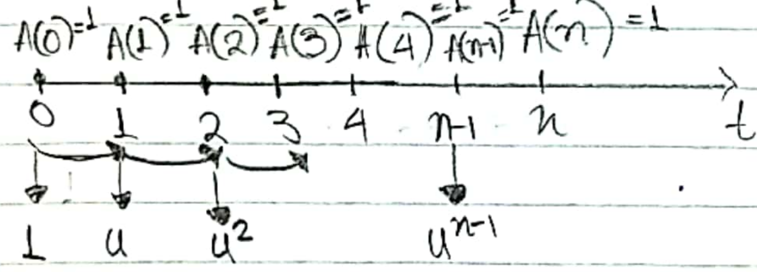
• Αν οι πληρωμές γίνονται στο τέλος της χρονικής περιόδου τότε η ράντα λέγεται ληξιπρόθεσμη.

• Θα μελετήσουμε τα οικονομικά μεγέθη μιας ράντας όπου:
(α) Όταν μελετώ το κεφάλαιο στην αρχή της ράντας το ονομάζω παρούσα αξία.

(β) Όταν μελετώ το κεφάλαιο στο τέλος της ράντας το ονομάζω συσσωρευμένη αξία.

• Οι ράντες που θα μελετήσουμε είναι όλες ομοιόμορφες και το επιτόκιο θα είναι i.

1) Η Παρούσα Αξία Προκαταβλητέας Ράντας.



$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + u + u^2 + \dots + u^{n-1}$ όπου $u = \dfrac{1}{1+i}$

όροι γεωμετρικής προόδου
$a_1 = 1$ και $\lambda = u$

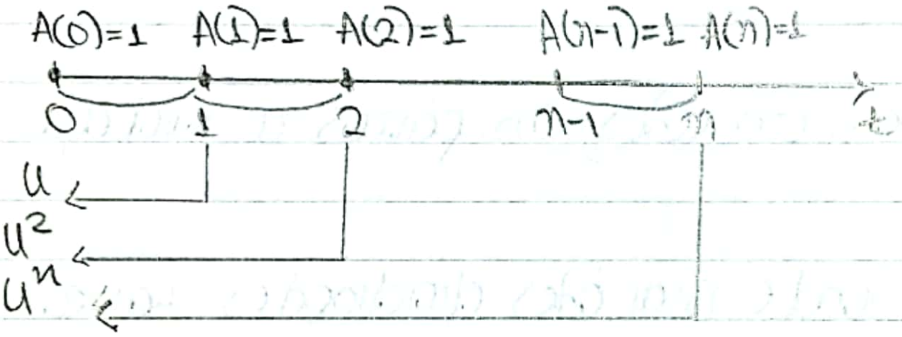
① Άθροισμα n-όρων γεωμετρικής προόδου:

$$S_n = a_1 \frac{1-\lambda^{\nu}}{1-\lambda} \Rightarrow$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 \frac{1-u^n}{1-u} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-u^n}{1-u}}$$

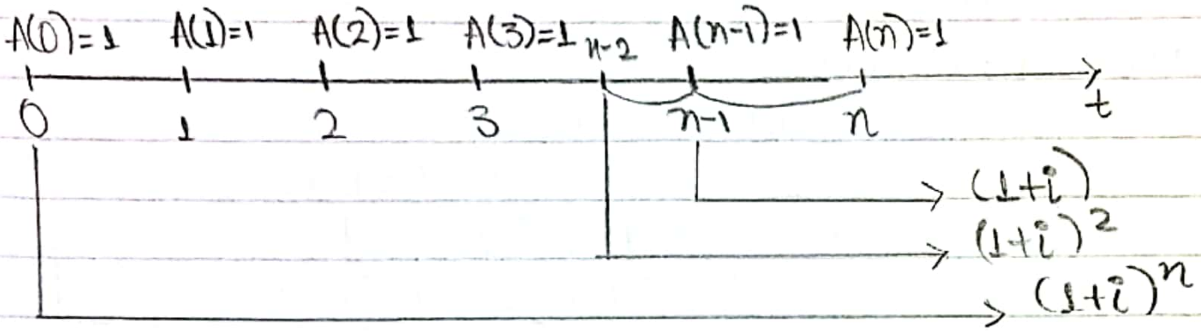
2) Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας



$$a_{\overline{n}|} = u + u^2 + \dots + u^n = u \frac{1-u^n}{1-u} \Rightarrow \boxed{a_{\overline{n}|} = u \frac{1-u^n}{1-u}}$$

Άρα, $\boxed{a_{\overline{n}|} = u\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}$

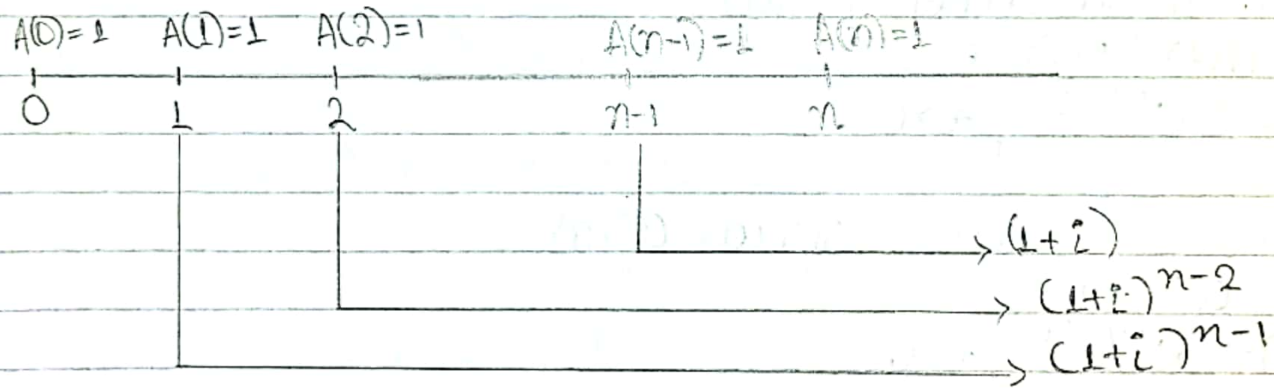
3) Η Συσσωρευμένη Αξία Προκαταβλητέας Ράντας.



$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)+(1+i)^2+\dots+(1+i)^n \Rightarrow \ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)\,\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} \Rightarrow$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)\,\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

4) Η Συσσωρευμένη Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας



$$S_{\overline{n}|} = 1+(1+i)+\dots+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1} \Rightarrow S_{\overline{n}|} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} \Rightarrow$$

$$S_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Δευτέρα 1 Νοεμβρίου 2021

$(1+i)$: συντελεστής συσσώρευσης

$\frac{1}{1+i} = v$: συντελεστής προεξόφλησης

$v(t) = v^t$

Άσκηση:

Δίνεται στο η ισχύς του τόκου $\delta(t) = t^2+t$, $t>0$. Να βρείτε

α) Την συνάρτηση συσσώρευσης:

$$a(t) = e^{\int_0^t \delta(u)du} = e^{\int_0^t (u^2+1)} = e^{\left[\frac{u^3}{3}+u\right]_0^t} = e^{\frac{t^3}{3}+t}, \quad t>0$$

β) Εαν $A(0)=4$ να βρεθεί η $A(t)$

$A(t) = A(0)\, a(t) \iff$

$A(t) = 4\, e^{t^3/3+t}$, $t>0$

γ) Να βρεθεί η συνάρτηση παρούσας αξίας

$v(t) = a^{-1}(t) \Rightarrow$

$v(t) = e^{t^3/3+t}$, $t>0$

δ) Να βρεθεί ο συντελεστής προεξόφλησης

$v(t) = v^t \Rightarrow$

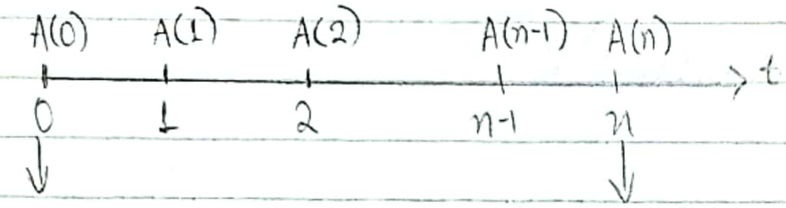
$v = v(t)^{1/t} \Rightarrow e^{(t^3/3+t)\,1/t}$

ε) Να βρεθεί το επιτόκιο i

$\frac{1}{1+i} = e^{-(t^3/3+t)^{1/t}}$, $t>0$

Για $t=1$ $\quad \frac{1}{1+i} = e^{-4/3} \Rightarrow 1+i = e^{4/3} \Rightarrow i = e^{4/3} - 1$

- **Ράντες:** Σειρές πληρωμών σε ίσα χρονικά διαστήματα
- **Ομοιόμορφη Ράντα:** Ισόποσες πληρωμές
- **Διάρκεια της Ράντας:** Πεπερασμένος αριθμός πληρωμών
- **Προκαταβλητέα Ράντα:** Οι πληρωμές στην αρχή
- **Ληξιπρόθεσμη Ράντα:** Οι πληρωμές στο τέλος



- **Παρούσα Αξία** $a_{\overline{n}|}$
- **Συσσωρευμένη Αξία** $s_{\overline{n}|}$

- **Παρούσα Αξία Προκαταβλητέας Ράντας:** $\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{1-v}$ $\qquad v = \frac{1}{1+i}$
- **Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας:** $a_{\overline{n}|} = v\,\frac{1-v^n}{1-v}$

- **Κεφάλαιο 2:**
- **Συναρτήσεις και Πίνακες Θνησιμότητας:**

Έστω

x: Η ηλικία του ατόμου (μεταβλητή)
ω: Η μέγιστη ηλικία του ατόμου $\omega \simeq 100$
T: Η διάρκεια ζωής (τυχαία μεταβλητή)
T_x: Η απομένουσα διάρκεια ζωής (τυχαία μεταβλητή)
K_x: $K_x = [T_x]$ (ακέραιο μέρος)

Συναρτήσεις Επιβίωσης – Διάρκεια Ζωής:

1) Συνάρτηση Επιβίωσης:

$$S_T(x) = P(T > x)$$

Ποια η πιθανότητα ένα νεογέννητο να ζήσει πάνω από x χρόνια, $0 \leq x \leq \omega$.

$S_T(x) \downarrow$, $S_T(0) = 1$, $S_T(\omega) = 0$

2) Συνάρτηση Κατανομής (Αποβίωσης):

$$F_T(x) = P(T \leq x)$$

Ποια η πιθανότητα ένα νεογέννητο να αποβιώσει μέχρι τα x χρόνια

$F_T(x) \uparrow$, $F_T(0) = 0$, $F_T(\omega) = 1$

Ισχύει

$$\boxed{S_T(x) + F_T(x) = 1}$$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας:

$$\boxed{f_T(x) = F_T'(x)}$$

$$\boxed{f_T(x) = F_T'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}}$$

$$\boxed{f_T(x) = (1 - S_T(x))' = S_T(x)}$$

Παρατηρήσεις:

α) Η πιθανότητα ένα νεογέννητο να αποβιώσει μεταξύ των ηλικιών x_1 και x_2 $(x_1 < x_2)$.

$$P(x_1 < T \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_T(x)\,dt = F_T(x_2) - F_T(x_1)$$
$$= S_T(x_1) - S_T(x_2)$$

β) Η δεσμευμένη πιθανότητα ένα νεογέννητο να αποβιώσει στο διάστημα (x_1, x_2) δεδομένου ότι έχει ζήσει x_1 χρόνια.

$$P(x_1 < T \leq x_2 | T > x_1) = \frac{P(x_1 < T \leq x_2, T > x_1)}{P(T > x_1)} = \frac{P(x_1 < T \leq x_2)}{P(T > x_1)}$$
$$= \frac{F_T(x_2) - F_T(x_1)}{1 - F_T(x_1)}$$

Συνάρτηση Κινδύνου:

Η πιθανότητα ένα άτομο να αποβιώσει στο χρονικό διάστημα $(x, x+dx)$ δεδομένου ότι έχει ζήσει x χρόνια.

$$P(x < T \leq x+dx | T > x) = \frac{F_T(x+dx) - F_T(x)}{1 - F_T(x)} \quad \text{(από παρατήρηση β)}$$

$$\lim_{dx \to 0} \frac{P(x < T \leq x+dx | T > x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{F_T(x+dx) - F_T(x)}{dx} \cdot \frac{1}{1 - F_T(x)}$$

$$= \frac{F'(x)}{1 - F(x)}$$

Η $\mu_T(x) = \lim_{dx \to 0} P(x < T < x+dx | T > x) = \dfrac{F_T'(x)}{1 - F_T(x)}$ ονομάζεται συνάρτηση κινδύνου και μας δείχνει την πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να αποβιώσει στο επόμενο μικρό χρονικό διάστημα dx.

Άρα $\mu_T(x) = \frac{f_T'(x)}{S_T(x)} = \frac{(1-S_T(x))'}{S_T(x)} = -\frac{S_T'(x)}{S_T(x)} = -(\ln S_T(x))'$

$-\mu_T(x) = (\ln S_T(x))' \Rightarrow -\int_0^x \mu_T(u)du = \ln S_T(x) \Rightarrow$

$S_T(x) = e^{-\int_0^x \mu_T(u)du}$

Πέμπτη 4 Νοεμβρίου 2021

Δεύτερος τρόπος ορισμού της συνάρτησης κινδύνου:

· Έστω l_0: Ο αριθμός των νεογέννητων
· Έστω $1 \leq J \leq l_0$ και ορίζω $P(T^j > x) = P(T > x)$
Ορίζω ως $S(x)$: Το πλήθος των επιζώντων από τα l_0 στην ηλικία x.
· Έχω την δείκτρια τυχαία μεταβλητή

$$I_j = \begin{cases} 1, & T > x \\ 0, & T \leq x \end{cases}$$ (Διακριτή τυχαία μεταβλητή)

Τότε $S(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$ τότε,

$E(I_j) = 1 \cdot P(T > x) + \cancel{0 \cdot P(T \leq x)}^{\to 0} = P(T > x) = S_T(x)$

$E(S(x)) = E\left(\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right) = E(I_1 + I_2 + \dots + I_j) = E(I_1) + E(I_2) + \dots + E(I_{l_0})$

$= \underbrace{S_T(x) + S_T(x) + \dots + S_T(x)}_{l_0}$

Άρα $\boxed{E(S(x)) = l_0 S_T(x)}$

Ονομάζω $\boxed{l_x = E(S(x)) = l_0 S_T(x)}$

l_x: είναι η μέση τιμή του πλήθους που επιβιώνου μέχρι την ηλικία x.

Παρατήρηση:

Η I_j $1 \le j \le l_0$ παίρνει τις τιμές 1,0 είναι δοκιμές Bernoulli

$S(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$ (άθροισμα δοκιμών Bernoulli) ώστε ακολουθεί την Διωνυμική.

Η τ.μ. $\boxed{S(x) = Bin(l_0, S_T(x))}$

Συνάρτηση του κινδύνου:

$$l_x = l_0 \cdot S_T(x) \Rightarrow l_x' = l_0 S_T'(x) \Rightarrow \frac{l'_x}{l_x} = -\frac{l_0}{l_x} f_T(x) \Rightarrow$$

$$\frac{l'_x}{l_x} = -\frac{l_0}{l_0}\frac{f_T(x)}{S_T(x)} \Rightarrow -\frac{l'_x}{l_x} = \frac{f_T(x)}{S_T(x)} \Rightarrow \boxed{\mu_T(x) = -\frac{l'_x}{l_x}} \quad \text{ή}$$

Συνάρτηση κινδύνου μας δείχνει τον σχετικό ρυθμό μείωσης του πληθυσμού.

$$\boxed{\mu_T(x) = -(\ln l_x)'}$$

Παρατήρηση:

Απο την σχέση $\mu_T(x) = -\frac{l'_x}{l_x}$ είναι ένας ρυθμός μεταβολής και όχι πιθανότητα.

Ανάλογα: Ορίζω $_n\Delta_x$: Είναι ο αριθμός των θανάτων μεταξύ των ηλικιών x, $x+n$.
και $_nd_x = E(_n\Delta_x)$ το μέσο πλήθος των θανάτων μεταξύ x, $x+n$.
Ορίζω την δείκτρια συνάρτηση:

$$C_j = \begin{cases} 1, & x < T \leq x+n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα $_n\Delta_x = \sum_{j=1}^{l_0} C_j \Rightarrow E[_n\Delta_x] = E[\sum_{j=1}^{l_0} C_j]$

$$E[C_j] = 1 \cdot P(x < T \leq x+n) + \underbrace{0 \cdot \cancel{P(T\ \text{αλλού})}}_{\to 0} \Rightarrow E[C_j] = P(x < T \leq x+n)$$

$= F_T(x+n) - F(x) = S_T(x) - S_T(x+n)$.

Άρα, $\boxed{E[C_j] = S_T(x) - S_T(x+n)}$

Άρα,

$$_nd_x = E[_n\Delta_x] = E[\sum_{j=1}^{l_0} C_j] = \sum_{j=1}^{l_0} E(C_j) \Rightarrow$$

$$_nd_x = l_0[S_T(x) - S_T(x+n)] \Rightarrow$$

$$ {}_n d_x = l_0 S_T(x) - l_0 \cdot S_T(x+n) \Rightarrow $$

$$ \boxed{{}_n d_x = l_x - l_{x+n}} $$

11 Άσκηση:

Δίνεται η συνάρτηση του κινδύνου $\mu_T(x) = \dfrac{5t-3}{t^2-2t-3} > 0.$

α) Να βρεθεί η συνάρτηση επιβίωσης Α.2 (διάρκεια ζωής): $S_T(x)$

Λύση:

$$ S_T(x) = e^{-\int_0^x \mu_T(t)\,dt} \quad (1) $$

$$ \int_0^x \mu_T(t)\,dt = \int_0^x \frac{5t-3}{t^2-2t-3}\,dt \quad (2) $$

$$ \frac{5t-3}{t^2-2t-3} = \frac{5t-3}{(t-3)(t+1)} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow $$

$$ 5t-3 = A(t+1) + B(t-3) \Rightarrow $$
$$ 5t-3 = (A+B)t + (A-3B) $$

$$ \begin{cases} A+B=5 \\ A-3B=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases} $$

$$ (2) \Rightarrow \int_0^x \frac{3}{t-3}\,dt + \int_0^x \frac{2}{t+1}\,dt = 3\int_0^x \frac{1}{t-3}\,dt + 2\int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt $$

$$ = [3\ln|t-3|]_0^x + [2\ln|t+1|]_0^x $$

$= 3[\ln|x-3| - \ln 3] + 2[\ln|x+1| - \cancel{\ln 1}^{\to 0}]$

$= 3\ln|x-3| - 3\ln 3 + 2\ln|x+1|$
$= \ln|x-3|^3 - \ln 3^3 + \ln|x+1|^2$
$= \ln \dfrac{|x-3|^3\,|x+1|^2}{3^3}$

$$(1) \Rightarrow S_T(x) = e^{-\ln\frac{|x-3|^3|x+1|^2}{3^3}} = \cancel{e}^{\cancel{\ln}\frac{3^3}{|x-3|^3|x+1|^2}} \Rightarrow$$

$$S_T(x) = \frac{27}{|x-3|^3(x+1)^2}$$

β) Αν $l_0 = 10^2$. Να βρεθεί η $l_x = E[S(x)]$

Λύση:

$$L_x = l_0 \cdot S_T(x) = 10^3 \frac{27}{|x-3|^3(x+1)^2} = \frac{30^3}{|x-3|^3(x+1)^2}$$

γ) Να βρεθεί το ${}_{10}d_{30}$ (n, x)

Λύση:

$${}_{10}d_{30} = l_{30} - l_{30+10} = l_{30} - l_{40} = \frac{30^3}{27^3 \cdot 31^2} - \frac{30^3}{37^3 \cdot 41^2} = \ldots\ldots$$

δ) Να βρεθεί η σ.π.π $f_T(x)$

<u>Λύση:</u>

α) $f_T(x) = -S'_T(x) = -\left(\frac{27}{(x-3)^3(x+2)^2}\right)' = \dots$

β) $\mu_T(x) = \frac{f_T(x)}{S_T(x)} \Rightarrow f_T(x) = \mu_T(x)\cdot S_T(x) = \frac{5x-3}{\underbrace{x^2-2x-3}_{(x-3)(x+1)}} \cdot \frac{27}{(x-3)^3(x+1)^2}$

$= \frac{27(5x-3)}{(x-3)^4(x+1)^3}$

Δευτέρα 8 Νοεμβρίου 2021

<u>• Νέοι όροι πληθυσμών:</u>

l_0: Είναι ο αρχικός πληθυσμός

$S(x)$: Είναι ο πληθυσμός που φτάνει στην ηλικία x.

$l_x = E[S(x)] = l_0 S_T(x)$

$\mu_T(x) = (\ln l_x)'$

<u>• Δεσμευμένες Συναρτήσεις Ζωής:</u>

1) Δεσμευμένη Συνάρτηση Επιβίωσης $S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = {}_tP_x$

$T_x = T - x \mid T > x$ και $t + x \le \omega \Rightarrow \boxed{t \le \omega - x}$

Scanned with CamScanner

Άρα, $S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = P(T - x > t \mid T > x) =$
$= P(T > x+t \mid T > x) \Rightarrow$

$$ {}_tP_x = S_{T_x}(t) = \frac{P(T > x+t, T > x)}{P(T > x)} = \frac{P(T > x+t)}{P(T > x)} $$

Άρα, $\boxed{{}_tP_x = S_{T_x}(t) = \frac{S_T(x+t)}{S_T(x)}}$ (1)

Επίσης γνωρίζω

$$ S_T(x) = \frac{l_x}{l_0}. \text{ Άρα,} $$

$$ {}_tP_x = S_T(x) = \frac{\frac{l_{x+t}}{\cancel{l_0}}}{\frac{l_x}{\cancel{l_0}}} \Rightarrow \boxed{{}_tP_x = S_{T_x}(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x}} $$

2) Η Δεσμευμένη Διάρκεια Ζωής Συναρτήσει των Κινδύνων:

$$ S_T(x) = e^{-\int_0^x \mu_T(t)dt} $$

Τότε από την σχέση (1)

$$ S_{T_x}(t) = \frac{S_T(x+t)}{S_T(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+t} \mu_T(u)du}}{e^{-\int_0^x \mu_T(u)du}} $$

Άρα,

$$ {}_tP_x = S_{T_x}(t) = e^{-\left(\int_0^{x+t} - \int_0^x\right)\mu_T(u)du} $$

$$ = e^{-\int_x^{x+t} \mu_T(u)du} $$

$$\boxed{{}_tp_x = S_{T_x}(t) = e^{-\int_x^{x+t} \mu_T(u)\,du}}$$

3) <u>Δεσμευμένη Συνάρτηση Αποβίωσης (Κατανομής):</u>

$$F_{T_x}(t) = P(T_x \le t) = {}_tq_x$$

$$F_{T_x}(t) = P(T_x \le t) = P(T - x \le t \mid T > x) = \frac{P(x < T \le x+t)}{P(T > x)}$$

$$= \frac{F_T(x+t) - F_T(x)}{S_T(x)} = \frac{S_T(x) - S_T(x+t)}{S_T(x)}$$

Άρα,

$$\boxed{F_{T_x}(t) = \frac{S_T(x) - S_T(x+t)}{S_T(x)}}$$

<u>Όμοια</u>

$$ {}_tq_x = F_{T_x}(t) = \frac{\frac{l_x}{\cancel{l_0}} - \frac{l_{x+t}}{\cancel{l_0}}}{\frac{l_x}{\cancel{l_0}}} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \Rightarrow$$

$$\boxed{{}_tq_x = \frac{{}_td_x}{l_x}}$$

Προφανώς Ισχύουν:

1) $_tP_x + {}_tQ_x = 1$

$S_{T_x}(t) + F_{T_x}(t) = 1$

2) $Q_x = {}_1Q_x$ Δεσμευμένη συνάρτηση αποβίωσης στον επόμενο χρόνο.

Ισχύει $Q_x = \dfrac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$

Μια άλλη δεσμευμένη συνάρτηση αποβίωσης

$_{m|n}Q_x$: Πιθανότητα άτομο ηλικίας x να ζήσει άλλα m έτη και να αποβιώσει μέχρι τα m+n

Παράδειγμα:

$_{20|10}Q_{30}$: Άτομο ηλικίας 30 ετών να ζήσει μέχρι τα 50 και να πεθάνει μέχρι τα 60.

Ισχύει $_{m|n}Q = P(m < T_x \le m+n) = F_{T_x}(m+n) - F_{T_x}(m)$

$= {}_{m+n}Q_x - {}_mQ_x$

Άρα,

$$\boxed{_{m|n}Q_x = {}_{m+n}Q_x - {}_mQ_x}$$

Ισοδύναμα

$$_{m|n}Q_x = F_{T_x}(m+n) - F_{T_x}(m) = S_{T_x}(m) - S_{T_x}(m+n)$$

$$= \frac{_m d_x}{l_x} - \frac{_{m+n} d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+m}}{l_x} - \frac{l_x - l_{x+n+m}}{l_x}$$

Άρα, $\boxed{_{m|n}Q_x = \frac{l_{x+m+n} - l_{x+m}}{l_x}}$

Άσκηση:

Να αποδείξετε ότι:

$$_{m|n}Q_x = {}_mP_x \cdot {}_nQ_{x+m}$$

Λύση:

Θα λυθεί με τους μέσους πληθυσμούς

$$_{m|n}Q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} \quad (1)$$

$$_mP_x \; {}_nQ_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{_n d_{x+m}}{l_{x+m}} =$$

$$= \frac{\cancel{l_{x+m}}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{\cancel{l_{x+m}}} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $_{m|n}Q_x = {}_mP_x \cdot {}_nQ_{x+m}$

Τετάρτη 10 Νοεμβρίου 2021

Δεσμευμένες Πιθανότητες Διάρκειας Ζωής:

Οι πιθανότητες αυτές αναφέρονται για το T_x όπου

$$\boxed{T_x = T - x \mid T > x}$$

1) Δεσμευμένη Συνάρτηση Επιβίωσης:

$$\boxed{{}_tP_x = S_{T_x}(x) = P(T_x > t) = \frac{S_T(x+t)}{S_T(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}}$$

2) Δεσμευμένη Συνάρτηση Αποβίωσης (κατανομή):

$$\boxed{\begin{aligned} {}_tq_x &= F_{T_x}(x) = P(T_x \leq t) = \frac{S_T(x) - S_T(x+t)}{S_T(x)} \\ &= \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{{}_td_x}{l_x} \end{aligned}}$$

3) Μια άλλη δεσμευμένη συνάρτηση αποβίωσης:

$$\boxed{{}_{m|n}q_x = P(m < T_x \leq m+n) = {}_{m+n}q_x - {}_mq_x = {}_mP_x \cdot {}_nq_{x+m}}$$

4) Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της T_x:

$$f_{T_x}(t) = F'_{T_x}(t) = \left(\frac{S_T(x) - S_T(x+t)}{S_T(x)}\right)'_t = \frac{-S'_T(x+t)}{S_T(x)} = -\frac{(1-F_T(x+t))'}{S_T(x)}$$

$$= \frac{f_T(x+t)}{S_T(x)}$$ Άρα, $$f_{T_x}(x) = \frac{f_T(x+t)}{S_T(x)} \quad (1)$$

Επίσης γνωρίζω $S_{T_x}(t) = \frac{S_T(x+t)}{S_T(x)} \Rightarrow S_T(x) = \frac{S_T(x+t)}{S_{T_x}(t)}$

Άρα από (1) $\Rightarrow f_{T_x}(t) = \frac{f_T(x+t)}{S_T(x+t)} \cdot S_{T_x}(t) \Rightarrow$

Θυμίζω ότι $\mu_T(x) = \frac{f_T(x)}{S_T(x)}$

$$f_{T_x}(t) = \mu_T(x+t) \cdot {}_tP_x \quad 0 \leq t \leq \omega - x \quad (2)$$

5) <u>Δεσμευμένη Συνάρτηση του Κινδύνου:</u>

$$\mu_{T_x}(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{P(t < T_x \leq t+dt \mid T_x > x)}{dt}$$

Όμοια αποδεικνύεται όπως στην συνάρτηση κινδύνου $\mu_T(x) = \frac{f_T(x)}{S_T(x)}$

Άρα από (2) $\Rightarrow \mu_{T(x)} = \frac{\mu_T(x+t) \cdot \cancel{{}_tP_x}}{\cancel{{}_tP_x}} \Rightarrow \mu_{T_x}(t) = \mu_T(x+t)$

<u>Συμπέρασμα</u>: Η συνάρτηση κινδύνου $\mu_{T_x}(t)$ της T_x είναι ίση με την $\mu_T(x+t)$ της T στο σημείο $x+t$.

Ασκήσεις:

1) α) Να αποδείξετε $_{t+n}P_x = {}_tP_{x+n} \cdot {}_nP_x$ (Α)

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους με τους μέσους πληθυσμούς l_x

$$\left.\begin{aligned} {}_{t+n}P_x &= \frac{l_{x+t+n}}{l_x} \\ {}_tP_{x+n} \cdot {}_nP_x &= \frac{l_{x+n+t}}{\cancel{l_{x+n}}} \cdot \frac{\cancel{l_{x+n}}}{l_x} = \frac{l_{x+n+t}}{l_x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$_{t+n}P_x = {}_tP_{x+n} \cdot {}_nP_x$$

β) Να δειχθεί $f_{T_x}(t+n) = {}_nP_x \cdot f_{T_{x+n}}(t)$

Λύση:

Από την $f_{T_x}(t) = {}_tP_x \cdot \mu_T(x+t+n)$ έχω

$$f_{T_x}(t+n) = {}_{t+n}P_x \cdot \mu_T(x+t+n) \overset{(A)}{=} {}_tP_{x+n} \cdot {}_tP_x \cdot \mu_T(x+t+n)$$

$$= {}_tP_{x+n} \cdot {}_tP_x \, \mu_{T_{x+n}}(t) \Rightarrow$$

$$f_{T_x}(t+n) = {}_tP_{x+n} \cdot {}_tP_x \frac{f_{T_{x+n}}(t)}{S_{T_{x+n}}(t)} = \cancel{{}_tP_{x+n}} \cdot {}_tP_x \frac{f_{T_{x+n}}(t)}{\cancel{{}_tP_{x+n}}}$$

$$= {}_tP_x \cdot f_{T_{x+n}}(t)$$

2) Να αποδείξετε : $q_x = \int_0^1 {}_tp_x \cdot \mu_T(x+t)\,dt$

Λύση :

$q_x = {}_1q_x$ (Το άτομο να αποβιώσει στο διάστημα $(x, x+1)$)
Θα χρησιμοποιήσουμε τους μέσους πληθυσμούς.
Απο θεωρία έχουμε δείξει $\mu_T(x) = -(\ln l_x)'$ τότε

$$\mu_T(x+t) = -(\ln(l_{x+t}))'_t = -\frac{(l_{x+t})'}{l_{x+t}} \Rightarrow$$

$$-(l_{x+t})' = \mu_T(x+t)\, l_{x+t} \Rightarrow -\int_0^1 (l_{x+t})'\,dt = \int_0^1 l_{x+t}\, \mu_T(x+t)\,dt$$

$$-(l_{x+1} - l_x) = \int_0^1 l_{x+t}\, \mu_T(x+t)\,dt \Rightarrow l_x - l_{x+1} = \int_0^1 l_{x+t}\, \mu_T(x+t)\,dt$$

$$d_x = \int_0^1 l_{x+t}\, \mu_T(x+t)\,dt \Rightarrow q_x = \frac{d_x}{l_x} \int_0^1 \frac{l_{x+t}}{l_x}\, \mu_T(x+t)\,dt \Rightarrow$$

$$q_x = \int_0^1 \frac{l_{x+t}}{l_x}\, \mu_T(x+t)\,dt$$

3) α) Να αποδείξετε ότι ${}_{m+n}P_x = {}_mP_x \cdot {}_nP_{x+m} = {}_nP_x \cdot {}_mP_{x+n}$

Λύση:

$${}_{m+n}P_x = \frac{l_{x+m+n}}{l_x}$$

$${}_mP_x \cdot {}_nP_{x+m} = \frac{\cancel{l_{x+m}}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+m+n}}{\cancel{l_{x+m}}} = \frac{l_{x+m+n}}{l_x}$$

$${}_nP_x \cdot {}_mP_{x+n} = \frac{\cancel{l_{x+n}}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+m+n}}{\cancel{l_{x+n}}} = \frac{l_{x+m+n}}{l_x}$$

Άρα ${}_{m+n}P_x = {}_mP_x \cdot {}_nP_{x+m} = {}_nP_x \cdot {}_mP_{x+m}$

β) Με τι ισούται τα σύμβολα q_x $0|q_x$

Λύση:

$q_x = {}_1q_x$ (Το άτομο ηλικίας x να πεθάνει στον επόμενο χρόνο)

$0|q_x = 0|{}_1q_x$ (Το άτομο ηλικίας x να πεθάνει στον επόμενο χρόνο)

$$\boxed{0|q_x = q_x}$$

4) Να δειχθεί $_tp_x = {}_{t|\omega-(t+x)}q_x$ να δοθεί η ερμηνεία

Λύση:

$$_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$_{t|\omega-(t+x)}q_x = \frac{l_{x+t} - l_{\cancel{x+t}+\omega-(\cancel{t+x})}}{l_x} = \frac{l_{x+t} - \cancel{l_\omega}^{\to 0}}{l_x}$$

$$= \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Άρα, $_tp_x = {}_{t|\omega-(t+x)}q_x$

Ερμηνεία: Άτομο ηλικίας x να επιβιώσει t χρόνια είναι ίση με την πιθανότητα άτομο ηλικίας x να αποβιώσει στο διάστημα $(x+t, \omega)$.

Δευτέρα 15 Νοεμβρίου 2021

Ασκήσεις:

1) Υποθέτουμε ότι η $F_T(x)$ συνδέεται με την $\mu_T(x)$. Υποθέτουμε ότι η $F'_T(x)$ συνδέεται με την $\mu'_T(x)$. Ισχύει η σχέση ότι, $\mu'_T(x) = 2\mu_T(x)$(1). Να βρείτε την σχέση που συνδέει $F'_T(x)$ με $F_T(x)$.

Λύση:

$$F_T(x) = 1 - S_T(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_T(u)du} = q(x)$$

$$F'_T(x) = 1 - S'_T(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu'_T(u)du} = q'(x)$$

Scanned with CamScanner

$$q'(x) = F'_T(x) - S'_T(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu'_T(u)du} \overset{(1)}{=} 1 - e^{-\int_0^x 2\mu_T(u)du}$$

$$= 1 - e^{-2\int_0^x \mu'_T(u)du} \qquad = 1 - \left(e^{-\int_0^x \mu_T(u)du}\right)^2 \qquad (2)$$

$$q(x) = F_T(x) - S_T(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu_T(u)du} \Rightarrow$$

$$e^{-\int_0^x \mu_T(u)du} = 1 - q(x) \qquad (3)$$

Απο (2), (3) έχουμε:

$$q'(x) = 1 - (1 - q_x)^2 \Rightarrow q'(x) = 1 - (1 - 2q_x + q_x^2) = 2q_x - q_x^2 \Rightarrow$$

$$q'(x) = q_x(2 - q_x)$$

2) Δίνεται $S_T(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$, $0 < t \leq \omega$. Να βρεθούν:

α) $F_T(t) = 1 - S_T(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{\omega}\right) = \frac{t}{\omega}$

β) $f_T(t) = \left(\frac{t}{\omega}\right)' = \frac{1}{\omega}$

γ) $\mu_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{\frac{1}{\omega}}{1 - \frac{t}{\omega}} = \frac{\frac{1}{\omega}}{\frac{\omega - t}{\omega}} = \frac{1}{\omega - t} \quad t \in (0, \omega)$

δ) $_tp_x = S_{T_x}(t) = \frac{S_T(x+t)}{S_T(x)} = \frac{1-\frac{x+t}{\omega}}{1-\frac{x}{\omega}} = \frac{\frac{\omega-(x+t)}{\omega}}{\frac{\omega-x}{\omega}} = \frac{\omega-(x+t)}{\omega-x}$

ε) $_tq_x = 1 - {}_tp_x = 1 - \frac{\omega-(x+t)}{\omega-x} = \frac{\cancel{\omega}-\cancel{x}-\cancel{\omega}+\cancel{x}+t}{\omega-x} = \frac{t}{\omega-x}$

ζ) $f_{T_x}(t) = F'_{T_x}(t) = ({}_tq_x)' = \left(\frac{t}{\omega-x}\right)' = \frac{1}{\omega-x}$

η) $\mu_{T_x}(t) = \mu_T(x+t) = \frac{1}{\omega-(x+t)}$

3) Δεδομένου ότι $l_x = \sqrt{121-x}$ $\quad 0<x\le 121$
Να υπολογίσετε την πιθανότητα άτομο ηλικίας 21 ετών να πεθάνει μετά την ηλικία των 40 ετών αλλά πριν την ηλικία των 57 ετών.

Λύση:

$x=21$
$m=19$
$n=17$

${}_{m|n}q_x = {}_{19|17}q_{21} = \frac{l_{21+19} - l_{21+19+17}}{l_{21}} = \frac{l_{40}-l_{57}}{l_{21}}$ (1)

$l_{57} = \sqrt{121-57} = \sqrt{64} = 8$

$l_{40} = \sqrt{121-40} = \sqrt{81} = 9$

$l_{21} = \sqrt{121-21} = \sqrt{100} = 10$

$(1) \Rightarrow \frac{l_{40}-l_{57}}{l_{21}} = \frac{9-8}{10} = \frac{1}{10} = 10\%$

4) Έχω $({}_tP_x)'_t$: Ρυθμός μεταβολής ως προς t
$({}_tP_x)'_x$: Ρυθμός μεταβολής ως προς την ηλικία x.

Να δειχθεί:

α) $({}_tP_x)'_t = -\,{}_tP_x \cdot \mu_T(x+t)$

β) $({}_tP_x)'_x = {}_tP_x \left(\mu_T(x) - \mu_T(x+t)\right)$

γ) $\dfrac{({}_tP_x)'_x - ({}_tP_x)'_t}{{}_tP_x} = \mu_T(x)$

Λύση:

α) ${}_tP_x = S_{T_x}(t) = 1 - F_{T_x}(t) \Rightarrow ({}_tP_x)'_t = (1 - F_{T_x}(t))'_t = -f_{T_x}(t) \Rightarrow$

$({}_tP_x)'_t = -\,{}_tP_x \cdot \mu_T(x+t)$

β) ${}_tP_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)du} \Rightarrow ({}_tP_x)'_x = \left(e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)du}\right)' =$

$= e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)du} \left(-\int_x^{x+t} \mu(u)du\right)'$

Άρα, $({}_tP_x)' = {}_tP_x \left(-\left[\int_0^{x+t} \mu(u)du\right]' + \left[\int_0^{x} \mu(u)du\right]'\right) \Rightarrow$

$({}_tP_x)' = {}_tP_x \left(-\mu_T(x+t) + \mu_T(x)\right) \Rightarrow$

$({}_tP_x)'_x = {}_tP_x \left(\mu_T(x) - \mu_T(x+t)\right)$

γ) $\dfrac{({}_tP_x)'_x - ({}_tP_x)'_t}{{}_tP_x} = \dfrac{{}_tP_x\,(\mu_T(x) - \mu_T(x+t)) + {}_tP_x\,\mu_T(x+t)}{{}_tP_x}$

$= {}_tP_x$

5) Δίνεται η ένταση θνησιμότητας $\mu_T(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ (συνάρτηση κινδύνου). Να βρεθεί η συνάρτηση επιβίωσης.

<u>Λύση:</u>

$$S_T(x) = e^{-\int_0^x \mu_T(t)dt} = e^{-\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}dt} \quad (1)$$

$$\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}dt = \int_0^x \frac{(1+t^2)'}{1+t^2}dt = \int_0^x (\ln(1+t^2))'dt = \ln(1+t^2)\Big|_0^x$$

$$= \ln(1+x^2) - \cancel{\ln 1} \xrightarrow{} 0 = \ln(1+x^2)$$

$$(1) \Rightarrow e^{-\ln(1+x^2)} = e^{\ln(1+x^2)^{-1}} = \frac{1}{1+x^2}$$

Πέμπτη 18 Νοεμβρίου 2021

Ασκήσεις:

1) Έστω $l_x = 10^3 \cdot \sqrt{100-x}$ $\quad 0<x\le 100$

Να βρείτε:

α) Την πιθανότητα το νεογέννητο να επιβιώσει μετά την ηλικία των 19 ετών.

$$P(T>19)=S_T(19)=\frac{l_{19}}{l_0}=\frac{\cancel{10^3}\sqrt{100-19}}{\cancel{10^3}\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}}=\frac{9}{10}=0,9$$

β) Την πιθανότητα άτομο ηλικίας 36 να αποβιώσει μετά την ηλικία των 51 ετών

$$P(T_{36}\le 15)=F_{T_{36}}(15)={}_{15}q_{36}=\frac{l_{36}-l_{15}}{l_{36}}=$$

$$=\frac{\cancel{10^3}\left[\sqrt{100-36}-\sqrt{100-51}\right]}{\cancel{10^3}\sqrt{100-36}}=\frac{\sqrt{64}-\sqrt{49}}{\sqrt{64}}=\frac{8-7}{8}=\frac{1}{8}=0,125$$

2) Έστω ${}_tP_x=\frac{100-(x+t)}{100-x}$ $\quad 0<x\le 100$. Να υπολογισθεί το

$\mu_{45}=\mu(45)$

Λύση:

$${}_tP_x=e^{-\int_x^{x+t}\mu(u)du} \Rightarrow \ln {}_tP_x=-\int_x^{x+t}\mu(u)du \Rightarrow -\ln {}_tP_x=\int_x^{x+t}\mu(u)du$$

$$\Rightarrow \ln {}_tP_x^{-1}=\int_x^{x+t}\mu(u)du \Rightarrow \left(\ln {}_tP_x^{-1}\right)'_t=\left[\int_0^{x+t}\mu(u)du-\cancelto{0}{\int_0^{x}\mu(u)du}\right]'_t$$

$$=\mu(x+t)$$

$${}_tp_x = \frac{100-(x+t)}{100-x} \Rightarrow \left(\ln \frac{100-x}{100-(x+t)}\right)' = \mu(x+t) \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{100-x}{100-(x+t)}\right)'_t}{\frac{100-x}{100-(x+t)}} = \frac{\frac{\cancel{100-x}}{-[100-(x+t)]^2}[-(x+t)]'_t}{\frac{\cancel{100-x}}{100-\cancel{(x+t)}}} = \frac{1}{100-(x+t)} = \mu(x+t)$$

Άρα, $\mu(45) = \frac{1}{100-45} = \frac{1}{55}$

3) Αν $d_x = 2x+1$ για $x=0,1,2,\dots,99$. Να δειχθεί:

a) $l_0 = 10^9$

Λύση:

$d_x = l_x - l_{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } x=0:\ d_0 = 1 = l_0 - \cancel{l_1} \\ x=1:\ d_1 = 3 = \cancel{l_1} - \cancel{l_2} \\ x=2:\ d_2 = 5 = \cancel{l_2} - l_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x=99:\ d_{99} = 199 = l_{99} - \cancel{l_{100}}^{\to 0} \end{array}\right\} +$$

$1+3+5+\dots+199 = l_0$

$\frac{100(1+199)}{2} = l_0 \Rightarrow$

$l_0 = 10^4$

b) $l_x = 10^4 - x^2 \qquad x=0,1,2,\dots,99$

Απο το (a) ερώτημα

$d_0 = 1 = l_0 - l_1 \Rightarrow l_1 = l_0 - 1$

$d_1 = 3 = l_1 - l_2 \Rightarrow l_2 = l_1 - 3 = l_0 - (1+3)$

$d_2 = 5 = l_2 - l_3 \Rightarrow l_3 = l_2 - 5 = l_0 - (1+3+5)$

$l_4 = l_0 - (1+3+5+7)$

$l_x = l_0 - (1+3+\dots+2(x-1)+1)$
$l_x = 10^4 - x^2$

$1+3+\dots+2(x-1)+1$
$= \frac{x[1+2(x-1)+1]}{2}$
$= \frac{x[\cancel{2}+2x-\cancel{2}]}{2} = x^2$

γ) ${}_tq_0 = \frac{t^2}{10^4}$

<u>Λύση:</u>

${}_tq_0 = \frac{l_0 - l_t}{l_0} = \frac{\cancel{10^4}-(\cancel{10^4}-t^2)}{10^4} = \frac{t^2}{10^4}$

4) Αν $\mu(x) = k \cdot x$, $x>0$ και $k>0$ σταθερά
Αν ${}_{10}P_{35} = 0,81$ να βρεθεί η ${}_{20}P_{40}$

<u>Λύση:</u>

Από ${}_tP_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)du} = e^{-\int_x^{x+t} k \cdot u\, du} = e^{-\frac{k}{2}[u^2]_x^{x+t}}$

$= e^{-\frac{k}{2}[(x+t)^2 - x^2]}$

${}_tP_x = e^{-\frac{k}{2}[(x+t+x)(\cancel{x}+t-\cancel{x})]} = e^{-\frac{k}{2}(2x+t)\cdot t}$

Από ${}_{10}P_{35} = e^{-\frac{k}{2}80\cdot 10} = e^{-400k} \Rightarrow 0,81 = e^{-400k} \Rightarrow$

$\ln 0,81 = -400k \Rightarrow k = \frac{\ln 0,81^{-1}}{400}$

Άρα $_{20}P_{40} = e^{-\frac{\ln 0{,}81^{-1}}{\cancel{200}} \cdot \cancel{100} \cdot \cancel{20}^{10}} = e^{10 \ln 0{,}81} = e^{\ln 0{,}81^{10}}$

$= 0{,}81^{10}$

5) Δύο ανεξάρτητες ως προς την θνησιμότητα ζωές. Ο ένας είναι καπνιστής και ο άλλος όχι.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Μη καπνιστής} \longrightarrow \mu(x) \\ \text{καπνιστής} \longrightarrow c\mu(x),\ c>1 \end{array}\right\} 0 < x \leq \omega$$

Εαν το άτομο είναι ηλικίας x να υπολογίσετε $P(T_x^{smk} > T_x)$

<u>Λύση:</u>

Έστω $\left.\begin{array}{l} {}_tP_x \\ T_x \end{array}\right\}$ για τον μη καπνιστή

$\left.\begin{array}{l} {}_tP_x^{smk} \\ T_x^{smk} \end{array}\right\}$ για τον καπνιστή

$$P(T_x^{smk} > T_x) \overset{\text{Θ.Ο.Π}}{=\!=} \int_0^{\omega-x} P(T_x^{smk} > T_x \mid T_x = t) \cdot P(T_x = t)\, dt$$

$$= \int_0^{\omega-x} P(T_x^{smk} > t) \cdot f_{T_x}(t)\, dt \quad (1)$$

Όμως $P(T_x^{smk} > t) = {}_tP_x^{smk} \Rightarrow {}_tP_x^{smk} = P(T_x^{smk} > t) = e^{-\int_x^{x+t} c\mu(u)du}$

$= e^{-c\int_x^{x+t} \mu(u)du} = \left(e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)du}\right)^c \Rightarrow P(T_x^{smk} > t) = ({}_tP_x)^c \quad (2)$

$$f_{T_x}(t) = F'_{T_x}(t) = -S'_{T_x}(t) = -({}_tP_x)'$$

$$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} P(T_x^{sunk} > T_x) = -\int_0^{\omega-x} ({}_tP_x)^c ({}_tP_x)' \, dt$$

$$= \int_0^{\omega-x} ({}_tP_x)^c \, d({}_tP_x)$$

$$= -\frac{({}_tP_x)^{c+1}}{c+1}\Big|_0^{\omega-x} = -\cancel{\frac{{}_{\omega-x}P_x}{c+1}}^{\to 0} + \frac{\overset{=1}{{}_0P_x}}{c+1}$$

$$= \frac{1}{c+1}$$

Δευτέρα 22 Νοεμβρίου 2021

Πίνακες Θνησιμότητας:

Πίνακας Θνησιμότητας είναι μια στατιστική - αναλογιστική μέθοδος για να εκφράσουμε τις πιθανότητες επιβίωσης - αποβίωσης.

- Στήλη $1^{η}$: l_x: Μέσος πληθυσμός στην ηλικία x.
- Στήλη $2^{η}$: $d_x = {}_1d_x$: Μέσος αριθμός θανάτων στο μέσο χρονικό διάστημα $(x, x+1)$
- Στήλη $3^{η}$: $q_x = {}_1q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$: Το ποσοστό αποβίωσης στο χρονικό διάστημα $(x, x+1)$

Προϋποθέσεις κατασκευής ενός πίνακα θνησιμότητας:

α) Ο αρχικός πληθυσμός είναι l_0
β) Ο πληθυσμός είναι κλειστός. Δεν μπορούν να μπουν καινούρια μέλη.
γ) Υπάρχει ποσοστό θνησιμότητας και δεν μπορεί να φύγει κανένα μέλος με άλλη αιτία.

Παράδειγμα:

Ελληνικός Πίνακας Θνησιμότητας Γυναικών 1990-93:

Ηλικία x	Μέσος πληθυσμός l_x	Μέσος αρ. θανάτων d_x	Ποσοστό θανάτων q_x
0	100.000	704	0,00736
5	99.199	16	0,00015
10	99.133	12	0,00011
⋮	⋮	⋮	⋮
103	320	160	0,5

Άσκηση: Σπίτι

Συμπληρώστε τον πίνακα θνησιμότητας:

x	l_x	d_x	q_x
90	3000	1000	1/3
91	2000	800	2/5
92			1/2

$d_{90}: q_{90} = \frac{1}{3} = \frac{d_{90}}{l_{90}} \Rightarrow \frac{d_{90}}{3000} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{d_{90} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = \frac{3000}{3} \Rightarrow$

$d_{90} = 1000$

l_{91}: $d_{90} = l_{90} - l_1 \Rightarrow l_1 = d_{90} - l_{90} = 3000 - 1000 = 2000$

d_{91}: $q_{91} = \frac{2}{5} = \frac{d_{91}}{l_1} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{d_{91}}{2000} \Rightarrow \frac{\cancel{5} d_{91}}{\cancel{5}} = \frac{4000}{5} \Rightarrow$

$d_{91} = \frac{4000}{5} = 800$

Νόμοι Θνησιμότητας:

Νόμοι της Θνησιμότητας είναι παραμετρικές μαθηματικές σχέσεις που εκφράζουν τις συναρτήσεις θνησιμότητας $S_T(x)$, l_x, $F_T(x)$ κλπ

Νόμος De Moivre (1725):

$$\boxed{l_x = k(\omega - x)} \quad , \quad 0 \le x \le \omega \quad , \quad k = Ct > 0$$

$$\boxed{S_T(x) = P(T > x) = \frac{l_x}{l_0} = \frac{\cancel{k}(\omega - x)}{\cancel{k} \cdot \omega} = 1 - \frac{x}{\omega}}$$

$$\boxed{F_T(x) = P(T \le x) = 1 - S_T(x) = \frac{x}{\omega}}$$

$$\boxed{S_{T_x}(t) = P(T_x > t) = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{\cancel{k}(\omega - (x+t))}{\cancel{k}(\omega - x)} = \frac{\omega - x}{\omega - x} - \frac{t}{\omega - x} = 1 - \frac{t}{\omega - x}}$$

$$\boxed{f_T(x) = F'_T(x) = \left(\frac{x}{\omega}\right)' = \frac{1}{\omega}}$$ Άρα $T \sim U(0, \omega)$

Νόμος Gompertz's (1825):

Παρατήρησε ότι
"Η μείωση της ικανότητας αντίστασης στο θάνατο είναι ανάλογη με την ίδια την αντίσταση στον θάνατο".

Δηλ. "όσο περισσότερο υγιείς πληθυσμό έχω τόσο περιορίζομε την ελάττωση των υγιειών ατόμων"

$\mu(u)$: Η συνάρτηση κινδύνου

$\frac{1}{\mu(u)}$: Η συνάρτηση αντίστασης του κινδύνου

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu(x)}\right) = a \cdot \frac{1}{\mu(x)}} \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{\mu(x)}\right)' = a \cdot \frac{1}{\mu(x)}$$

, $a = ct$ δεδομένη

$$\left(\frac{1}{\mu(x)}\right)' + \left(a \frac{1}{\mu(x)}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

πολ/ζω με το συντελεστή Euler το e^{ax}

$$\left(\frac{1}{\mu(x)}\right)' e^{ax} + (e^{ax})' \left(\frac{1}{\mu(x)}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{ax} \frac{1}{\mu(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{ax} \frac{1}{\mu(x)} = \frac{1}{A} \Leftrightarrow \mu(x) = \frac{1}{A} \frac{1}{e^{ax}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{(e^{a})^{x}} \Leftrightarrow$$

$A \to (10^{-6}, 10^{-3})$

$e^{a} = B$, $B \in (1{,}08,\ 1{,}12)$

$$\boxed{\mu(x) = A \cdot B^{x}}$$

Scanned with CamScanner

Παρατήρηση:

Αν λογαριθμήσω:

$\ln\mu(x) = \ln(A\cdot B^x) = \ln A + \ln B^x = \ln A + \ln B\cdot x$

Άρα σε λογαριθμική κλίμακα η σχέση γίνεται γραμμική

$$\boxed{\mu(x) = A\cdot B^x}$$

$$S_T(x) = e^{-\int_0^x \mu(u)du} = e^{-\int_0^x A\cdot B^u du} \quad (1)$$

$$-\int_0^x A\cdot B^u du = -A\int_0^x B^u du = -A\int e^{\ln B^u} du = -A\int_0^x e^{\ln B\cdot u} du$$

$$= -\frac{A}{\ln B}\int \ln B\, e^{\ln B\cdot u} du = -\frac{A}{\ln B}\int_0^x (e^{\ln B\cdot u})' du$$

$$= -\frac{A}{\ln B}\Big[\underbrace{e^{\ln B\cdot u}}_{B^u}\Big|_0^x\Big] = -\frac{A}{\ln B}\Big[B^u\Big|_0^x\Big] = -\underbrace{\frac{A}{\ln B}}_{\ln g} = \ln g(B^x - 1) \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} e^{-\int_0^x A\cdot B^u du} = e^{\ln g(B^x-1)} = e^{\ln g B^x - 1}$$

Άρα $\boxed{S_T(x) = g^{B^x - 1}}$

$$S_T(x) = \frac{l_x}{l_0} \Rightarrow l_x = l_0 S_T(x) - l_0 \cdot g^{B^x - 1} \Rightarrow l_x = \frac{l_0}{g} B^x$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{\cancel{l_0/g}\, B^{x+t}}{\cancel{l_0/g}\, B^x} = B^t$$

Πέμπτη 25 Νοεμβρίου 2021

• <u>Τιμολολόγηση:</u>

• <u>Ασφάλιστρο</u>: Είναι το ποσό το οποίο πληρώνει ο ασφαλισμένος για να του παρέχει η ασφαλιστική εταιρία μια κάλυψη.
Η τιμολόγηση της ασφαλιστικής εταιρείας διαφέρει απο την τιμολόγηση των άλλων προϊόντων. Η διαφορά αυτή υπάρχει διότι δεν είναι γνωστό απο πριν το κόστος <u>παραγωγής</u> του ασφαλιστικού προϊόντος αλλά βασίζεται σε <u>προβλέψεις</u>. Η διαδικασία πρόβλεψης <u>μελλοντικών</u> <u>απωλειών</u> και <u>μελλοντικών</u> εξόδων και η κατανομή του κόστους ανάμεσα στους ασφαλισμένους ονομάζεται <u>τιμολόγηση</u>.

• <u>Σκοπός</u> είναι να βρεθεί η μαθηματική τιμή του κινδύνου μετά απο παρατηρήσεις και αναλύσεις. Στις ασφαλιστικές εταιρείες έχουμε το τμήμα <u>Ανάλυσης</u> και <u>Μελέτης</u> των διάφορων κινδύνων. Επίσης το τμήμα θα καθορίσει τα έξοδα της εταιρείας. Κάθε κατηγορία κινδύνου θα πρέπει να έχει την δικιά της επάρκεια ώστε να μπορεί να καλύπτει τις δικές της ζημιές, τα λειτουργικά έξοδα και να αφήνει ένα περιθώριο κέρδους.
Στον καθορισμό του ασφαλίστρου έχει ρόλο η συμπεριφορά του ασφαλισμένου.

Τα ασφάλιστρα αναπροσαρμόζονται ανάλογα με τις συνθήκες.

Αντικειμενικοί Στόχοι Στην Τιμολόγηση:

Η τιμολόγηση έχει μερικά βασικά χαρακτηριστικά.

1) Επάρκεια: Να μπορεί να καλύπτει τα έξοδα του κινδύνου

2) Δίκαια: Θα πρέπει να υπάρχει μια αντικειμενικότητα απέναντι στους κινδύνους. Το κομμάτι αυτό καλύπτεται από το underwriting.

3) Όχι Υπερβολικά: Για να μπορεί να τα πληρώνει ο ασφαλισμένος.

4) Απλά: Ώστε οι πωλητές να εξηγούν στον ασφαλισμένο τους όρους.

5) Σταθερά: Για ένα χρονικό διάστημα.

6) Προσαρμόσιμα: Στις διάφορες οικονομικές μεταβολές.

7) Να ενθαρρύνουν την Πρόληψη

Επιθυμητές Ιδιότητες Υπολογισμού Ασφαλίστρων:

Έστω X: τ.μ. (τυχαία μεταβλητή) που απεικονίζει το ύψος του κινδύνου
Π_x: τ.μ. που απεικονίζει το ύψος του ασφαλίστρου
$H[\ ]$: Η σχέση που συνδέει τον κίνδυνο X με το ασφάλιστρο Π_x.
Άρα ισχύει $\boxed{\Pi_x = H[x]}$

Οι επιθυμητές ιδιότητες στην τιμολόγηση είναι:

α) $\Pi_x \geq E[x]$: Το ασφάλιστρο μεγαλύτερο από την μέση τιμή του κινδύνου.

β) $\Pi_{x_1+x_2} = \Pi_{x_1} + \Pi_{x_2}$

γ) $\Pi_{c \cdot x_1} = c \cdot \Pi_{x_1}$

δ) $\Pi_{c+x_1} = c + \Pi_{x_1}$

Αρχές Υπολογισμού των Ασφαλίστρων:

Αρχή της Μαθηματικής Ελπίδας:

$$\boxed{\Pi_x = E[x]}$$

όπου $E[x]$: είναι η μέση τιμή του κινδύνου
παρατηρούμε ότι:
α) $\Pi_x = E[x] \geq E[x]$

β) $\Pi_{x_1+x_2} = E[x_1+x_2] = E[x_1] + E[x_2] = \Pi_{x_1} + \Pi_{x_2}$

γ) $\Pi_{c\cdot X_1} = E[c\cdot X_1] = c\cdot E[X_1] = c\cdot \Pi_{X_1}$

δ) $\Pi_{c+X_1} = E[c+X_1] = c+E[X_1] = c+\Pi_{X_1}$

Αρχή της Ισοδυναμίας:

Θα χρησιμοποιήσουμε τις παρούσες αξίες Π.Α
Άρα χρειάζομαι το επιτόκιο i. Επίσης χρειάζομαι την τ.μ. T_x το υπόλοιπο της διάρκειας ζωής.

«Η Α.Π.Α (Αναλογιστική Παρούσα Αξία) των ασφαλίστρων είναι ίση με την Α.Π.Α των ασφαλιστικών αποζημιώσεων».

Είναι ένας άλλος τρόπος έκφρασης της μαθηματικής ελπίδας.

Καθαρό Ασφάλιστρο: Καλύπτει μόνο τις αποζημιώσεις του κινδύνου

Εμπορικό Ασφάλιστρο: Καλύπτει τον κίνδυνο, τα λειτουργικά έξοδα της εταιρείας και το κέρδος.

Η αρχή της ισοδυναμίας στο εμπορικό ασφάλιστρο γίνεται:

Α.Π.Α εμπορικού ασφαλίστρου = Α.Π.Α των αποζημιώσεων + Α.Π.Α λειτουργικών εξόδων και κέρδος.

Η αρχή αυτή δεν είναι ισοδύναμη με την αρχή της μαθηματικής ελπίδας.

Δευτέρα 29 Νοεμβρίου 2021

⓪ Τιμολόγηση

X: τ.μ που είναι ο κίνδυνος
Π_x: Ασφάλιστρο
H[ ]: H σχέση που συνδέει τον κίνδυνο X με το Π_x (Αρχή)

$$\boxed{\Pi_x = H[x]}$$

Οι σχέσεις θα πρέπει να καλύπτουν τις παρακάτω επιθυμητές ιδιότητες:

1) $\Pi_x \geq E[x]$
2) $\Pi_{x_1+x_2} = \Pi_{x_1} + \Pi_{x_2}$
3) $\Pi_{cx_1} = c\Pi_{x_1}$
4) $\Pi_{c+x_1} = c + \Pi_{x_1}$

1) Αρχή της μαθηματικής Ελπίδας:

$$\Pi_x = E[x]$$

H μόνη που καλύπτει τις 4 επιθυμητές ιδιότητες

2) Αρχή της ισοδυναμίας: (Αρχή της μαθ. ελπίδας)

A.Π.A ασφαλίστρων = A.Π.A των καθαρών κινδύνων

Αν διευρύνω την αρχή της ισοδυναμίας

A.Π.A ασφαλίστρων = A.Π.A εμπορικών κινδύνων

Για να καλύψουμε την Αρχή της Ισοδυναμίας με τον εμπορικό κίνδυνο χρησιμοποιώ την Αρχή της μαθηματικής ελπίδας με περιθώριο

Αρχή της Μαθηματικής Ελπίδας με Περιθώριο:

$$\Pi x = (1+\delta)E[x] \quad \text{όταν } \delta > 0$$

Εξετάζω τις 4 ιδιότητες:

1) $\Pi x \geq E[x]$

2) $\Pi x_1 + x_2 = (1+\delta)E[x_1+x_2] = \underbrace{(1+\delta)E[x_1]}_{\Pi x_1} + \underbrace{(1+\delta)E[x_2]}_{\Pi x_2}$
$= \Pi x_1 + \Pi x_2$

3) $\Pi c x_1 = (1+\delta)E[cx_1] = c\underbrace{(1+\delta)E[x_1]}_{\Pi x_1} = c\Pi x_1$

4) $\Pi c + x_1 = (1+\delta)E[c+x_1] = (1+\delta)[c+E[x_1]]$
$= (1+\delta)c + \underbrace{(1+\delta)E[x_1]}_{\Pi x_1} = (1+\delta)\cdot c + \Pi x_1 \neq c + \Pi x_1$

Άρα δεν καλύπτει την 4^{η} ιδιότητα

Αρχή Esscher:

$$\Pi x = \frac{E[X e^{hx}]}{E[e^{hx}]}, \quad h>0$$

Ο μετασχηματισμός Esscher αντιστοιχεί στην ε.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ στην $\tilde{X}$ με σ.π.π $g(x) = \frac{e^{hx} f(x)}{\int_0^{+\infty} e^{hy} f(y)dy} = \frac{e^{hx} f(x)}{M_x(h)}$

$$= \frac{e^{hx} f(x)}{E[e^{hx}]}$$

Ροπογεννήτρια:

X με σ.π.π $f(x)$ $M_X(h)=E[e^{hX}]=\int_0^{+\infty} e^{hy} f(y)dy$

Η $\tilde{X}$ έχει κατανομή $G(x)=\int_0^x g(y)dy=\int_0^x \frac{e^{hy}f(y)}{M_X(h)}dy$

$$=\frac{\int_0^x e^{hy}f(y)dy}{E[e^{hX}]}$$

Η ροπογεννήτρια της $\tilde{X}$: $M_{\tilde{X}}(t)=E[e^{t\tilde{X}}]=$

$$=\int_0^{+\infty} e^{ty} g(y)dy=\int_0^{+\infty}\frac{e^{ty}e^{hy}f(y)dy}{M_X(h)}=\frac{\int_0^{+\infty} e^{ty}e^{hy}f(y)dy}{M_X(h)}$$

$$=\frac{\int_0^{+\infty} e^{(t+h)y}f(y)dy}{M_X(t)}=\frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}$$

Η $E(\tilde{X})=\int_0^{+\infty} y\,g(y)dy=\frac{\int_0^{+\infty} y e^{hy}f(y)dy}{E[e^{hX}]}=\frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]}=\Pi_X$

Συμπέρασμα: (μετασχηματισμός Esscher)

$X \longrightarrow \tilde{X}$

$f(x) \longrightarrow g(x)=\frac{e^{hx}f(x)}{M_X(h)}$

$E(\tilde{X})=\Pi_X$

$M_{\tilde{X}}(t)=\frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}$

Παράδειγμα:

1) Έστω $X \sim Exp(\lambda)$. Γνωρίζω ότι $M_X(h) = \frac{\lambda}{\lambda - h}$, $h<\lambda$.
Να βρεθεί η κατανομή της $\tilde{X}$ (μετασχηματισμός Esscher)

Λύση:

Γνωρίζω ότι $M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} = \frac{\frac{\cancel{\lambda}}{\lambda-(t+h)}}{\frac{\cancel{\lambda}}{\lambda-h}} = \frac{\lambda - h}{(\lambda-h)-t}$;

Άρα $\tilde{X} \sim Exp(\lambda - h)$

$\Pi_X = E(\tilde{X}) = \frac{1}{\lambda - h}$

Παράδειγμα:

2) Έστω $X \sim Poisson(\lambda)$. Γνωρίζω ότι $M_X(h) = e^{\lambda(e^h-1)}$
$= \exp\{\lambda(e^{h-1})\}$. Να βρεθεί η κατανομή της $\tilde{X}$
και το ασφάλιστρο Π_X.

Λύση:

Γνωρίζω ότι $M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} = \frac{\exp\{\lambda(e^{t+h}-1)\}}{\exp\{\lambda(e^h-1)\}} =$

$= \exp\{\lambda(e^{t+h}-1) - \lambda(e^h-1)\} = \exp\{\lambda e^t e^h - \lambda e^h\}$

$= \exp\{\lambda e^h(e^t-1)\}$

Άρα $\tilde{X} \sim Poisson(\lambda e^h)$

$\Pi_X = E(\tilde{X}) = \lambda \cdot e^h$.

Πέμπτη 2 Δεκεμβρίου 2021

Τιμολόγηση:

Σχέση: Ο κίνδυνος με το Ασφάλιστρο
X: τ.μ. Κίνδυνος
Π_X: ασφάλιστρο
$\Pi_X = H[X]$

Ιδιότητες:

1) $\Pi_X \geq E[X]$
2) $\Pi_{X_1+X_2} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$
3) $\Pi_{cX_1} = c\,\Pi_{X_1}$
4) $\Pi_{c+X_1} = c + \Pi_{X_1}$

Αρχές (Σχέσεις):

1) $\Pi_X = E(X)$ (καλύπτει και τις 4 ιδιότητες)
2) Αρχή της ισοδυναμίας
3) $\Pi_X = (1+\delta)E[X]$ με περιθώριο $\delta > 0$
4) Αρχή Esscher $\Pi_X = \dfrac{E[X \cdot e^{hX}]}{E[e^{hX}]}$ $h > 0$

X σ.π.π. $f(x)$
$\downarrow$
$\tilde{X}$ σ.π.π. $g(x) = \dfrac{e^{hx} f(x)}{M_X(h)}$

Ροπογεννήτρια: $M_{\tilde{X}}(t) = \dfrac{M_X(t+h)}{M_X(h)}$

$\Pi_X = E[\tilde{X}]$

Ιδιότητες Στην Αρχή Esscher:

$$E(x) = \int_0^\infty x f(x) dx$$
$$E(x) = M_x'(t)\Big|_{t=0}$$
$$M_x(0) = 1$$

1) $\Pi_x = E(\tilde{X})$

$$= M_{\tilde{X}}'(t)\Big|_{t=0} = \left(\frac{M_x(t+h)}{M_x(h)}\right)'_{t=0} =$$

$$= \frac{M_x'(t+h)(t+h)'}{M_x(h)}\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{M_x'(t+h)}{M_x(h)}\Big|_{t=0} = \frac{M_x'(h)}{M_x(h)}$$

1η περίπτωση: $h=0$ $\quad M_x = \frac{M_x'(t)}{\underset{1}{\underset{\|}{M_x(0)}}}\Big|_{t=0} = E[x]$

2η περίπτωση: $h>0$. Θα αποδείξω ότι η $\Pi_x(h)\uparrow$.
Τότε $\Pi_x \geq E[x]$ $\forall h>0$.
Για να είναι αύξουσα η Π_x παίρνω την παράγωγο ως προς h.

$$\frac{d}{dh}\Pi_x = \frac{d}{dh}\frac{M_x'(h)}{M_x(h)} = \frac{M_x''(h)\cdot M_x(h) - (M_x'(h))^2}{[M_x(h)]^2} =$$

$$= \frac{M_x''(h)}{M_x(h)} - \left[\frac{M_x'(h)}{M_x(h)}\right]^2 = E(\tilde{X}^2) - [E(\tilde{X})]^2$$

$= Var(\tilde{X}) > 0$

Άρα $\frac{d}{dh}\Pi_x > 0 \Rightarrow \Pi_x \uparrow \Rightarrow \Pi_x \geq E[x]$

2) $$\Pi_{x_1+x_2} = \frac{E\left[(x_1+x_2)\, e^{h(x_1+x_2)}\right]}{E\left[e^{h(x_1+x_2)}\right]}$$

$$= \frac{E\left[(x_1+x_2)\cdot e^{hx_1}\cdot e^{hx_2}\right]}{E\left[e^{hx_1}\cdot e^{hx_2}\right]} =$$

$$= \frac{E\left[x_1 \cdot e^{hx_1}\right] E\left(e^{hx_2}\right) + E\left(e^{hx_1}\right) E\left[x_2 e^{hx_2}\right]}{E\left[e^{hx_1}\right]\cdot E\left[e^{hx_2}\right]}$$

$$= \frac{E\left[x_1 e^{hx_1}\right]}{E\left[e^{hx_1}\right]} + \frac{E\left[x_2 e^{hx_2}\right]}{E\left[e^{hx_2}\right]} = \Pi_{x_1} + \Pi_{x_2}$$

3) $$\Pi_{cx_1} = \frac{E\left[cX e^{hcx}\right]}{E\left[e^{hcx}\right]} = \frac{cE\left[X\cdot e^{hcx}\right]}{E\left[e^{hcx}\right]} \neq c\cdot \frac{E\left[x e^{hx}\right]}{E\left[e^{hx}\right]}$$

$$= c\cdot \Pi_x$$

4) $$\Pi_{c+X} = \frac{E\left[(c+x)\, e^{h(c+x)}\right]}{E\left[e^{h(c+x)}\right]} = \frac{E\left[(c+x)\cdot e^{h\cdot c}\cdot e^{h\cdot x}\right]}{E\left[e^{h\cdot c}\cdot e^{hx}\right]}$$

$$= \frac{E\left[c\cdot e^{hc}\right] E\left[e^{hx}\right] + E\left[x e^{hx}\right] E\left[e^{hc}\right]}{E\left[e^{hc}\right]\cdot E\left[e^{hx}\right]}$$

$$= \frac{c\cdot \cancel{e^{hc}}\, \cancel{E\left[e^{hx}\right]}}{\cancel{e^{hc}}\, \cancel{E\left[e^{hx}\right]}} + \frac{E\left[x e^{hx}\right]}{E\left[e^{hx}\right]} = c + \Pi_x$$ ισχύει η 4η ιδιότητα

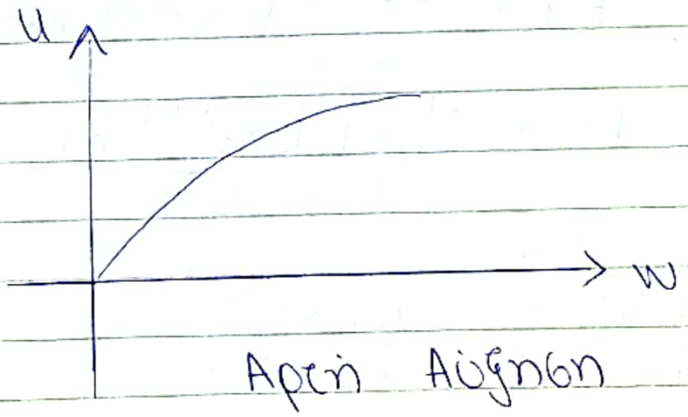
5) Αρχή της Ωφελιμότητας:

Στηρίζεται στο ότι για ένα χρηματικό ποσό δεν έχει σημασία η αντικειμενική του αξία αλλά η ωφελιμότητα του.
Ο Bernoulli (1732) διατύπωσε την "Αρχή της φθίνουσας οριακής ωφελιμότητας"
Για ένα χρηματικό ποσό W έχω μια αύξηση dW.
Τότε η ωφελιμότητα U της αύξησης dW.
Είναι αντιστρόφως ανάλογη του κεφαλαίου W.

Παραδείγματα συναρτήσεων ωφελιμότητας είναι:

$$U(W) = -\frac{1}{W}, \quad U(W) = \sqrt{W}, \quad U(W) = \ln W, \quad U(W) = -e^{-aW}$$

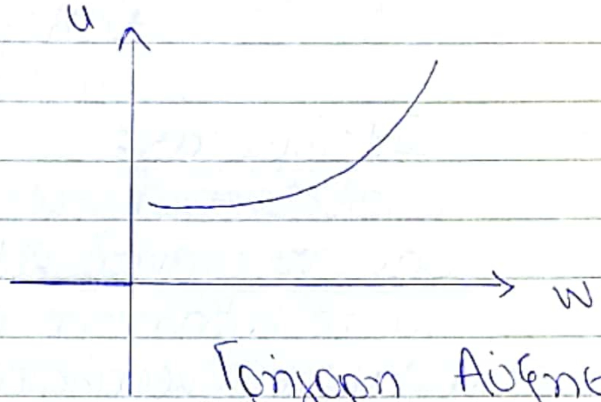
Οι οποίες έχουν το χαρακτηριστικό ότι
$U'(W) > 0$ και $U''(W) < 0$.



Αρχή Αύξηση

Τα άτομα που χαρακτηρίζουν τέτοιες συναρτήσεις αναφέρονται ΚΙΝΔΥΝΟΦΟΒΑ.

Ενώ συναρτήσεις $u(w) = w^2$, $u(w) = w \cdot \ln(w+1)$
έχουν $u'(w) > 0$ και $u''(w) > 0$



Γρήγορη Αύξηση

Τα άτομα αυτά χαρακτηρίζονται ΚΙΝΔΥΝΟΛΑΤΡΕΙΣ

- Η μαθηματική διατύπωση της αρχής της ωφελιμότητας:

X: τ.μ. κινδύνου
G: το ασφάλιστρο
w: Κεφάλαιο
u: Η συνάρτηση της ωφελιμότητας

Το μέγιστο ασφάλιστρο Gmax που μπορεί να πληρώσει ένας ασφαλισμένος δίνεται απο την σχέση:

$$u(w - G_{max}) = E[u(w - X)] \quad (1)$$

Ενώ για το ελάχιστο ασφάλιστρο που μπορεί να δεχθεί η ασφαλιστική εταιρεία Gmin πρέπει να ισχύει:

$$u(w) = E[u(w + G_{min} - X)] \quad (2)$$

Φυσικά ισχύει $G_{max} > G_{min}$

Δευτέρα 6 Νοεμβρίου 2021

● Αρχή της Ωφελιμότητας:

● Bernoulli: Εαν w είναι το κεφάλαιο με προσαύξηση Δw. Τότε η ωφελιμότητα u της προσαύξησης είναι αντιστρόφως ανάλογο του κεφαλαίου w.
● Συναρτήσεις που εκφράζουν της παραπάνω αρχή
$u(w) = -\frac{1}{w}$ η $u(w) = -e^{-aw}$

με $u' > 0$ και $u'' < 0$. Χαρακτηρίζουν τους κινδυνόφοβους

● Συναρτήσεις $u(w) = e^{aw}$ που έχουν $u' > 0$ και $u'' > 0$ χαρακτηρίζουν τους κινδυνολάτρεις.
● Μαθηματικές Σχέσεις:

W: κεφάλαιο
U: συνάρτηση ωφελιμότητας
X: τ.μ. κινδύνου
G: ασφάλιστρο

Τότε $u(w - G_{max}) = E[u(w - x)]$ μας δίνει G_{max}
$u(w) = E[u(w + G_{max} - x)]$ μας δίνει το G_{min}

Παραδείγματα:

α)

1) Για ένα κινδυνόφοβο άτομο $G_{max} > E(x)$. Τι ισχύει για το G_{min}?

Λύση:

α) Αφού έχουμε κινδυνόφοβο τότε ισχύει $u' > 0$ και $u'' < 0$

Άρα για το G_{max} ισχύει: $u(w - G_{max}) = E[u-(w-x)]$.

Από ανισότητα Jensen έχουμε:

$u(w - G_{max}) = E[u-(w-x)] \Leftrightarrow$

$u(w - G_{max}) < u[E(w-x)] \Leftrightarrow$ αφού $u'' < 0$

Αφού $u' > 0$ τότε $u \uparrow$ και άρα

$w - G_{max} < E(w-x) \Leftrightarrow$

$w - G_{max} < w - E(x) \Leftrightarrow \boxed{G_{max} > E(x)}$

Ανισότητα Jensen:

α) Εαν $\phi''(x) > 0$ τότε $E[\phi(x)] > \phi[E(x)]$

β) Εαν $\phi''(x) < 0$ τότε $E[\phi(x)] < \phi[E(x)]$

γ) Εαν $\phi''(x) = 0$ τότε $E[\phi(x)] = \phi(E(x))$

β) Για το G_{min} ισχύει $u(w) = E[u(w + G_{min} - x)]$

ισχύει $u'' < 0$ απο ανισότητα Jensen:

$u(w) = E[u(w + G_{min} - x)] \Leftrightarrow$

$u(w) < u[E(w + G_{min} - x)] \Leftrightarrow$ $u' > 0$ αρα $u \uparrow$

$w < E(w + G_{min} - x) \Leftrightarrow$

$\cancel{w} < \cancel{w} + G_{min} - E(x) \Leftrightarrow$

$\boxed{G_{min} > E(x)}$

2) Έστω η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι η εκθετική $u(x) = -e^{-ax}$, $a>0$ $(u'>0,\ u''<0)$
Αν ο κίνδυνος $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ να βρεθεί το G_{max}

Λύση:

Ισχύει $u(w - G_{max}) = E[u(w-x)] \Leftrightarrow$

$$-e^{-a(w-G_{max})} = E[-e^{-a(w-x)}] \Leftrightarrow$$

$$-e^{-aw} \cdot e^{aG_{max}} = E[-e^{-aw} \cdot e^{ax}] \Leftrightarrow$$

$$-\cancel{e^{-aw}} \cdot e^{aG_{max}} = -\cancel{e^{-aw}} E[e^{ax}] \Leftrightarrow$$

$$e^{aG_{max}} = E[e^{ax}] \Leftrightarrow$$

$$e^{aG_{max}} = M_X(a) \Leftrightarrow$$

Αφού $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ισχύει $M_X(t) = e^{\mu \cdot t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

$$e^{aG_{max}} = e^{\mu a + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2} \Leftrightarrow$$

$$aG_{max} = \mu a + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{G_{max} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 a}$$

3) Έστω η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι η εκθετική $u(x) = -e^{-ax}$, $a>0$ $(u'>0,\ u''<0)$. Αν ο κίνδυνος $X \sim Gamma(n, b)$ να βρεθεί το G_{max}.

Λύση:

Ισχύει $u(w - G_{max}) = E[u(w-x)] \Leftrightarrow$

$$-e^{-a(w-G_{max})} = E[-e^{-a(w-x)}] \Leftrightarrow$$

$$-e^{-aw} \cdot e^{aG_{max}} = E[-e^{-a(w-x)}] \Leftrightarrow$$

$$-\cancel{e^{-aw}} \cdot e^{aG_{max}} = -\cancel{e^{-aw}} E[e^{ax}] \Leftrightarrow$$

$$e^{aG_{max}} = E[e^{ax}] \Leftrightarrow$$

$$e^{aG_{max}} = M_X(a) \Leftrightarrow$$

Αφού $X \sim Gamma(n, b)$ ισχύει $M_X(t) = \frac{1}{(1-tb)^n}$, $t < \frac{1}{b}$

$$e^{aG_{max}} = \frac{1}{(1-ab)^n} \Leftrightarrow$$

$$aG_{max} = \ln(1-ab)^{-n} \Leftrightarrow$$
$$aG_{max} = -n\ln(1-ab) \Leftrightarrow$$
$$\boxed{G_{max} = -\frac{n}{a}\ln(1-ab)}$$

Λήψη Αποφάσεων:

Έστω w είναι το κεφάλαιο
Έστω X_1 τ.μ. η πρώτη επένδυση
X_2 τ.μ. η δεύτερη επένδυση
Η επιλογή της επένδυσης βασίζεται στην αρχή της ωφελιμότητας. Δηλαδή θα επιλέξω την επένδυση X_1 αν:
$$E(u(w+X_1)) > E[u(w+X_2)]$$

Παράδειγμα:

1) Έστω η εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = -e^{-ax}$, $x>0$. Να δείξετε ότι η λήψη της απόφασης επένδυσης είναι ανεξάρτητη του κεφαλαίου w.

Λύση:

Έστω X_1 και X_2 οι επενδύσεις με καλύτερη την X_1
$$E(u(w+X_1)) > E(u(w+X_2)) \Leftrightarrow$$
$$E[-e^{-a(w+X_1)}] > E[-e^{-a(w+X_2)}] \Leftrightarrow$$
$$-\cancel{e^{-aw}}E[e^{-aX_1}] > -\cancel{e^{-aw}}E[e^{-aX_2}] \Leftrightarrow$$
$$M_{X_1}(-a) < M_{X_2}(-a)$$

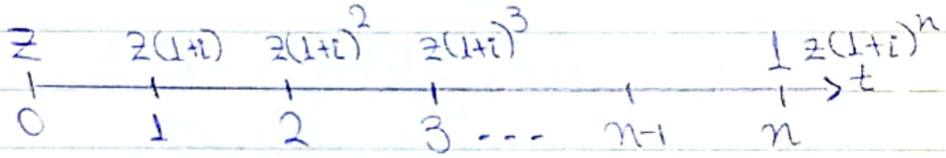
Για την λήψη της απόφασης δεν παίζει ρόλο το κεφάλαιο w αλλά συγκρίνω τις ροπογεννήτριες

Πέμπτη 9 Δεκεμβρίου 2021

Προγράμματα Ασφαλίσεων Ζωής:

1ο Πρόγραμμα Επιβίωσης n-ετών:

α) Το ασφαλιστικό κεφάλαιο πληρώνεται μετά τα n-έτη.
β) Το ποσό που θα πάρει ο ασφαλισμένος είναι μια χρηματική μονάδα.
γ) Τα ασφάλιστρα θα πρέπει να έχουν πληρωθεί μέσα στα n-έτη.
Θα ζητήσω την Αναλογιστική Παρούσα Αξία του προγράμματος



Έστω Z η Παρούσα Αξία της 1 χρηματικής μονάδας
Άρα ισχύει $1 = Z(1+i)^n$, i = επιτόκιο

$$Z = \begin{cases} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n = u^n , & T_x \geq n \quad (\text{Παρούσα Αξία}) \\ 0 , & T_x < n \end{cases}$$

Αναλογιστική Παρούσα Αξία:

$$E(Z) = Z\,P(T_x \geq n) + Z\,P(T_x < n) \Leftrightarrow$$
$$E(Z) = u^n \, {}_nP_x$$

Άρα $\boxed{E(Z) = A_{x:\overline{n|}}^{\;1} = u^n \, {}_nP_x}$

l_x: Μέσος πληθυσμός στην x-ηλικία

$${}_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Άρα $A\frac{1}{n:x|} = u^n \, {}_nP_x = u^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{u^{x+n} \, l_{x+n}}{u^x \cdot l_x}$

Θέτω $\boxed{D_x = u^x \cdot l_x}$ που ονομάζεται συνάρτηση μετατροπής

$$\boxed{A\frac{1}{n:x|} = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$$

● Διακύμανση: $Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 =$
$= u^{2n} \, {}_nP_x - (u^n \, {}_nP_x)^2 = u^{2n} \cdot {}_nP_x - u^{2n} \, {}_nP_x^2 =$
$= u^{2n} \, {}_nP_x (1 - {}_nP_x)$

Άρα,

$$\boxed{Var(Z) = u^{2n} \cdot {}_nP_x \cdot {}_nq_x}$$

● Τύποι:

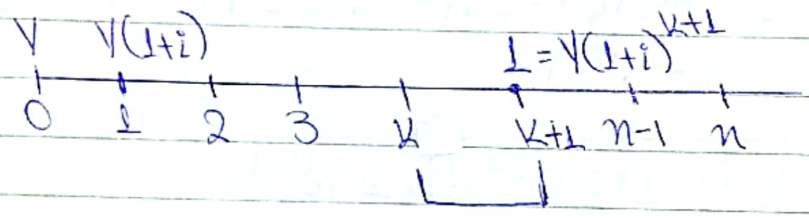
1) $A\frac{1}{n:x|} = u^n \cdot {}_nP_x$

2) $A\frac{1}{x:n|} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$

3) $Var(Z) = u^{2n} \cdot {}_nP_x \cdot {}_nq_x$

Πρόσκαιρη Ασφάλιση Θανάτου:

α) Το πρόγραμμα έχει συγκεκριμένη διάρκεια (π.χ. 5 ή 10 χρόνια).
β) Το ασφαλιστικό κεφάλαιο πληρώνεται αν αποβιώσουμε κατά την διάρκεια του προγράμματος.
γ) Το ασφαλιστικό κεφάλαιο που θα πάρουμε είναι 1 χρηματική μονάδα.
δ) Η πληρωμή του ασφαλιστικού κεφαλαίου γίνεται στο τέλος του έτους.
Ζητώ την Αναλογιστική Παρούσα Αξία.



Έστω ο ασφαλισμένος αποβιώνει στο χρονικό διάστημα $(k, k+1]$
Η πληρωμή θα γίνει στο $k+1$ έτος
Έστω Y η Παρούσα Αξία της 1 χρηματικής μονάδας
Άρα ισχύει $1 = Y(1+i)^{k+1} \Rightarrow Y = \begin{cases} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{k+1} = u^{k+1}, & k=0,1,\dots,n-1 \\ 0, & k=n,n+1,\dots \end{cases}$

Αναλογιστική Παρούσα Αξία:

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} P(k < T_x \leq k+1) = \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} \, {}_{k|}q_x$$

Άρα $\boxed{E(Y) = A_{1\,\overline{n:x|}} = \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}\, {}_{k|}q_x}$

Γνωρίζω ${}_{k|}q_x = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_x}$

Άρα, $A_{1\,\overline{n:x|}} = \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{x+k+1} d_{x+k}}{u^x l_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} u^{x+k+1} d_{x+k} =$

$\boxed{= \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k}}$

Ορίζω συνάρτηση μετατροπής: $C_x = u^{x+1} d_x$

$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$

$A_{1\,\overline{n:x|}} = \frac{1}{D_x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} - \sum_{k=n}^{\infty} C_{x+k}\right]$

$= \frac{1}{D_x}\left[M_x - \sum_{\underbrace{k-n}_{k'}=0}^{\infty} C_{x+n+(k-n)}\right]$

$= \frac{1}{D_x}\left[M_x - \underbrace{\sum_{k'=0}^{\infty} C_{x+n+k'}}_{M_{x+n}}\right]$

Άρα $A_{1\,\overline{n:x|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (u^{k+1})^2 \, {}_{k|}q_x - \left[A^{1}_{\overline{n:x|}}\right]^2$$

Τύποι:

1) $A^{1}_{\overline{n:x|}} = \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} \, {}_{k|}q_x$

2) $A^{1}_{\overline{x:n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$

3) $Var(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} (u^{k+1})^2 \, {}_{k|}q_x - \left(A^{1}_{\overline{n:x|}}\right)^2$

Δευτέρα 13 Δεκεμβρίου 2021

Προγράμματα Ζωής:

1) Προγράμματα Επιβίωσης n-ετών

$E(Z) = A_{\overline{x:n|}}^{\;\;1} = u^n \, {}_nP_x$, $u = \frac{1}{1+i}$ και θα πάρει 1 χρηματική μονάδα

Συναρτήσεις Μετατροπής:

$D_x = u^x l_x$

$A_{\overline{n:x|}}^{\;\;1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$

$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = u^{2n} \, {}_nP_x \, {}_nq_x$

2) Πρόγραμμα Αποβίωσης n-ετών:

$$E(Y) = A^{\;1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}\, {}_{k|}q_x$$

Συναρτήσεις Μετατροπής:

$$C_x = u^{x+1} d_x$$

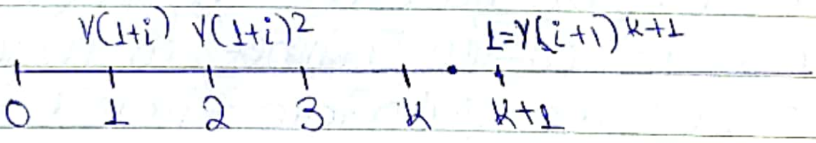
$$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$$

$$A^{\;1}_{n:\overline{x}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (u^{k+1})^2\, {}_{k|}q_x - \left(A^{\;1}_{n:\overline{x}|}\right)^2$$

3) Πρόγραμμα Ισόβια Ασφάλισης Αποβίωσης:

α) Το ασφαλιστικό κεφάλαιο πληρώνεται στην περίπτωση του θανάτου.
β) Το ασφαλιστικό κεφάλαιο είναι 1 χρηματική μονάδα και η πληρωμή γίνεται στο τέλος του έτους
γ) Θα πρέπει να βρω την Αναλογιστική Παρούσα Αξία



Έστω ότι αποβιώνει στο διάστημα $(k, k+1)$ τότε η 1 χ.μ. θα πληρωθεί στο $k+1$ έτος με $k=0,1,2,\dots$

Εαν Y είναι η παρούσα αξία

$$Y = \left(\frac{1}{1+i}\right)^{k+1} = u^{k+1}, \quad k=0,1,2,\dots$$

Αναλογιστική Παρούσα αξία:

$$E(Y) = A_x = \sum_{k=0}^{\infty} Y P(k < T_x \le k+1)$$

$$\boxed{A_x = \sum_{k=0}^{\infty} u^{k+1} \, {}_{k|}q_x}$$

Συναρτήσεις Μετατροπής:
$D_x = u^x l_x$
$C_x = u^{x+1} d_x$
$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$
κτλ

${}_{k|}q_x = \frac{d_{x+k}}{l_x}$

Με συναρτήσεις μετατροπής:

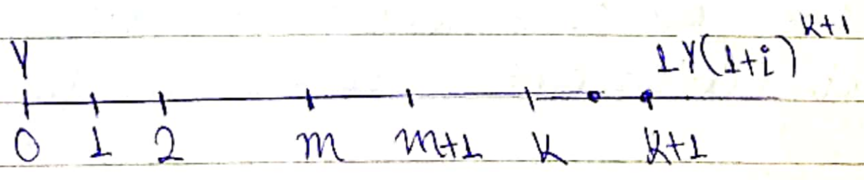
$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} u^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{x+k} d_{x+k}}{u^x l_x}$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} u^{x+k+1} d_{x+k} \Rightarrow A_x = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} = \frac{M_x}{D_x}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(u^{k+1}\right)^2 {}_{k|}q_x - (A_x)^2$$

Αναβαλλόμενη Ισόβια Ασφάλιση Αποβιώσεως:

α) Το ασφαλιστικό κεφάλαιο θα αρχίσει να πληρώνεται μετά από m έτη που ξεκίνησε το πρόγραμμα
β) Το ασφαλιστικό κεφάλαιο είναι 1 χρηματική μονάδα
γ) Θέλω την Αναλογιστική Παρούσα Αξία.



Εαν αποβιώσει στο $(k, k+1]$ θα πληρωθεί στο $k+1$ έτος

Η παρούσα αξία:

$$Y = \begin{cases} v^{k+1}, & k = m, m+1, \dots \\ 0, & k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \end{cases}$$

Αναλογιστική Παρούσα Αξία:

$$E(Y) = {}_{m}A_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} P(k < T_x \leq k+1)$$

$$\boxed{{}_{m}A_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} \, {}_{k|}q_x}$$

Συναρτήσεις Μεταφοράς:

$D_x = v^x l_x$

$C_x = v^{x+1} d_x$

$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$

${}_{k|}q_x = \dfrac{d_{x+k}}{l_x}$

Με συναρτήσεις μεταφοράς:

$${}_{m}A_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=m}^{\infty} v^{x+k+1} \frac{d_{x+k}}{v^x l_x}$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{k=m}^{\infty} v^{x+k+1} d_{x+k} \Rightarrow {}_{m}A_x = \frac{1}{D_x} \sum_{k=m}^{\infty} C_{x+k} \Rightarrow$$

$${}_{m}A_x = \frac{1}{D_x} \sum_{k-m=0}^{\infty} C_{x+m+(k-m)} = \frac{1}{D_x} \sum_{k'=0}^{\infty} C_{x+m+k'} = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

Άρα $\boxed{{}_{m}A_x = \dfrac{M_{x+m}}{D_x}}$

Διακύμανση:

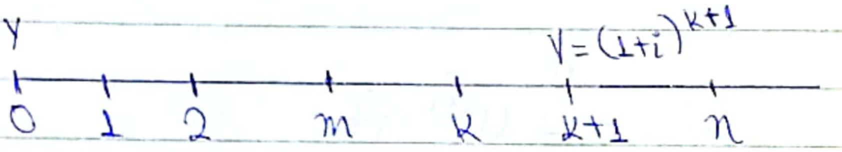
$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \sum_{k=m}^{\infty} (v^{k+1})^2 \, {}_{k|}q_x - ({}_{m}A_x)^2$$

Αναβαλλόμενη Πρόσκαιρη Ασφάλιση Αποβίωσης:

α) Το ασφαλιστικό κεφάλαιο πληρώνεται μεταξύ m και n έτη $(m<n)$

β) Το ασφαλιστικό κεφάλαιο είναι 1 χρηματική μονάδα

γ) Αναλογιστική Παρούσα Αξία



Παρούσα Αξία:

$$Y = \begin{cases} 0 & , \; k = 0,1,\dots,m-1 \\ v^{k+1} & , \; k = m, m+1, \dots, n-1 \\ 0 & , \; k = n, n-1, \dots \end{cases}$$

Αναλογιστική Παρούσα Αξία:

$$E(Y) = \boxed{{}_{m|n}A_x = \sum_{k=m}^{n-1} v^{k+1} \, {}_{k|}q_x}$$

Συναρτήσεις Μετατροπής:

$D_x = v^x l_x$

$C_x = v^{x+1} d_x$

$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$

$_{k|}q_x = \frac{d_{x+k}}{l_x}$

Συναρτήσεις Μετατροπής:

$$_{m|n}A_x = \sum_{k=m}^{n-1} u^{x+k+1}\frac{d_{x+k}}{u^x l_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{k=m}^{n-1} u^{x+k+1} d_{x+k}$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{k'=0}^{n-1} u^{x+m+k'+1} d_{x+m+k'}$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{k'=0}^{n-1} C_{x+m} = \frac{1}{D_x}\left(\sum_{k'=0}^{\infty} C_{x+m+k'} - \sum_{k'=n}^{\infty} C_{x+m}\right)$$

$$= \frac{1}{D_x}\left(\sum_{k'=0}^{\infty} C_{x+m+k'} - \sum_{k'-n=0}^{\infty} C_{x+m+n+(k'-n)}\right)$$

Άρα $\boxed{_{m|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+m+n}}{D_x}}$

Πέμπτη 16 Δεκεμβρίου 2021

- Πρόγραμμα Ασφαλίσεων Ζωής:

1) Πρόσκαιρη Ασ. Επιβίωσης: $A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} = u^n\,{}_nP_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$

$u = \frac{1}{1+i}$, i: επιτόκιο

- Συναρτήσεις Μετατροπής:

1) $D_x = u^x l_x$
2) $C_x = u^{x+1} d_{x+k}$
3) $M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$

2) Πρόσκαιρη Ασ. Αποβίωσης: $A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} \cdot {}_{k|}q_x$

$= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$

3) Ισόβια Ασ. Αποβίωσης: $A_x = \sum_{k=0}^{\infty} u^{k+1}\, {}_{k|}q_x = \frac{M_x}{D_x}$

4) Αναβαλλόμενη Ισόβια Ασ. Αποβίωσης:
${}_{m|}A_x = \sum_{k=m}^{\infty} u^{k+1}\, {}_{k|}q_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$

5) Πρόσκαιρη Αναβ. Ασ. Αποβίωσης: ${}_{m|n}A_x = \sum_{k=m}^{n-1} u^{k+1}\, {}_{k|}q_x$

$= \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$

6) Μικτή Ασφάλιση: $A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} + A^{1}_{x:\overline{n}|}$

$= u^n\, {}_nP_x + \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}\, {}_{k|}q_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$

(iii) Τύποι:

${}_nP_x = \underline{l_{x+n}}$

${}_{k|}q_x = \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x}$

Μικτή Ασφάλιση:

α) Το ασφαλιστικό κεφάλαιο (1 χρηματική μονάδα) θα πληρωθεί εφόσον ζει μετά από n-έτη ή αποβιώσει στην διάρκεια των n-ετών.

β) Η αναλογιστική παρούσα αξία $A_{\overline{x:n|}} = A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} + A^1_{\overline{x:n|}}$

$$A_{\overline{x:n|}} = u^n\, {}_nP_x + \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}\, {}_{k|}q_x$$

$$A_{\overline{x:n|}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Ασκήσεις:

1) $i = 0{,}04$

$({}_1P_x)\; P_x = 0{,}995$

${}_2P_x = 0{,}986$

${}_3P_x = 0{,}982$

α) Ασφ. μιας τριετούς ασφάλισης αποβίωσης με α.κ.=1 χ.μ. Άτομο ηλικίας x.

Λύση:

$$A^1_{\overline{x:3|}} = \sum_{k=0}^{2} u^{k+1}\, {}_{k|}q_x = u \cdot {}_{0|}q_x + u^2\, {}_{1|}q_x + u^3\, {}_{2|}q_x$$

με $u = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+0{,}04} = \dfrac{1}{1{,}04}$

$${}_{0|}q_x = \frac{d_{x+0}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - P_x = 1 - 0{,}995$$

$${}_{1|}q_x = \frac{d_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} - \frac{l_{x+2}}{l_x}$$

$_1P_x - _2P_x = 0,995 - 0,986$

$_{2|1}q_x = \frac{d_{x+2}}{l_x} = \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{l_x} = \frac{l_{x+2}}{l_x} - \frac{l_{x+3}}{l_x} = {}_2P_x - {}_3P_x$

$= 0,986 - 0,982$

β) Ασφάλιση μια τριετούς επιβίωσης ατόμου ηλικίας x.
Λύση:

$A_{\underset{x:\overline{3|}}{\ \ 1}} = u^3 \cdot {}_3P_x = \dots$

γ) Ασφάλιση μιας τριετούς μικτής ασφάλισης
Λύση:

$A_{x:\overline{3|}} = A_{\underset{x:\overline{3|}}{\ \ 1}} + A^1_{x:\overline{3|}}$

2)

$A_{30} = 0,23$

$A_{40} = 0,30$

$A_{30:\overline{10|}} = 0,7102$

$u^{10} = 0,70$

α) $_{10}P_{30} = ;$

Λύση:

$A_{30} = \frac{M_{30}}{D_{30}} = 0,23 \Rightarrow M_{30} = 0,23 \cdot D_{30}$

$A_{40} = \frac{M_{40}}{D_{40}} = 0,30 \Rightarrow M_{40} = 0,30 \cdot D_{40}$

$$A_{\overline{30:10|}} = A_{\overset{1}{30:10|}} + A^1_{\,30:10|} = \frac{D_{40}}{D_{30}} + \frac{M_{30}-M_{40}}{D_{30}}$$

$$= 0,7102 \Rightarrow \frac{D_{40} + 0,23 D_{30} - 0,30 D_{40}}{D_{30}} = 0,7102 \Rightarrow$$

$$\frac{0,7 D_{40}}{D_{30}} + 0,23 = 0,7102 \Rightarrow \frac{0,7 \cdot u^{40}}{u^{30}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{l_{40}}{l_{30}}}}_{{}_{10}P_{30}} = 0,4802 \Rightarrow$$

$$0,7 \cdot u^{10} \cdot {}_{10}P_{30} = 0,4802 \Rightarrow {}_{10}P_{30} = \frac{0,4802}{0,7 \cdot 0,7} \Rightarrow$$

$${}_{10}P_{30} = 0,98$$

b) $A^1_{\,30:10|} = ;$

Λύση:

$$A^1_{\,30:10|} = A_{\overline{30:10|}} - A_{\overset{1}{30:10|}} = 0,7102 - u^{10}\,{}_{10}P_{30} = 0,7 \cdot 0,98$$

$= \dots$

3) Να αποδειχθούν οι σχέσεις

a) ${}_{m}A_x = A_{\overset{1}{x:n|}} \cdot A_{x+m}$

Λύση:

$${}_{m}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

$$A_{\overset{1}{x:n|}} \cdot A_{x+m} = \frac{\cancel{D_{x+m}}}{D_x} \cdot \frac{M_{x+m}}{\cancel{D_{x+m}}} = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

$\Rightarrow$ ${}_{m}A_x = A_{\overset{1}{x:n|}} A_{x+m}$

β) $_{m|n}A_x = A^{\;1}_{\overline{x:m}|} \cdot A_{1\,\overline{x+m:n}|}$

Λύση:

$$_{m|n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

$$A^{\;1}_{\overline{x:n}|} \cdot A_{1\,\overline{x+m:n}|} = \frac{\cancel{D_{x+m}}}{D_x} \cdot \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{\cancel{D_{x+m}}}$$

$\Longrightarrow$

$$_{m|n}A_x = A^{\;1}_{\overline{x:n}|} \cdot A_{1\,\overline{x+m:n}|}$$

γ) $_{m}A_x = A_x - A_{1\,\overline{x:m}|}$

Λύση:

$$_{m}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

$$A_x - A_{1\,\overline{x:m}|} = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x} = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

$\Longrightarrow$

$$_{m}A_x = A_x - A_{1\,\overline{x:m}|}$$

4) Να αποδειχθεί ότι η ποσότητα:

$$A_{x+t} \cdot A_{x:\overline{t}|} + (1 - A_{x+t})\, A^{1}_{x:\overline{t}|}$$

είναι ανεξάρτητη του t:

<u>Λύση:</u>

$$A_{x+t}\, A_{x:\overline{t}|} + (1 - A_{x+t})\, A^{1}_{x:\overline{t}|} =$$

$$= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} \left(\frac{D_{x+t}}{D_x} + \frac{M_x + M_{x+t}}{D_x} \right) + \left(1 - \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} \right) \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}$$

$$= \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} \cdot \frac{D_{x+t} + M_x - M_{x+t}}{D_x} + \frac{D_{x+t} - M_{x+t}}{D_{x+t}} \cdot \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}$$

$$= \frac{\cancel{M_{x+t} \cdot D_{x+t}} + \cancel{M_{x+t} M_x} - \cancel{(M_{x+t})^2} + M_x D_{x+t} - \cancel{M_{x+t} D_x} - \cancel{M_{x+t} M_x} + \cancel{(M_{x+t})^2}}{D_{x+t} \cdot D_x}$$

$$= \frac{M_x \cancel{D_{x+t}}}{\cancel{D_{x+t}} D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$ ανεξάρτητο του t

5) Μικτή Ασφάλιση: → Μετά απο 18 χρόνια να πάρει $2 \cdot 10^5$ €.
→ Εάν αποβιώσει στα 18 έτη θα πάρει 10^5 €
Επίσης, μια επιβίωσης για 60 έτη και θα πάρει $5 \cdot 10^5$ €. (νεογέννητο)
Ποιο είναι το ασφάλιστρο;

Λύση:

Έστω το ασφάλιστρο είναι $A = 2 \cdot 10^5 A_{\frac{1}{0:18|}} + 10^5 A^1_{\overline{0:18|}}$
$+ 5 \cdot 10^5 A_{\frac{1}{0:60|}} \cdots$

6) Να αποδειχθεί η σχέση:

$$A_{\overline{x:n|}} = A^1_{\overline{x:m|}} + \underbrace{u^m {}_mP_x}_{A_{\frac{1}{x:m|}}} \cdot A_{\overline{x+m:n-m|}}$$

Λύση:

$$A_{\overline{x:n|}} = A_{\frac{1}{x:n|}} + A^1_{\overline{x:n|}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$A^1_{\overline{x:m|}} + A_{\frac{1}{x:m|}} \cdot A_{\overline{x+m:n-m|}} = \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x} + \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot$$

$$\left[\frac{D_{x+m+n-m}}{D_{x+m}} + \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n-m}}{D_{x+m}}\right]$$

$$= \frac{M_x - \cancel{M_{x+m}}}{D_x} + \frac{D_{x+n} + \cancel{M_{x+m}} - M_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{D_{x+n} + M_{x+n} + M_x}{D_x}$$

Δευτέρα 10 Ιανουαρίου 2022

Προγράμματα Ασφαλίσεων Ζωής:

Άτομο ηλικίας x: Το ασφαλιστικό κεφάλαιο είναι 1 χ.μ.

1) Επιβίωσης n-ετών: $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = u^n \, {}_nP_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$

$u = \frac{1}{1+i}$, i: τεχνικό επιτόκιο

Συναρτήσεις Μετατροπής:

1) $D_x = u^x l_x$
2) $C_x = u^{x+1} d_x$ $\quad d_x = l_x - l_{x+1}$
3) $M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$

2) Αποβίωσης n-ετών: $A^1_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} \, {}_{k|}q_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$

3) Αποβίωσης ισόβιας: $A_x = \sum_{k=0}^{\infty} u^{k+1} \, {}_{k|}q_x = \frac{M_x}{D_x}$

4) Αναβαλλόμενη αποβίωσης ισόβιας n-ετών:

$${}_{m}A_x = \sum_{k=m}^{\infty} u^{k+1} \, {}_{k|}q_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

5) Αποβιώσεως αναβαλλόμενη περιορισμένη n-ετών:

$$_{m|n}A_x = \sum_{k=m}^{n-1} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x = \frac{M_{x+n} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

6) Μικτή Ασφάλιση: $A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\;1} + A^{1}_{x:\overline{n}|}$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

III Ασκήσεις:

1) Δίνεται $_{k|}q_x = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ $k=0,1,2$. Να δειχθεί:

α) $A_x = \dfrac{v}{2-v}$

β) $A^{1}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{v}{2-v}\left[1-\left(\frac{v}{2}\right)^{n}\right]$

Λύση:

α) $$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{v}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{1-\frac{v}{2}} =$$ (σειρά απείρων όρων γεωμετρικής προόδου)

$$= \frac{2}{2-v}$$

9) $\sum_{v=1}^{n} a = S_v = a_1 \frac{1-\lambda^v}{1-\lambda}$ (πεπερασμένο) $\qquad \sum_{v=0}^{\infty} = S_v = \frac{1}{1-\lambda}$

β) $A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{v}{2}\right)^{k+1} = \underbrace{\frac{v}{2} + \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v}{2}\right)^n}_{\text{άθροισμα } n \text{ γ. όρων}}$$

$$= \frac{v}{2} \frac{1-\left(\frac{v}{2}\right)^n}{1-\frac{v}{2}} = \frac{v}{2-v}\left[1-\left(\frac{v}{2}\right)^n\right]$$

γ) $A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} + A^{1}_{x:\overline{n}|} \overset{(β)}{=} v^n\, {}_nP_x + \frac{v}{2-v}\left[1-\left(\frac{v}{2}\right)^n\right]$

(*)

$${}_{k|}q_x = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= {}_{0|}q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - {}_1P_x \\
\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= {}_{1|}q_x = \frac{d_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} = {}_1P_x - {}_2P_x \\
&\vdots \\
\left(\frac{1}{2}\right)^n &= {}_{n-1|}q_x = \frac{d_{x+(n-1)}}{l_x} = \frac{l_{x+(n-1)} - l_{x+n}}{l_x} = {}_{n-1}P_x - {}_nP_x
\end{aligned}\right\} (+)$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - {}_nP_x \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - {}_nP_x = \boxed{{}_nP_x = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$(*) = \left(\frac{v}{2}\right)^n + \frac{v}{2-v} - \frac{v}{2-v}\left(\frac{v}{2}\right)^n = \frac{v}{2-v} + \left(\frac{v}{2}\right)^n \left[1 - \frac{v}{2-v}\right]$$

$$(*) = \frac{D_{x+t} N_x}{D_x \cdot D_{x+t}} = \frac{N_x}{D_x} = A_x$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{x:\overline{n}|} = \frac{v}{2-v} + \left(\frac{v}{2}\right)^n \frac{2(1-v)}{2 \cdot v}}$$

2) a) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$B = \frac{A_{x:\overline{t}|} - A_x}{1 - A_{x+t}}$$

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις μετατροπής

$$B = \frac{\frac{D_{x+t}}{D_x} + \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} - \frac{N_x}{D_x}}{1 - \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}} = \left(\frac{\frac{D_{x+t} - N_{x+t}}{D_x}}{\frac{D_{x+t} - N_{x+t}}{D_{x+t}}} \right)$$

$$= \frac{D_{x+t}}{D_x} = A_{x:\overline{n}|}^{1}$$

b) Να αποδείξετε $A_{x+t} \cdot A_{x:\overline{t}|} + (1 - A_{x+t}) A^{1}_{x:\overline{t}|} = A_x$

Θέτω: $A_{x+t} \cdot A_{x:\overline{t}|} + (1 - A_{x+t}) A^{1}_{x:\overline{t}|} = A$

$$A = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} \left[\frac{D_{x+t}}{D_x} + \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} \right] + \left(1 - \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} \right) \frac{D_{x+t} - N_{x+t}}{D_x}$$

$$\cdot \left(\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} \right) =$$

$$(*) = \frac{N_{x+t} D_{x+t} + N_{x+t} \cdot N_x - (N_{x+t})^2 + N_x D_{x+t} - N_{x+t} D_{x+t} \; (*)}{D_{x+t} D_x}$$

$(*) - N_{x+t} N_x + (N_{x+t})^2$

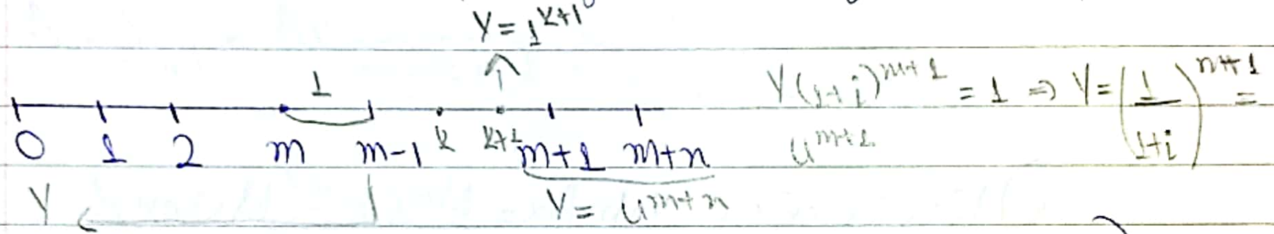
Πέμπτη 13 Ιανουαρίου 2022

Άσκηση:

α) Να δειχθεί ότι $\;{}_{m|n}A_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} u^{k+1}\, {}_{k|}q_x$

Λύση:

${}_{m|n}A_x$: Ασφάλιστρο για άτομο ηλικίας x. για ασφάλιση θανάτου αναβαλλόμενη για m έτη για τα επόμενα n έτη.



Η πληρωμή της 1 χ.μ. (ασφαλιστικό κεφάλαιο) πληρώνεται στο τέλος του έτους.

Ζητάω την παρούσα αξία που θα πληρώσει ο ασφαλισμένος.

Συνολική παρούσα αξία:

$$Y = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, m-1 \\ u^{k+1}, & k = m, m+1, \dots, m+n-1 \\ 0, & k = m+n, m+n+1, \dots \end{cases}$$

Ασφάλιστρο: $E(Y) = {}_{m|n}A_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} u^{k+1} P(k < T_x \le k+1) \Rightarrow$

$$\boxed{{}_{m|n}A_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} u^{k+1}\, {}_{k|}q_x}$$

Remember!

$D_x = v^x \cdot l_x$

$C_x = v^{x+1} d_x$

$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$

Άσκηση:

β) Να δειχθεί $_{m|n}A_x = \dfrac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$

Λύση:

Αποδείξαμε $_{m|n}A_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x$ (1)

Ισχύει: $A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$

$$(1) \Rightarrow {}_{m|n}A_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{m+n-1} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x - \sum_{k=0}^{m-1} v^{k+1}\, {}_{k|}q_x$$

$$= A^1_{x:\overline{m+n}|} - A^1_{x:\overline{m}|} = \frac{M_x - M_{x+m+n}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x}$$

$$= \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

Άσκηση

γ) Να δειχθεί $m|n A_x = A_{\substack{1 \\ x:\overline{m}|}} \cdot A_{1\,\overline{x+m:n}|}$

Λύση:

Αποδείξαμε $m|n A_x = \dfrac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$

Ασφ. Επιβίωσης ↑ Ασφ. Αποβίωσης ↑

$$A_{\substack{1 \\ x:\overline{m}|}} \cdot A_{1\,\overline{x+m:n}|} = \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_{x+m}}$$

$$= \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

Άσκηση

Για άτομο ηλικίας x: Έχω πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου $n=2$ (ισχύει για 2 χρόνια). Πληρώνεται στο τέλος του έτους και $i=0$ (ότι πάρει αυτά θα δώσει). Αν ισχύει $q_x = 0,5$, $Var(Y) = 0,1771$.

παρούσα αξία

Να βρεθεί το $q_{x+1} = ;$

Λύση:

Αφού $i=0$ τότε $v=\frac{1}{1+i}=1$ και

$$A_{1\,\overline{x:2|}}=\sum_{k=0}^{1} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x=\sum_{k=0}^{1} {}_{k|}q_x={}_{0|}q_x+{}_{1|}q_x$$

$$=q_x+{}_{1|}q_x$$

Άρα $A_{1\,\overline{x:2|}}=E(Y)=q_x+{}_{1|}q_x=0{,}5+{}_{1|}q_x$

Όμοια $E(Y^2)=\sum_{k=0}^{1}(v^2)^{k+1}\,{}_{k|}q_x=\sum_{k=0}^{1}{}_{k|}q_x$

$$=q_x+{}_{1|}q_x=0{,}5+{}_{1|}q_x$$

$$0{,}1771=Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=[0{,}5+{}_{1|}q_x]$$

$$-[0{,}5+{}_{1|}q_x]^2=[0{,}5+{}_{1|}q_x][1-0{,}5-{}_{1|}q_x]$$

$$=(0{,}5+{}_{1|}q_x)(0{,}5-{}_{1|}q_x)\Rightarrow 0{,}1771=0{,}5^2-{}_{1|}q_x^{\,2}\Rightarrow$$

$${}_{1|}q_x^{\,2}=0{,}25-0{,}1771 \Rightarrow {}_{1|}q_x^{\,2}=a$$

$${}_{1|}q_x=\frac{d_{x+1}}{l_x}=\frac{l_{x+1}-l_{x+2}}{l_x}=\frac{l_{x+1}-l_{x+2}}{l_x}\cdot\frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$=q_{x+1}\cdot p_x$$

$$=0{,}5\cdot q_{x+1}$$

$$q_x=\frac{d_x}{l_x}=\frac{l_x-l_{x+1}}{l_x}$$

Άρα $0{,}5\cdot q_{x+1}=a\Rightarrow q_{x+1}=\frac{a}{0{,}5}$

Άσκηση:

Να δειχθεί:

$$A_{\overline{x:n}|} = A_{1\,\overline{x:m}|} + A_{\overline{x:m}|}^{\;\;1} \cdot A_{\overline{x+m:n-m}|}$$

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x} + \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot$$

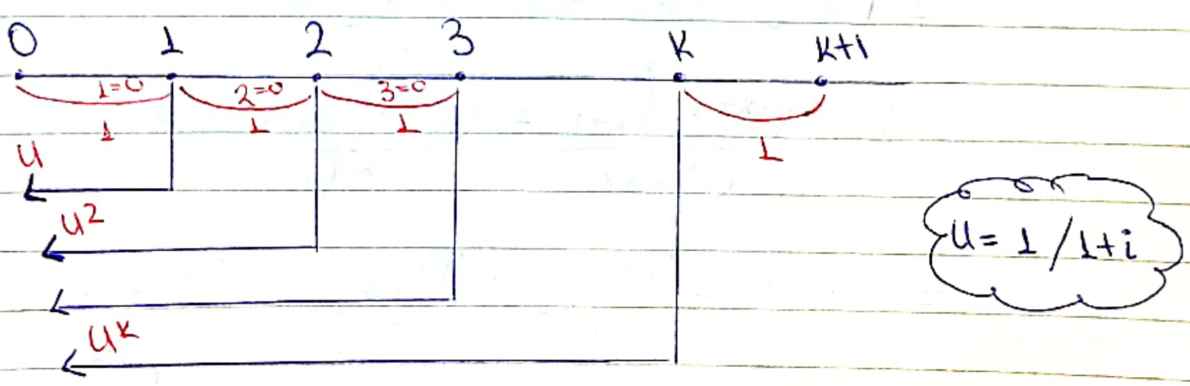
$$\left(\frac{D_{x+\cancel{m}+n-\cancel{m}}}{\cancel{D_{x+m}}} + \frac{M_{x+m} - M_{x+\cancel{m}+n-\cancel{m}}}{\cancel{D_{x+m}}}\right)$$

$$= \frac{M_x - \cancel{M_{x+m}} + D_{x+n} + \cancel{M_{x+m}} \; M_{x+n}}{D_x} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Δευτέρα 17 Ιανουαρίου 2022

- Ράντα: Ισαπέχουσες πληρωμές (χρονικά)
- Περίοδος: Το διάστημα μεταξύ δύο πληρωμών
- Ομοιόμορφη: Ίσες χρηματικές πληρωμές (1 χ.μ.)
- Προκαταβλητέα: Η πληρωμή στην αρχή της περιόδου $\ddot{a}_{\overline{k+1}|}$
- Ληξιπρόθεσμη: Η πληρωμή στο τέλος της περιόδου $a_{\overline{k+1}|}$
- Συνταξιοδοτικά Προγράμματα:

A) Ισόβια Ράντα Προκαταβλητέα



Άρα η ράντα σε k+1 έχει παρούσα αξία

$$\ddot{a}_{\overline{k+1}|} = 1 + u + u^2 + \dots + u^k$$

Το ασφάλιστρο

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} P(k \le T_x < k+1)$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \, {}_{k|}q_x$$

Συναρτήσεις Μετατροπής:

1) $D_x = v^x l_x$

2) $C_x = v^{x+1} d_x$

3) $M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$

4) $N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$

Διαφορετικά: Με ασφαλίσεις Επιβίωσης

$$A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = v^n \, {}_nP_x \qquad \left({}_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \right)$$

$$\ddot{a}_x = 1 + A_{x:\overline{1|}}^{\ \ 1} + A_{x:\overline{2|}}^{\ \ 1} + \dots + A_{x:\overline{3|}}^{\ \ 1} + \dots$$

$$= 1 + v \cdot {}_1P_x + v^2 \cdot {}_2P_x + v^3 \cdot P_x + \dots$$

$$= 1 + v \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2 \frac{l_{x+2}}{l_x} + v^3 \frac{l_{x+3}}{l_x}$$

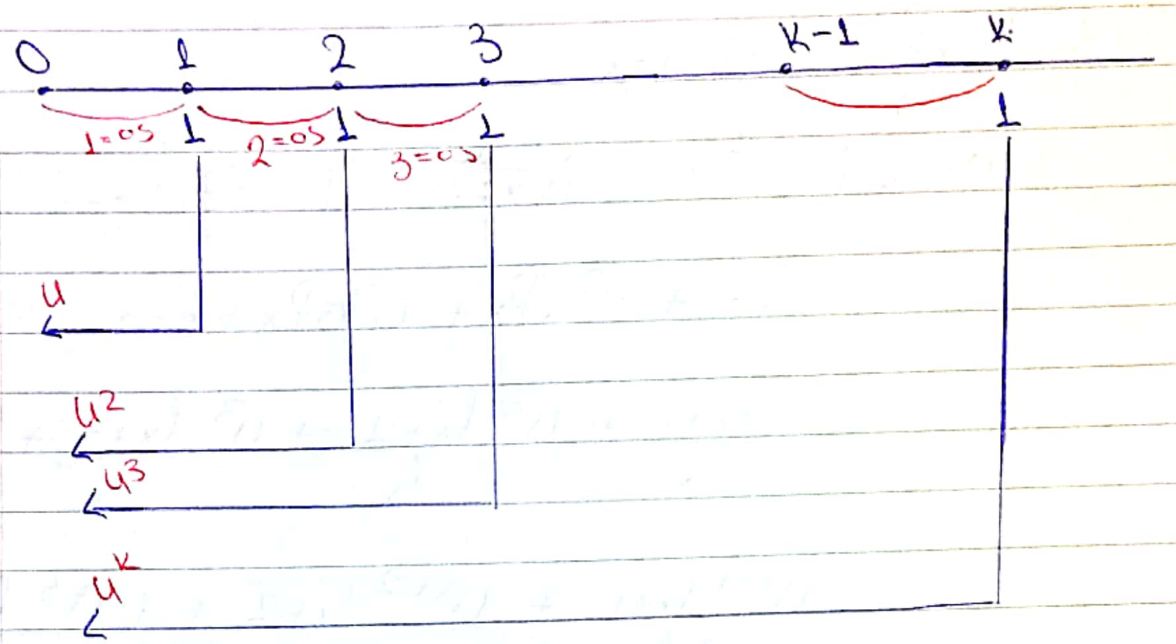
$$= 1 + \frac{v^{x+1} \cdot l_{x+1}}{v^x \cdot l_x} + \frac{v^{x+2} l_{x+2}}{v^x l_x} + \frac{v^{x+3} l_{x+3}}{v^x \cdot l_x}$$

$$= \frac{D_{x+0}}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \dots$$

$$= \frac{1}{D_x} \left[D_{x+0} + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots \right]$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}}{D_x} \Rightarrow \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

(Β) Ισόβια Ράντα Ληξιπρόθεσμη



Άρα η ράντα σε κ χρόνια έχει παρούσα αξία

$$a_{\overline{k}|} = u + u^2 + \dots + u^k$$

Το ασφάλιστρο

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{k}|} P(x \le T_x < x+1)$$

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{k}|}\, {}_{k|}q_x$$

Διαφορετικά: Με ασφαλίσεις Επιβίωσης

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = u^n \, {}_nP_x$$

$$a_x = A_{x:\overline{1}|}^{\;\;1} + A_{x:\overline{2}|}^{\;\;1} + A_{x:\overline{3}|}^{\;\;1} + \dots$$

$$= u \, {}_1P_x + u^2 \, {}_2P_x + u^3 \, {}_3P_x + \dots$$

$$= u \frac{l_{x+1}}{l_x} + u^2 \frac{l_{x+2}}{l_x} + u^3 \frac{l_{x+3}}{l_x} + \dots$$

$$= \frac{u^{x+1} l_{x+1}}{u^x l_x} + \frac{u^{x+2} l_{x+2}}{u^x l_x} + \frac{u^{x+3} l_{x+3}}{u^x l_x} + \dots$$

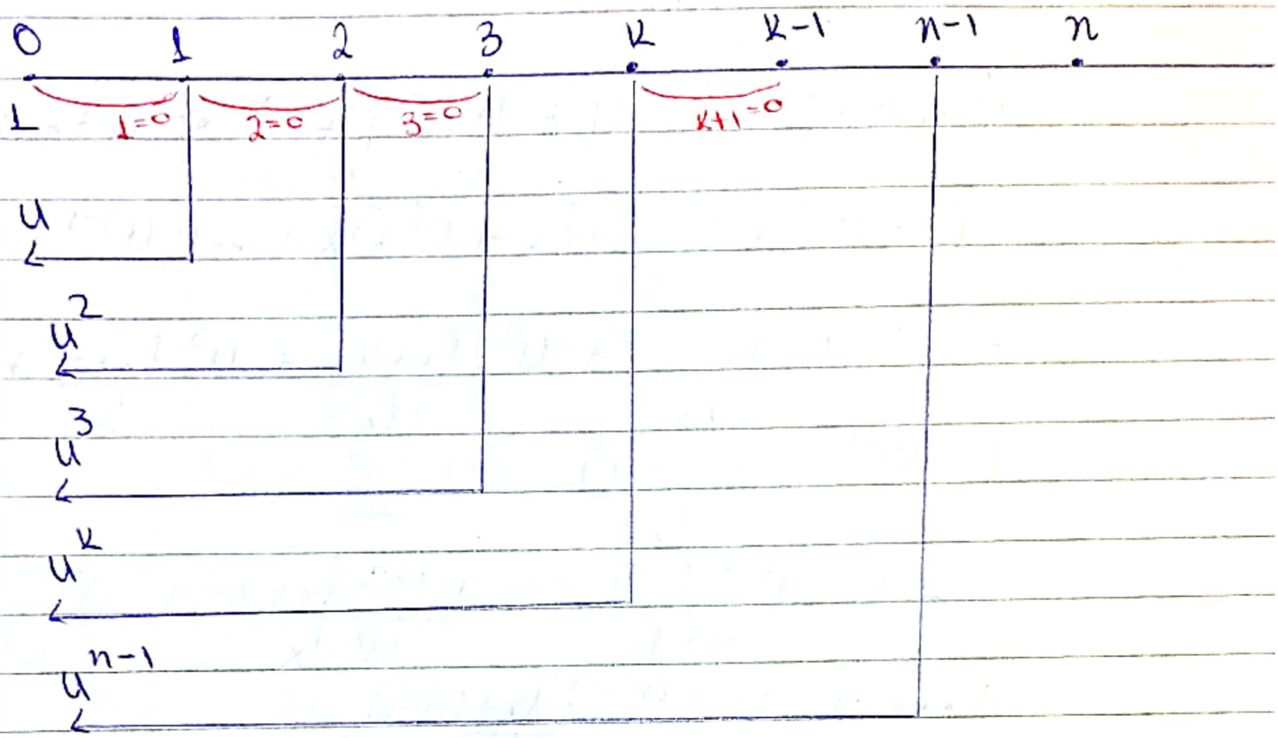
$$= \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \dots$$

$$= \frac{1}{D_x} \left[D_{x+1} + D_{x+2} + \dots \right]$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} D_{x+k}}{D_x} = \frac{\sum_{k-1=0}^{\infty} D_{x+1+(k-1)}}{D_x} \Rightarrow$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

(Γ) Περιορισμένης Διάρκειας n-ετών Προκαταβλητέα



Άρα η ράντα σε k+1 έτη έχει παρούσα αξία

$$\ddot{a}_{\overline{k+1|}} = 1 + u + u^2 + \dots + u^k$$

Το ασφάλιστρο

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \, P(k \le T_x < k+1)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{n=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{n+1|}} \; {}_{k|}q_x$$

Διαφορετικά, Με ασφαλίσεις Επιβίωσης

$${}_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$A_{\overset{1}{x:n|}} = u^n\,{}_nP_x$$

$$\ddot{a}_{x:n|} = 1 + A_{\overset{1}{x:1|}} + A_{\overset{1}{x:2|}} + A_{\overset{1}{x:3|}} + \dots + A_{\overset{1}{x:n-1|}}$$

$$= 1 + u\,{}_1P_x + u^2\,{}_2P_x + u^3\,{}_3P_x + \dots + u^{n-1}\,{}_{n-1}P_x$$

$$= 1 + u\frac{l_{x+1}}{l_x} + u^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + u^3\frac{l_{x+3}}{l_x} + \dots + u^{n-1}\frac{l_{x+(n-1)}}{l_x}$$

$$= 1 + \frac{u^{x+1}l_{x+1}}{u^x l_x} + \frac{u^{x+2}l_{x+2}}{u^x l_x} + \frac{u^{x+3}l_{x+3}}{u^x l_x} + \dots + \frac{u^{x+(n-1)}l_{x+(n-1)}}{u^x l_x}$$

$$= 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \dots + \frac{1}{D_x}\left[D_{x+0} + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{x+(n-1)}\right]$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} D_{x+k}}{D_x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} - \sum_{k=n}^{\infty} D_{x+k}}{D_x}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} - \sum_{\mu-n=0}^{\infty} D_{x+n+k-1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:n|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Πέμπτη 20 Ιανουαρίου 2022

Ράντες:

1) Ισόβια Προκαταβλητέα Ράντα:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \; {}_{k|}q_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{\overline{k+1|}} = 1 + u^1 + \dots + u^k$$

$$D_x = u^x \cdot l_x$$
$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$$

2) Ληξιπρόθεσμη Ισόβια Ράντα:

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{k|}} \; {}_{k|}q_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_{\overline{k|}} = u + u^2 + \dots + u^k$$

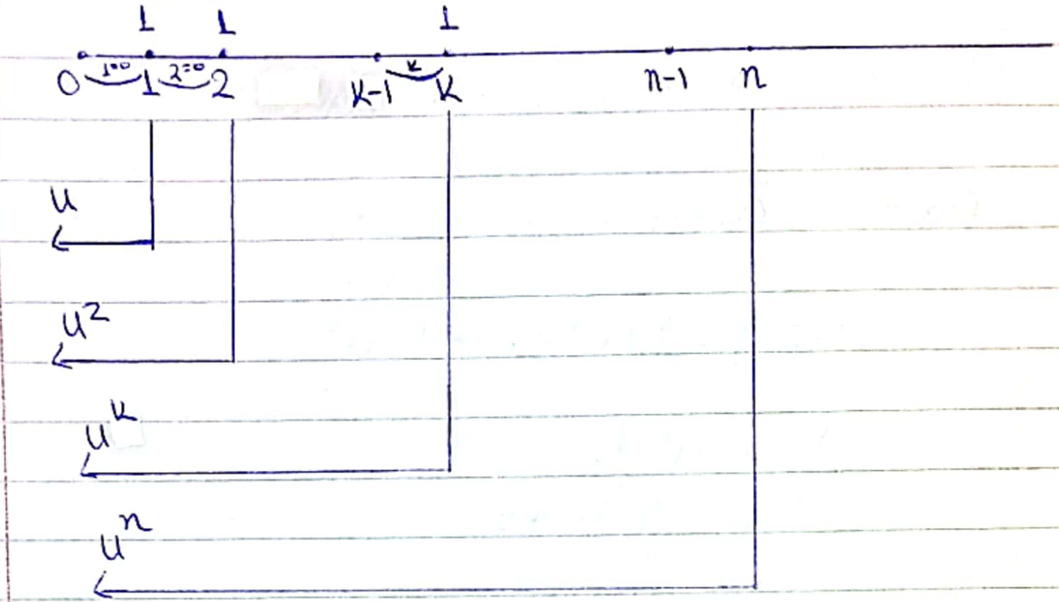
3) Περιορισμένης n-ετών:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \; {}_{k|}q_x = \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{\overline{k+1|}} = 1 + u^1 + \dots + u^k$$

$$D_x = u^x \cdot l_x$$
$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$$

Α) Περιορισμένη Διάρκειας n-ετών Ληξιπρόθεσμη:



Η ράντα κ-ετών θα έχει παρούσα αξία

$$a_{\overline{k|}} = u+u^2+\dots+u^k \quad , k=1,2,\dots,n$$

Το ασφάλιστρο

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} a_{\overline{k|}} \cdot P(k \le T_x < k+1) = \sum_{k=1}^{n} a_{\overline{k|}}\ {}_{k|}q_x$$

Με συναρτήσεις μετατροπής

$$D_x = u^x \cdot l_x$$
$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = A_{x:\overset{1}{\overline{1|}}} + A_{x:\overset{1}{\overline{2|}}} + \dots + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$$

$$= u\cdot{}_1p_x + u^2\cdot{}_2p_x + \dots + u^n\cdot{}_np_x$$
$$= u\cdot\frac{l_{x+1}}{l_x} + u^2\cdot\frac{l_{x+2}}{l_x} + \dots + u^n\frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$= \frac{u^{x+1} l_{x+1}}{u^x l_x} + \frac{u^{x+2} l_{x+2}}{u^x l_x} + \dots + \frac{u^{x+n} l_{x+n}}{u^x l_x}$$

$$= \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \dots + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} D_{x+k}}{D_x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_{x+k} - \sum_{k=n+1}^{n} D_{x+k}}{D_x}$$

$$= \frac{\sum_{k-1=0}^{\infty} D_{x+\underbrace{k-1}_{k'}+1} - \sum_{k-(n+1)=0} D_{x+(n+1)+\underbrace{k-(n+1)}_{k''}}}{D_x}$$

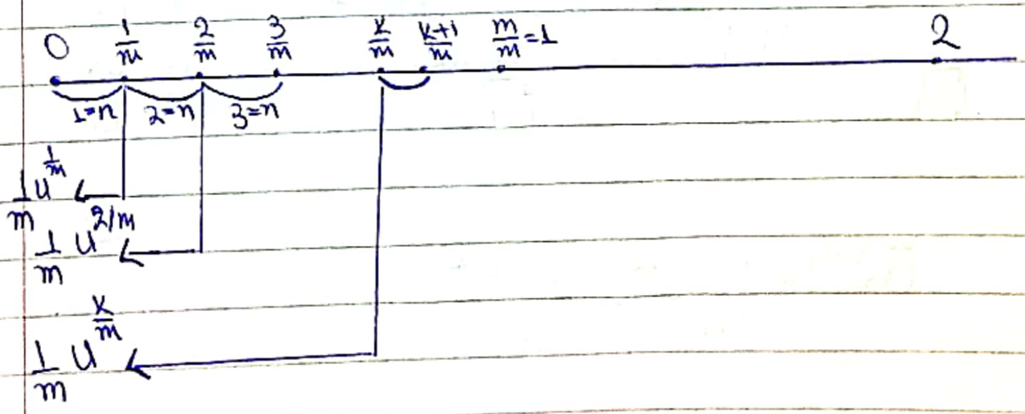
$$= \frac{\sum_{k'=0}^{\infty} D_{x+1+k'} - \sum_{k''=0}^{\infty} D_{x+(n+1)+k''}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

5) Κλασματικές Ράντες:

Κλασματική είναι μια ράντα όταν έχουμε m-πληρωμές σε μια χρονική περίοδο ίσες με $\frac{1}{m}$ χρηματικό ποσό.

Ισόβια Προκαταβλητέα Κλασματική Ράντα:

Συμβολισμός: $\ddot{a}_x^{(m)}$



Παρούσα αξία της ράντας είναι:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\cdot u^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{m}u^{\frac{2}{m}}+\dots\frac{1}{m}u^{\frac{m}{m}}+\dots$$

$$=\frac{1}{m}\left[1+u^{\frac{1}{m}}+u^{\frac{2}{m}}+\dots\right]=\frac{1}{m}\ddot{a}_{\overline{\frac{k+m}{m}}|}$$

Το ασφάλιστρο

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{\frac{k+1}{m}}|}P\left(\frac{k}{m}\le T_x<\frac{k+1}{m}\right)$$

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{\frac{k+1}{m}}|}\;{}_{\frac{k}{m}|}q_x}$$

Συναρτήσεις Μετατροπής

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m}A_{x:\overline{\frac{1}{m}}|}^{\;1}+\frac{1}{m}\,{}_{x:\overline{\frac{2}{m}}|}^{\;1}+\dots$$

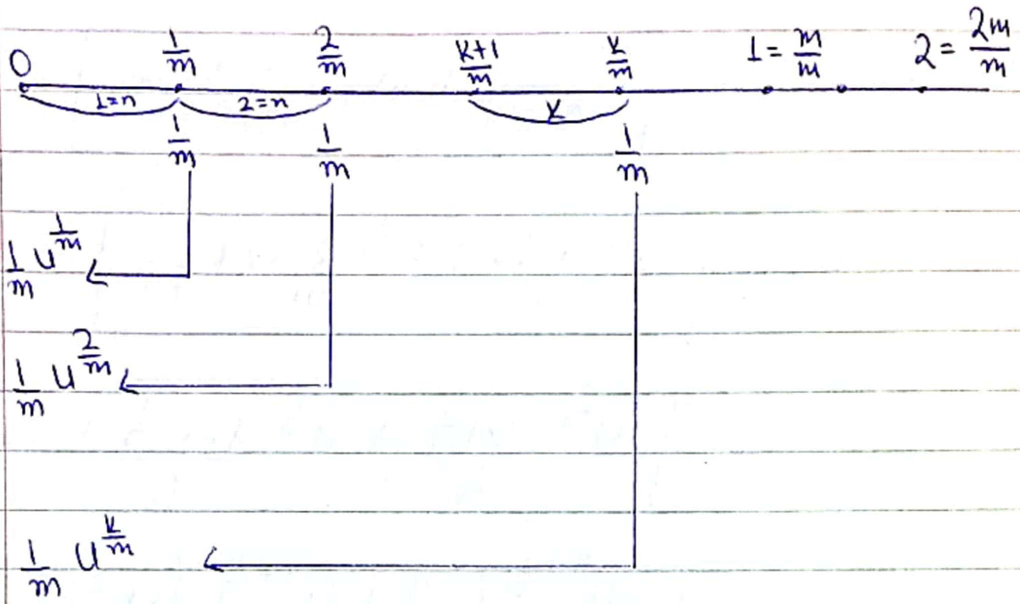
$$=\frac{1}{m}+\frac{1}{m}u^{\frac{1}{m}}\,{}_{\frac{1}{m}}p_x+\frac{1}{m}u^{\frac{2}{m}}\,{}_{\frac{2}{m}}p_x+\dots$$

$$=\frac{1}{m}\left[1+u^{\frac{1}{m}}\frac{l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x}+u^{\frac{2}{m}}\frac{l_{x+\frac{2}{m}}}{l_x}+\dots\right]$$

$$\frac{u^x l_x}{l_x}=\frac{1}{m}\left[1+\frac{u^{x+\frac{1}{m}}\cdot l_{x+\frac{1}{m}}}{u^x l_x}+\frac{u^{x+\frac{2}{m}}\,l_{x+\frac{2}{m}}}{u^x\,l_x}+\dots\right]$$

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\frac{1}{m}\,\frac{\sum_{k=0}^{\infty}D_{x+\frac{k}{m}}}{D_x}$$

Ισόβια Ληξιπρόθεσμη Κλασματική Ράντα:



Η παρούσα αξία της κλασματικής ράντας:

$$\frac{1}{m}\left[u^{\frac{1}{m}}+u^{\frac{2}{m}}+\dots+u^{\frac{k}{m}}+\dots\right]=\frac{1}{m}\,a_{\overline{\frac{k}{m}}|}$$

Ασφάλιστρο:

$$a_x^{(m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{\frac{k}{m}}|}\cdot P\left(\frac{k}{m}\le T_x<\frac{k+1}{m}\right)$$

$$\boxed{a_x^{(m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}|}q_x}$$

Με συναρτήσεις μετατροπής

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\left[A_{\frac{1}{x:\frac{1}{m}|}} + A_{\frac{1}{x:\frac{2}{m}|}} + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[u^{\frac{1}{m}}\ {}_{\frac{1}{m}}p_x + u^{\frac{2}{m}}\ {}_{\frac{2}{m}}p_x + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[u^{\frac{1}{m}}\frac{l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x} + u^{\frac{2}{m}}\frac{l_{x+\frac{2}{m}}}{l_x} + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[\frac{u^{x+\frac{1}{m}} l_{x+\frac{1}{m}} + u^{x+\frac{2}{m}} l_{x+\frac{2}{m}} + \dots}{u^x l_x}\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[\frac{D_{x+\frac{1}{m}} + D_{x+\frac{2}{m}} + \dots}{D_x}\right]$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\,\frac{\sum_{k=1}^{\infty} D_{x+\frac{k}{m}}}{D_x}$$