ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α′ ΕΞΑΜΗΝΟ
2η ενότητα
ΡΑΝΤΕΣ-ΔΑΝΕΙΑ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

1. Αν έχουμε χρονική διάρκεια $[0,T]$, τότε η παρούσα αξία μίας μονάδας πληρωτέας κατά τη χρονική στιγμή $s<T$ αν ο τραπεζικός λογαριασμός είναι συνεχούς ανατοκισμού με ετήσιο επιτόκιο i είναι e^{-si}.
2. Αν η χρονική διάρκεια χωριστεί σε δύο υποδιαστήματα από τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{2}$ η οποία είναι στιγμή ανατοκισμού και έστω $s<T$ η στιγμή στην οποία καταβάλλεται η χρηματική μονάδα, τότε η παρούσα αξία μίας μονάδας πληρωτέας κατά τη χρονική στιγμή s είναι $\frac{1}{(1+\frac{Ti}{2})(1+(s-\frac{T}{2})i)}$. Αναλόγως μπορούμε να εργαστούμε και στις άλλες περιπτώσεις.
3. Μια χρηματοροή αναπαρίσταται πλήρως από τις πληρωμές της $X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}$, όπου $X_{t_j} \in \mathbb{R}$, $j=1,2,...,n$ και $0=t_0 \leq t_1 < ... < t_n \leq T$, μία επιλογή σημείων του χρονικού διαστήματος $[0,T]$ στο οποίο πραγματοποιούνται οι πληρωμές. Θετική πληρωμή σημαίνει καταβολή χρημάτων, αρνητική πληρωμή σημαίνει είσπραξη ή αποταμίευση από την πλευρά ενός καταθέτη. Από την πλευρά ενός επενδυτή, αρνητική πληρωμή σημαίνει ζημία, ενώ θετική πληρωμή σημαίνει κέρδος κατά την αντίστοιχη χρονική στιγμή.
4. Μια χρηματοροή με τις παραπάνω πληρωμές αναπαρίσταται πλήρως από το διάνυσμα $X=(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$.
5. Ως προς τον τραπεζικό λογαριασμό που χρησιμοποιούμε, η παρούσα αξία μιας χρηματοροής συμβολίζεται με $PV(X)$.
6. Δύο χρηματοροές X,Y είναι συγκρίσιμες ως προς τον ίδιο πάντοτε τραπεζικό λογαριασμό ή σε έναν ισοδύναμο.
7. Αυτό σημαίνει ότι δύο χρηματοροές μπορούν να συγκριθούν αν αναχθούν σε έναν κοινό τραπεζικό λογαριασμό, υπαρκτό ή υποθετικό.
8. Αν για παράδειγμα η μία χρηματοροή αναφέρεται σε λογαριασμό ενός είδους ανατοκισμού και η άλλη σε ενός άλλου, τότε χρησιμοποιούμε για την αναγωγή στον ένα ή στον άλλο τα αντίστοιχα **γενικευμένα πραγματικά επιτόκια-Γ.Π.Ε**.
9. Γενικευμένο πραγματικό επιτόκιο είναι το ετήσιο επιτόκιο ενός τραπεζικού λογαριασμού που έχει το ίδιο αποτέλεσμα κεφαλαιοποίησης με έναν άλλο. Αυτή είναι η περίπτση της χρήσης ενός υποθετικού λογαριασμού με επιτόκιο το Γ.Π.Ε.
10. Μια άλλη περίπτωση είναι οι χρηματοροές σε διαφορετικά νομίσματα, όπου εκεί η αναγωγή γίνεται βάσει της συναλλαγματικής ισοτιμίας. Για συναλλαγματικές ισοτιμίες θα μιλήσουμε σε επόμενη ενότητα.
11. Αν ένα άτομο εισπράττει χρήματα, τότε η χρηματοροή X είναι προτιμότερη από την Y ως προς τον ίδιο τραπεζικό λογαριασμό (οι πληρωμές της Y έχουν εν γένει διαφορετικό ύψος και διαφορετικές στιγμές καταβολής) και θα συμβολίζουμε $X \succeq Y$ αν και μόνο αν $PV(X) \geq PV(Y)$.
12. Η X είναι γνησίως προτιμότερη από την Y ως προς τον ίδιο τραπεζικό λογαριασμό (οι πληρωμές της Y έχουν εν γένει διαφορετικό ύψος και διαφορετικές στιγμές καταβολής) και θα συμβολίζουμε $X \succeq Y$ αν και μόνο αν $PV(X) > PV(Y)$.

13. Αν ένα άτομο καταβάλλει χρήματα, τότε η χρηματοροή X είναι προτιμότερη από την Y ως προς τον ίδιο τραπεζικό λογαριασμό (οι πληρωμές της Y έχουν εν γένει διαφορετικό ύψος και διαφορετικές στιγμές καταβολής) και θα συμβολίζουμε $X \succeq Y$ αν και μόνο αν $PV(X) \leq PV(Y)$.

14. Η X είναι γνησίως προτιμότερη από την Y ως προς τον ίδιο τραπεζικό λογαριασμό (οι πληρωμές της Y έχουν εν γένει διαφορετικό ύψος και διαφορετικές στιγμές καταβολής) και θα συμβολίζουμε $X \succeq Y$ αν και μόνο αν $PV(X) < PV(Y)$.

15. Και στις δύο περιπτώσεις οι X, Y ονομάζονται αδιάφορες ως προς τον ίδιο τραπεζικό λογαριασμό και θα συμβολίζουμε $X \sim Y$ αν και μόνο αν $PV(X) = PV(Y)$.

16. Οι χρηματοροές ονομάζονται και **ράντες**.

17. Υποθέτουμε ότι η χρονική διάρκεια των συναλλαγών μας αποτελείται από n έτη. Έστω i το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο και μία χρηματοροή αποτελούμενη από 1 χρηματική μονάδα η οποία καταβάλλεται στο τέλος κάθε έτους. Αυτή η χρηματοροή ονομάζεται **ληξιπρόθεσμη ράντα** n όρων ονομαστικού επιτοκίου i, δηλαδή κατά τις χρονικές στιγμές $1, 2, ..., n$.

18. Υποθέτουμε ότι η χρονική διάρκεια των συναλλαγών μας αποτελείται επίσης από n έτη. Έστω i το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο και μία χρηματοροή αποτελούμενη από 1 χρηματική μονάδα η οποία καταβάλλεται στην αρχή κάθε έτους, δηλαδή κατά τις χρονικές στιγμές $0, 1, ..., n-1$. Αυτή η χρηματοροή ονομάζεται **προκαταβλητέα ράντα** n όρων ονομαστικού επιτοκίου i.

19. Η παρούσα αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων ονομαστικού επιτοκίου i την περίοδο 0 είναι ίση με

$$a(n,i) = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^n} =$$

$$= \frac{1}{(1+i)} \cdot (\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{1 - \frac{1}{1+i}}) = \frac{1}{i} \cdot (1 - \frac{1}{(1+i)^n}).$$

20. Η παρούσα αξία της προκαταβλητέας ράντας n όρων ονομαστικού επιτοκίου i την περίοδο 0 είναι ίση με

$$A(n,i) = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{1 - \frac{1}{1+i}}.$$

21. Αν υποθέσουμε ότι η χρηματοροή έχει άπειρους όρους, τότε

$$a(\infty, i) = \lim_{n \to \infty} a(n,i) = \frac{1}{i},$$

$$A(\infty, i) = \lim_{n \to \infty} A(n,i) = \frac{1+i}{i},$$

το οποίο είναι αναμενόμενο, δηλαδή η παρούσα αξία της προκαταβλητέας ράντας απείρων όρων να είναι μεγαλύτερη από την παρούσα αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας απείρων όρων.

22. Στην περίπτωση μιας συνεχούς ράντας διάρκειας $[0, T]$ και ετήσιου ονομαστικού επιτοκίου i κάθε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$ καταβάλλεται μία χρηματική μονάδα της οποίας η παρούσα αξία την περίοδο 0 είναι e^{-it}. Η συνολική παρούσα αξία που αποτελεί και την παρούσα αξία της συνεχούς ράντας είναι ίση με

$$c(T,i) = \int_0^T e^{-it} dt = \frac{1 - e^{-iT}}{i}.$$

Παρατηρούμε ότι παρομοίως αν $T \to \infty$ τότε $\lim_{T \to \infty} c(T,i) = \frac{1}{i}$.

23. Αν σε κάθε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$ καταβάλλεται κεφάλαιο $C(t)$ τότε η παρούσα αξία της συνεχούς ράντας αυθαίρετης καταβολής είναι ίση με

$$\int_0^T e^{-it} C(t) dt.$$

Αν υποθέσουμε ότι η διάρκεια καταβολής του χρηματικού ποσού $C(t)$ για κάθε t τείνει στο άπειρο, δηλαδή $T \to \infty$, τότε η παρούσα αξία της συνεχούς ράντας αυθαίρετης καταβολής είναι

$$\int_0^{+\infty} e^{-it} C(t) dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{-it} C(t) dt.$$

24. Στην παραπάνω σχέση για διαφορετική τιμή του i λαμβάνετε και διαφορετικό ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-it} C(t) dt$. Η συνάρτηση $\mathcal{L}(C)(i)$ που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο, είναι γνωστή ως **μετασχηματισμός Laplace** της C.

25. Για παράδειγμα, αν $C(t) = t^k, k = 1, 2, ...$ τότε $\mathcal{L}(C)(i) = \frac{\Gamma(1+k)}{i^{k+1}}$, όπου $\Gamma(s) = (s-1)!$ για φυσικούς $s = 1, 2, ...$ και $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = \lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-t} t^{s-1} dt$ για $s \in \mathbb{R}$.

26. Σε τι χρησιμεύουν όμως οι ράντες ; Μία πρώτη απάντηση είναι ότι χρησιμεύουν στην αποπληρωμή **δανείων**. Βάσει των παραπάνω σχέσεων μπορούμε να υπολογίσουμε την ετήσια για παράδειγμα δόση εξόφλησης ενός δανείου -αντίστοιχα τη μηνιαία, υπολογίζοντας το μηνιαίο ονομαστικό επιτόκιο. Αν για παράδειγμα ένας δανειολήπτης έχει να αποπληρώσει δάνειο A ευρώ μετά από n έτη καταβάλλοντας ισόποσες ετήσιες δόσεις σε N έτη και το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι i, τότε η ετήσια δόση L υπολογίζεται από τη σχέση

$$L \cdot a(n, i) = A,$$

αν η δόση καταβάλλεται στη λήξη του έτους, ενώ είναι

$$L \cdot A(n, i) = A,$$

αν η δόση καταβάλλεται στην αρχή του έτους.

27. Αν αντίστοιχα για το δανειζόμενο κεφάλαιο A υπολογίζεται ο τόκος στο τέλος της χρονικής περιόδου των n ετών, τότε η ετήσια δόση L υπολογίζεται από τη σχέση

$$L \cdot a(n, i) = A(1 + ni),$$

αν η δόση καταβάλλεται στη λήξη του έτους, ενώ είναι

$$L \cdot A(n, i) = A(1 + ni),$$

αν η δόση καταβάλλεται στην αρχή του έτους.

28. Για δάνεια που χορηγούνται για πολύ μεγάλη χρονική περίοδο (π.χ. εφ΄ όρου ζωής), αν το δανειζόμενο κεφάλαιο είναι A ευρώ, τότε χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της ετήσιας δόσης προσεγγιστικά οι σχέσεις

$$L \cdot a(\infty, i) = A$$

αν η δόση καταβάλλεται στη λήξη του έτους και

$$L \cdot A(\infty, i) = A,$$

αν η δόση καταβάλλεται στην αρχή του έτους.

29. Αν τα επιτόκια διαφοροποιούνται και επιθυμούμε να έχουμε μία ενιαία δόση αποπληρωμής L, τότε ισχύουν τα εξής: Έστω i_1 ετήσιο επιτόκιο για τα έτη 1 έως n_1, i_2 για τα έτη $n_1 + 1$ έως n_2, κ.ο.κ. i_k για τα έτη από $n_{k-1} + 1$ έως n_k. Τότε οι αντίστοιχες σχέσεις είναι

$$L \cdot a(n_1, i_1) + L \cdot a(n_2 - n_1, i_2) \cdot \frac{1}{(1 + i_2)^{n_1}} + ... + L \cdot a(n_k - n_{k-1}, i_k) \cdot \frac{1}{(1 + i_k)^{n_{k-1}}} = A \cdot (1 + n_k i),$$

αν η δόση καταβάλλεται στο τέλος κάθε έτους.

30. Αν η εξόφληση είναι με προκαταβλητέες δόσεις, τότε χρησιμοποιούνται οι αντίστοιχες παρούσες αξίες των προκαταβλητέων χρηματοροών.

31. Βάζουμε στο δεύτερο μέλος το τρέχον επιτόκο i_1 τη χρονική στιγμή 0 με το οποίο γίνεται ο υπολογισμός του συνολικού τόκου επί του αρχικού ποσού. Στις ίδιες σχέσεις αντικαθιστούμε με A αν δεν υπολογίζεται τόκος επί του αρχικού κεφαλαίου την ημερομηνία σύναψης της δανειακής σύμβασης.

32. Τα διαφορετικά επιτόκια εκφράζουν μια χρονική διάρθρωση των επιτοκίων έτσι όπως τίθεται από την τράπεζα, σχετικά με την αποπληρωμή του δανείου. Σχετίζονται με τα τρέχοντα επιτόκια στη διατραπεζική αγορά όπως αυτά εκτιμώνται ότι θα διαμοφωθούν στο μέλλον όπως επίσης και τα οφέλη της τράπεζας από τη σύναψη του δανείου.

33. Τα σχήματα αποπληρωμής των δανείων είναι συνέπεια της αδιαφορίας μεταξύ χρηματοροών, ή αλλιώς της οικονομικής ισοδυναμίας μεταξύ τους βάσει του κριτηρίου της παρούσας αξίας.

34. Ο υπολογισμός της δόσης είναι σημαντικό στοιχείο ενός δανείου γιατί επιτρέπει την κατάρτιση του **πινακίου του δανείου**. Το πινάκιο του δανείου δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας πίνακας που δίνει το δανειζόμενο κεφάλαιο μαζί με τους τόκους -συνολικά δηλαδή το ποσό που πρέπει να αποπληρώσει ο δανειζόμενος - ενώ επιπλέον αναφέρει την ενδεχόμενη αρχική προκαταβολή και τη δόση του που πρέπει να καταβάλλει κάθε έτος (κάθε συμφωνημένη χρονική περίοδο καταβολής) ο δανειζόμενος. Επιπλέον περιέχει ημερολογιακές καταγραφές με τις καταβαλλόμενες δόσεις και αναγράφει το υπό εξόφληση κεφάλαιο μετά από την καταβολή κάθε δόσης.

35. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε να καταρτίσουμε το πινάκιο ενός δανείου ενός ποσού A που εισπράττεται σήμερα από την τράπεζα. Υποθέτουμε ότι η καταβολή της ενιαίας δόσης αρχίζει στη λήξη του πρώτου έτους -περιόδου καταβολής. Δηλαδή η ετήσια δόση προκύπτει από τη σχέση

$$L \cdot a(n, i) = A.$$

Φτιάχνουμε έναν πίνακα με πέντε στήλες και με γραμμές όσες και οι περίοδοι καταβολής των δόσεων συν τη σημερινή που συνάπτεται το δάνειο. Αριθμούμε τις περιόδους με φυσικούς αριθμούς ξεκινώντας από το 0 που είναι η περίοδος σύναψης του δανείου. Η πρώτη στήλη έχει τίτλο Περίοδος, η δεύτερη Πληρωμή, η τρίτη Τόκος, η τέταρτη Χρεωλύσιο, η πέμπτη Ανεξόφλητο Υπόλοιπο. Στην πρώτη βάζουμε τις περιόδους σε μορφή γραμμών. Σε κάθε περίοδο αναφέρουμε τη δόση που πληρώνουμε, στην τρίτη τον ετήσιο τόκο του ποσού δανειζόμενου ποσού με το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο i, στην τέταρτη το ποσό του χρεωλυσίου κάθε περιόδου και στην τελευταία στήλη το υπόλοιπο κάθε περιόδου. Ο ετήσιος τόκος υπολογίζεται κάθε φορά επί του υπολοίπου του δανείου. Το χρεωλύσιο κάθε περιόδου είναι η δόση μείον τον τόκο, δηλαδή το ποσό που αφαιρείται από το υπόλοιπο της τρέχουσας περιόδου, για να σχηματιστεί το νέο υπόλοιπο. Την τελευταία περίοδο το υπόλοιπο είναι μηδέν.

36. Τέτοιου τύπου πινάκια στέλνουν πλέον μηχανογραφημένα οι τράπεζες στου δανειολήπτες τους. Αν R_k είναι το υπόλοιπο του πινακίου τη χρονική περίοδο k, τότε το χρεωλύσιο της k-οστής περιόδου είναι

$$X_k = L - iR_k.$$

Επίσης είναι $R_0 = A$ αν υποθέσουμε ότι οι δόσεις καταβάλλονται στο τέλος κάθε έτους. Το υπόλοιπο της $k+1$-οστής περιόδου θα δίνεται τότε από την αναδρομική σχέση

$$R_k = R_{k-1} - X_{k-1} = R_{k-1} - L + iR_{k-1} = (1+i)R_{k-1} - L = (1+i)R_{k-1} - \frac{A}{a(n,i)},$$

για $k = 1, 2, ..., n$.

37. Μπορούμε να προγραμματίσουμε επομένως έναν αλγόριθμο, τέτοιο ώστε αν μας δοθούν τα στοιχεία του δανείου να ενημερώνει και να τυπώνει το πινάκιο του δανείου (ΑΣΚΗΣΗ).

38. (Θεώρημα εξόφλησης) Το παραπάνω αναδρομικό σχήμα τοκοχρεωλυτικών δόσεων εξοφλεί το δάνειο ύψους A.
Απόδειξη : Πρέπει να δείξουμε ότι $R_n = 0$. Είναι $R_k - R_{k-1} = L - iR_{k-1}, k = 1, 2, ..., n$ από το αναδρομικό σχήμα, με $R_0 = A$. Θεωρώ τη γεννήτρια συνάρτηση $G(t) = \sum_{k=0}^{n} R_k t^k$. Φέρνω όλους τους όρους στο πρώτο μέλος. Προκύπτει $R_k - (1+i)R_{k-1} + L = 0$. Πολλαπλασιάζουμε με t^k και αθροίζουμε καταλλήλως.

Δηλαδή $\sum_{k=1}^n R_k t^k - (1+i)\sum_{k=1}^n R_{k-1}t^k + \sum_{k=1}^n Lt^k = 0$. Το πρώτο άθροισμα είναι $G(t)-A$. Το δεύτερο είναι $(1+i)t(G(t)-R_n t^{n-1})$. Το τρίτο είναι $Lt\frac{t^n-1}{t-1}$. Δηλαδή $\frac{G(t)-A}{t}-(1+i)(G(t)-A)+L\frac{t^n-1}{t-1}=0$. Από τη σχέση αυτή, βρίσκουμε τη γεννήτρια συνάρτηση G. Οι παράγωγοι της G στο 0 δίνουν τα ανεξόφλητα υπόλοιπα, δηλαδή $\frac{G^{(k)}(0)}{k!}=R_k, k=1,2,...,n$. Απομένει να δείξουμε ότι $R_n=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί η ενιαία δόση δανείου 10000 που αποπληρώνεται σε ετήσιες ληξιπρόθεσμες δόσεις, αν το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι $i=0.04$ και η διάρκεια αποπληρωμής είναι 6 χρόνια. Να καταρτιστεί το σχετικό πινάκιο.

2. Να βρεθεί η ενιαία δόση δανείου 20000 που αποπληρώνεται σε ετήσιες προκαταβλητέες δόσεις, αν το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι $i=0.05$ και η διάρκεια αποπληρωμής είναι 5 χρόνια. Να καταρτιστεί το σχετικό πινάκιο.

3. Να βρεθεί η ενιαία δόση δανείου κυμαινόμενου επιτοκίου 10000 που αποπληρώνεται σε ετήσιες ληξιπρόθεσμες δόσεις, αν το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο τα τρία πρώτα χρόνια είναι $i=0.03$ και τα τρία τελευταία είναι $i=0.06$, ενώ η διάρκεια αποπληρωμής είναι 6 χρόνια. Να καταρτιστεί το σχετικό πινάκιο.

4. Αν ο δανειοπλήπτης του πρώτου δανείου δεν πληρώσει τις δύο πρώτες δόσεις του και αυτό γίνει δεκτό από την τράπεζα (περίοδος χάριτος), βρείτε ένα σχήμα δόσεων (όχι απαραίτητα ίσων) ώστε το δάνειο να εξοφληθεί στην προβλεπόμενη περίοδο. Για διευκόλυνση χρησιμοποιήστε το πινάκιο δανείου.

5. Βρείτε την ενιαία δόση αποπληρωμής δανείου 2500 που αποπληρώνεται σε μηνιαίες ληξιπρόθεσμες δόσεις, αν το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι $i=0.05$ και η διάρκεια αποπληρωμής 2 χρόνια.

Λύσεις των ασκήσεων

- Άσκηση 1. Είναι $a(6,0.04)=5.2421$ η παρούσα αξία της αντίστοιχης ληξιπρόθεσμης ράντας μίας νομισματικής μονάδας. Για το πινάκιο δανείου έχουμε ότι η ενιαία δόση αποπληρωμής είναι περίπου $1907.6324=\frac{10000}{5.2421}$ ευρώ. Είναι $R_0=10000$ και οι τόκοι του πρώτου έτους είναι $400=iR_0$. Άρα το πρώτο τοκοχρεωλύσιο είναι $X_1=1507.6324$, ενώ το πρώτο ανεξόφλητο υπόλοιπο είναι $R_1=8492.3676$. Οι τόκοι στο τέλος του δευτέρου έτους είναι $399.694=iR_1$ και άρα το δεύτερο τοκοχρεωλύσιο είναι $X_2=1567.937$, ενώ το δεύτερο υπόλοιπο είναι $R_2=6924.4299$. Οι τόκοι στο τέλος του τρίτου έτους είναι $276.977=iR_2$ και άρα το τρίτο τοκοχρεωλύσιο είναι $X_3=1630.6552$, ενώ το τρίτο υπόλοιπο είναι $R_3=5293.7746$. Οι τόκοι στο τέλος του τετάρτου έτους είναι $211.750=iR_3$ και άρα το τετάρτου τοκοχρεωλύσιο είναι $X_4=1695.8814$, ενώ το τέταρτο υπόλοιπο είναι $R_4=3597.8931$. Οι τόκοι στο τέλος του πέμπτου έτους είναι $143.95=iR_4$ και άρα το πέμπτο τοκοχρεωλύσιο είναι $X_5=1763.7166$, ενώ το πέμπτο υπόλοιπο είναι $R_5=1834.1764$. Οι τόκοι στο τέλος του έκτου έτους είναι $73.3670=iR_5$ και άρα το έκτο τοκοχρεωλύσιο είναι $X_6=1834.2653$, ενώ το έκτο υπόλοιπο είναι περίπου 0 και η διαφορά οφείλεται στα δεκαδικά ψηφία.

- Άσκηση 2. Είναι $A(5,0.05)=4.5459$ η παρούσα αξία της αντίστοιχης προκαταβλετέας ράντας μίας νομισματικής μονάδας. Για το πινάκιο δανείου έχουμε ότι η ενιαία δόση αποπληρωμής είναι περίπου $4399.5664=\frac{20000}{4.5459}$ ευρώ. Είναι $R_0=20000-4399.5664=15600.4335$ και οι τόκοι του πρώτου έτους είναι 0, ενώ η πρώτη δόση καταβάλλεται με τη σύναψη του δανείου. Οι τόκοι στο τέλος του πρώτου έτους είναι $780.0216=iR_0$ και άρα το δεύτερο τοκοχρεωλύσιο είναι $X_1=3619.5447$, ενώ το δεύτερο υπόλοιπο είναι $R_1=11980.8887$. Οι τόκοι στο τέλος του δευτέρου έτους είναι $599.0444=iR_1$ και άρα το τρίτο τοκοχρεωλύσιο είναι $X_2=3800.5219$, ενώ το τρίτο υπόλοιπο είναι $R_2=8180.3667$. Οι τόκοι στο τέλος του τρίτου έτους είναι $409.0183=iR_2$ και άρα το τέταρτο τοκοχρεωλύσιο είναι $X_3=3990.5480$, ενώ το τέταρτο υπόλοιπο είναι $R_3=4189.8186$. Οι τόκοι στο τέλος του τετάρτου έτους είναι $209.4909=iR_3$ και άρα το πέμπτο τοκοχρεωλύσιο είναι $X_4=4190.0754$, ενώ το πέμπτο υπόλοιπο είναι είναι περίπου 0 και η διαφορά οφείλεται στα δεκαδικά ψηφία.

- Άσκηση 4. Αν ο δανειολήπτης δεν καταβάλλει κανένα ποσό κατά τα δύο πρώτα έτη, το ανεξόφλητο ποσό τοκίζεται κατά τα έτη αυτά και το τελικό ανεξόφλητο υπόλοιπο μετά το πέρας των δύο πρώτων ετών είναι 10816 ευρώ. Αν ο δανειολήπτης αποφασίσει να καταβάλλει μια δόση 5000 ευρώ στο τέλος του τρίτου έτους, τότε οι τόκοι στο τέλος του τρίτου έτους είναι 432.64 ευρώ και το τοκοχρεωλύσιο $X_3=4567.36$ ευρώ. Άρα το ανεξόφλητο υπόλοιπο είναι $R_3=6248.64$ ευρώ. Ο δανειολήπτης καταβάλλει στο τέλος του τετάρτου έτους 3000 ευρώ. Οι τόκοι είναι $iR_3=249.9456$ και το αντίστοιχο τοκοχρεωλύσιο είναι $X_4=2750.0544$ ευρώ. Το ανεξόφλητο υπόλοιπο είναι $R_4=3498.5856$ ευρώ. Κατά το τέλος του πέμπτου έτους καταβάλλεται μια δόση 3500 ακόμη από το δανειολήπτη. Οι τόκοι είναι $iR_5 = 139.9434$, το τοκοχρεωλύσιο $X_5 = 3360.0565$ και το υπόλοιπο $R_5 = 138.529024$. Οι τόκοι του έκτου έτους είναι $iR_6 = 5.5411$, άρα η δόση που απαιτείται για να εξοφληθεί το δάνειο είναι περίπου 144.070 ευρώ. Το παραπάνω σχήμα είναι ένα σχήμα εξόφλησης με άνισες δόσεις.

- Άσκηση 5. Αν το ετήσιο επιτόκιο είναι $i = 0.05$, αυτό σημαίνει ότι το μηνιαίο επιτόκιο είναι $\frac{5}{1200}$. Άρα για να εξοφληθεί το δάνειο με ενιαία δόση, έχουμε $n = 24$ και $i_r = \frac{5}{1200}$. Άρα η σχέση που δίνει τη δόση του δανείου είναι $L = \frac{2500}{a(24, \frac{5}{1200})}$.

Η Άσκηση 3 αφήνεται στον αναγνώστη.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ε. Μαγείρου, *Οικονομικά Μαθηματικά και Αξιολόγηση Επενδύσεων*, εκδ. GUTENBERG