ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α΄ ΕΞΑΜΗΝΟ
1η ενότητα
ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΟΣ

Διδάσκων: Χ. Κουντζάκης

1. **Χρήμα** είναι κατ΄ αρχήν ένα τέλεια ανταλλάξιμο αγαθό που εκφράζει μια γενική αρχή οικονομικής ισοδυναμίας μεταξύ ποσοτήτων διαφορετικών αγαθών.

2. Μέτρο αυτής της οικονομικής ισοδυναμίας είναι οι ποσότητες των παραγωγικών συντελεστών που απασχολούνται σε δεδομένη περίοδο για την παραγωγή των αγαθών σε συγκεκριμένες ποσότητες.

3. Το χρήμα είναι ταυτόχρονα μέτρο της ανάπτυξης μιας οικονομίας. Γι΄ αυτό και συχνά αναφέρεται υπό την έννοια του κεφαλαίου.

4. Το **κεφάλαιο** C ορίστηκε αρχικά από τους οικονομολόγους ως μια ποσότητα χρήματος διαθέσιμη για να χρησιμοποιηθεί σε κάποια παραγωγική δραστηριότητα για κάποιο χρονικό διάστημα (**διάρκεια**). Το έσοδο από αυτήν τη δραστηριότητα ονομάζεται **τόκος**.

5. Η γενίκευση των καταναλωτικών και επενδυτικών δραστηριοτήτων στις σύγχρονες οικονομίες, μετέβαλε τον αρχικό ορισμό του κεφαλαίου και του τόκου. Έτσι, κεφάλαιο πλέον ονομάζεται κάθε διαθέσιμη ποσότητα χρημάτων που αξιοποιείται για να αποδόσει ένα επιπλέον χρηματικό έσοδο. Το έσοδο αυτό ονομάζεται επίσης **τόκος**.

6. Άρα υπό τον παραπάνω ορισμό, κεφάλαιο μπορεί να θεωρηθεί και οι τραπεζικές καταθέσεις των ιδιωτών αλλά και τα χρηματικά ποσά που δαπανώνται για επιχειρηματικές επενδύσεις. Τόκος μπορεί να θεωρηθεί το έσοδο σε συγκεκριμένη χρονική διάρκεια από μία τραπεζική κατέθεση, αλλά και από ένα επενδυτικό σχέδιο αντίστοιχα.

7. **Επιτόκιο** i είναι το (σταθερό) έσοδο μίας χρηματικής μονάδας που επενδύεται για μία χρονική μονάδα (έτος).

8. Άρα για χρονική περίοδο T ετών $T \in \mathbb{R}_+$, ο τόκος κεφαλαίου C χρηματικών μονάδων υπό επιτόκιο i, είναι

   $$I = CTi,$$

   και το **τελικό κεφάλαιο** την περίοδο T είναι $C' = C(1 + iT)$. Ο παράγοντας $(1 + iT)$ ονομάζεται **απλός συντελεστής ανατοκισμού διάρκειας** T **και επιτοκίου** i. Ο συντελεστής ανατοκισμού εκφράζει το ποσοστό αύξησης του τελικού κεφαλαίου σε σχέση με το αρχικό κεφάλαιο.

9. Αν ανοίξουμε έναν τραπεζικό λογαριασμό και η σύμβαση που αφορά στην κατάθεση των χρημάτων είναι μηνιαία, τότε η παραπάνω μαθηματική σχέση γίνεται

   $$I = Ci\frac{m}{12},$$

   όπου m το πλήθος των τοκοφόρων μηνών, δηλαδή οι μήνες για τους οποίους η σύμβαση είναι ενεργή.

10. Αν ο υπολογισμός του τόκου γίνεται σε ημερήσια βάση, τότε η μαθηματική σχέση υπολογισμού του τόκου είναι

    $$I = Ci\frac{d}{365},$$

θεωρηθεί ότι το έτος έχει 365 μέρες, ενώ αν το έτος θεωρηθεί ότι έχει 12 μήνες που έχουν 30 μήνες ο καθένας τότε η αντίστοιχη μαθηματική σχέση είναι

$$I = Ci\frac{d}{360},$$

όπου d είναι το πλήθος των τοκοφόρων ημερών.

11. Σχετικά με τον υπολογισμό του τόκου όταν οι υπολογισμοί ανάγονται σε ημέρες, υπάρχουν τρεις Κανόνες. Ο Εμπορικός Κανόνας σύμφωνα με τον οποίο τοκοφόρες ημέρες και ημέρες του έτους υπολογίζονται βάσει του εμπορικού έτους, ο Πολιτικός Κανόνας βάσει του οποίου τοκοφόρες ημέρες και ημέρες του έτους υπολογίζονται βάσει του πολιτικού έτους (ημερολογιακά) και ο Μικτός Κανόνας, βάσει του οποίου οι τοκοφόρες ημέρες υπολογίζονται ημερολογιακά και οι ημέρες του έτους βάσει του εμπορικού έτους. Σε μία σύμβαση κατάθεσης, το πλήθος των τοκοφόρων ημερών υπολογίζεται ως εξής. Η πρώτη τοκοφόρος ημέρα (**Valeur**) είναι η πρώτη εργάσιμη ημέρα μετά την σύναψη της σύμβασης. Για την τελευταία ημέρα δεν υπάρχει περιορισμός.

12. Οι μαθηματικές σχέσεις που δίνουν το τελικό κεφάλαιο αν αρχικό κεφάλαιο C τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο i και η χρονική διάρκεια ανατοκισμού μετράται σε μήνες m ή σε μέρες ανάλογα με τον Κανόνα που ακολουθείται είναι $C(1+\frac{m}{12}i)$ και $C(1+\frac{d}{360}), C(1+\frac{d}{365})$ αντίστοιχα.

13. Σε περίπτωση μη σταθερού επιτοκίου, $i = i(t), 0 \leq t \leq T$, η μαθηματική σχέση υπολογισμού του τόκου μίας χρηματικής μονάδας στη διάρκεια $[0, T]$ είναι

$$I = \int_0^T i(t)dt,$$

άρα ο αντίστοιχος συντελεστής ανατοκισμού είναι ίσος με

$$(1 + \int_0^T i(t)dt),$$

ενώ το τελικό κεφάλαιο C' μετά από διάρκεια T αρχικού κεφαλαίου C χρηματικών μονάδων που ανατοκίζονται με συνάρτηση επιτοκίου $i = i(t), t \in [0, T]$, είναι

$$C(1 + \int_0^T i(t)dt).$$

14. Διαισθητικά η τιμή $i(t)$ παραμένει ίδια στο απειροστό διάστημα $[t, t+dt], t \in [0, T]$. Άρα ο τόκος μίας χρηματικής μονάδας στο διάστημα αυτό είναι $i(t)dt$. Για να υπολογίσουμε το συνολικό τόκο στο διάστημα $[0, T]$ πρέπει να λάβουμε το ολοκλήρωμα Riemann της συνάρτησης $i(t)$ στο διάστημα αυτό.

15. Αν ένα χρηματικό ποσό C τοκίζεται με (ετήσιο) επιτόκιο i_1 για διάρκεια $[0, t_1]$ και το συσσωρευμένο κεφάλαιο επανατοποθετείται και τοκίζεται με επιτόκιο i_2 για διάρκεια $(t_1, t_2]$ κ.ο.κ. και το συσσωρευμένο κεφάλαιο επανατοποθετείται και τοκίζεται με επιτόκιο i_k για διάρκεια $(t_k, T]$ τότε το τελικό κεφάλαιο είναι

$$C(1 + i_1 t_1)(1 + i_2(t_2 - t_1))...(1 + i_k(t_{k+1} - t_k)), t_{k+1} = T.$$

16. Αν στο παραπάνω γινόμενο η σύνθετη κεφαλαιοποίηση γίνεται με μη σταθερά επιτόκια, τότε τα γινόμενα $i_m(t_m - t_{m-1}), m = 0, ..., k+1$ αντιστοιχούν σε ολοκληρώματα $\int_{t_k}^{t_{k+1}} i_k(t)dt$.

17. Αν ένα χρηματικό ποσό C τοκίζεται με επιτόκιο i για διάρκεια T και το ίδιο ποσό τοκιστεί για το μισό της διάρκειας και επανατοποθετηθεί για να τοκιστεί το υπόλοιπο μισό, τότε το τελικό κεφάλαιο θα είναι

$$C_2 = C(1 + \frac{iT}{2}) \cdot (1 + \frac{iT}{2}) = C(1 + \frac{iT}{2})^2.$$

Το επιτόκιο που θα εισπράξει ο καταθέτης σε αυτήν την περίπτωση είναι $1 + iT + \frac{i^2T^2}{4} > 1 + iT$.

18. Γενικά αν γίνει αυτό k φορές, τότε το τελικό κεφάλαιο θα είναι $C_k = C(1+\frac{iT}{k})^k$ και από το διωνυμικό ανάπτυγμα ή την ανισότητα Bernoulli προκύπτει ότι $(1+\frac{iT}{k})^k \geq 1+iT$ (το μικρότερο ή ίσο προκύπτει από την ανισότητα Bernoulli-Αν λάβουμε υπόψιν το διωνυμικό ανάπτυγμα ισχύει το γνήσια μεγαλύτερο στην τελευταία ανισότητα διότι

$$(1+\frac{iT}{k})^k = 1+k\frac{iT}{k}+\frac{k(k-1)}{2}\frac{i^2T^2}{k^2}+...+(\frac{iT}{k})^k > 1+iT.)$$

Υπεθυμίζουμε ότι η ανισότητα Bernoulli είναι η ακόλουθη: $(1+a)^k \geq 1+k\cdot a$ για κάθε φυσικό $k=1,2,...$ και κάθε $a>-1$.

19. Επίσης $lim_{k\to\infty}C_k = Ce^{iT}$. Το αποτέλεσμα αυτό ονομάζεται **συνεχής ανατοκισμός**, δηλαδή το αρχικό κεφάλαιο τοκίζεται σε κάθε χρονική στιγμή του διαστήματος $[0,T]$, αφού τα k ισομήκη χρονικά διαστήματα στα οποία διαμερίζεται το $[0,T]$ όταν το k τείνει στο άπειρο, τείνουν με τη σειρά τους να 'καλύψουν' όλο το $[0,T]$.

20. Σε περίπτωση που το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι σταθερό και ίσο με i, ο ανατοκισμός συνεχής και η τοκοφόρα περίοδος δίνεται σε μήνες m, η μαθηματική σχέση υπολογισμού του τελικού κεφαλαίου για κεφάλαιο C είναι $Ce^{\frac{m}{12}i}$.

21. Οι αντίστοιχες σχέσεις για ημερήσιο ανατοκισμό είναι $Ce^{\frac{d}{360}i}$ αν ακολουθείται το Εμπορικό έτος και $Ce^{\frac{d}{365}i}$ αν ακολουθείται το Πολιτικό έτος. Ανάλογα με τον Κανόνα, διαφοροποιείται το d στον αριθμητή.

22. Σε περίπτωση μη σταθερού επιτοκίου που δίνεται από τη συνάρτηση $i=i(t), t\in[0,T]$, το τελικό κεφάλαιο θα είναι ίσο με
$$Ce^{\int_0^T i(t)dt}.$$

23. **Πραγματικό Επιτόκιο** i_r είναι το επιτόκιο ενός τραπεζικού λογαριασμού απλής κεφαλαιοποίησης που έχει το ίδιο αποτέλεσμα συσσώρευσης με τραπεζικό λογαριασμό σύνθετης κεφαλαιοποίησης. Στην περίπτωση σταθερού ετήσιου επιτοκίου i_c για παράδειγμα, αν η σύνθετη κεφαλαιοποίηση προβλέπει το χωρισμό του έτους σε k ισομήκη διαστήματα τότε η εξίσωση των αντίστοιχων συντελεστών ανατοκισμού διαμορφώνεται ως εξής
$$1+i_r = (1+\frac{i_c}{k})^k.$$

24. Στην περίπτωση συνεχούς κεφαλαιοποίησης, τότε η αντίστοιχη εξίσωση διαμορφώνεται ως εξής
$$1+i_r = e^{i_c}.$$

25. Αντίστοιχα μπορούν να διαμορφωθούν οι εξισώσεις εύρεσης του πραγματικού επιτοκίου όταν το i_c δεν είναι σταθερό αλλά συνάρτηση του χρόνου, στην περίπτωση που αναφερόμαστε στην εύρεση του πραγματικού επιτοκίου σε διάρκεια T. Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι οι εξής
$$1+i_rT = (1+\frac{\int_0^T i_c(t)dt}{k})^k,$$
$$1+i_rT = e^{\int_0^T i_c(t)dt}.$$

26. Αν η χρηματική μονάδα τοκίζεται με (ετήσιο) επιτόκιο i_1 για διάρκεια $[0,t_1]$ και το συσσωρευμένο κεφάλαιο επανατοποθετείται και τοκίζεται με επιτόκιο i_2 για διάρκεια $(t_1,t_2]$ κ.ο.κ. και το συσσωρευμένο κεφάλαιο επανατοποθετείται και τοκίζεται με επιτόκιο i_k για διάρκεια $(t_k,T]$ τότε το τελικό κεφάλαιο είναι
$$(1+i_1t_1)(1+i_2(t_2-t_1))...(1+i_k(t_{k+1}-t_k)), t_{k+1}=T,$$
άρα το πραγματικό επιτόκιο i_r είναι στην περίπτωση αυτή
$$(1+i_1t_1)(1+i_2(t_2-t_1))...(1+i_k(t_{k+1}-t_k)) = 1+i_rT.$$
Αν στο παραπάνω γινόμενο η σύνθετη κεφαλαιοποίηση γίνεται με μη σταθερά επιτόκια, τότε τα γινόμενα $i_m(t_m-t_{m-1}), m=0,...,k+1$ αντιστοιχούν σε ολοκληρώματα $\int_{t_k}^{t_{k+1}} i_k(t)dt$.

27. **Παρούσα αξία** μίας χρηματικής μονάδας που θα εισπραχθεί μετά από διάρκεια T, αν το επιτόκιο i είναι σταθερό σε όλη τη διάρκεια $[0, T]$ είναι το χρηματικό ποσό που πρέπει να κατατεθεί **σήμερα** (δηλ. τη χρονική περίοδο 0) έτσι ώστε μετά από διάρκεια T, το ποσό αυτό ανατοκιζόμενο με επιτόκιο i να δώσει τη μονάδα. Η παρούσα αξία στην περίπτωση αυτή είναι
$$\frac{1}{1+iT}.$$

28. Δεδομένου ότι η ζήτηση του χρήματος είναι θεωρητικά άπειρη ενώ η προσφορά του είναι στα πλαίσια μιας χρονικής διάρκειας $[0, T]$ πεπερασμένη, αυτό δημιουργεί το φαινόμενο 'κάλλιο πέντε και στο χέρι, παρά δέκα και καρτέρει'. Δηλαδή η πραγματική αξία μίας χρηματικής μονάδας σήμερα είναι μεγαλύτερη από την πραγματική αξία μίας χρηματικής μονάδας που θα εισπραχθεί μετά από χρόνο T. Για να συγκρίνω αυτές τις αξίες χρησιμοποιώ έναν τραπεζικό λογαριασμό (που στην συνηθέστερη περίπτωση το επιτόκιό του αντιστοιχεί στο τρέχον επιτόκιο της τραπεζικής αγοράς) και τις ανάγω στη χρονική περίοδο 0. Αυτή η ανηγμένη αξία ονομάζεται **παρούσα αξία**. Το είδος του ανατοκισμού που χρησιμοποιεί αυτός ο τραπεζικός λογαριασμός μεταβάλλει απλά τον τρόπο υπολογισμού της παρούσας αξίας.

29. Η παρούσα αξία N χρηματικών μονάδων είναι σε κάθε περίπτωση N επί την παρούσα αξία της μίας χρηματικής μονάδας.

30. Σε περίπτωση που το επιτόκιο είναι μεταβαλλόμενο κατά τη χρονική διάρκεια $[0, T]$ και αντιστοιχεί στη συνάρτηση $i(t), 0 \leq t \leq T$, τότε η παρούσα αξία στην περίπτωση αυτή είναι
$$\frac{1}{1+\int_0^T i(t)dt}.$$

31. Κατ΄ αναλογίαν στην περίπτωση της απλής σύνθετης κεφαλαιοποίησης η παρούσα αξία μίας χρηματικής μονάδας είναι
$$\frac{1}{(1+i_1t_1)(1+i_2(t_2-t_1))...(1+i_k(t_{k+1}-t_k))}, t_{k+1} = T.$$
Αν στο παραπάνω γινόμενο, η σύνθετη κεφαλαιοποίηση γίνεται με μη σταθερά επιτόκια, τότε τα γινόμενα $i_m(t_m - t_{m-1}), m = 0, ..., k+1$ αντιστοιχούν σε ολοκληρώματα $\int_{t_k}^{t_{k+1}} i_k(t)dt$.

32. Στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού με σταθερό επιτόκιο i για τη διάρκεια $[0, T]$ η παρούσα αξία μίας χρηματικής μονάδας είναι
$$e^{-iT}.$$

33. Αντίστοιχα, στην περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού με μη σταθερό επιτόκιο $i(t), 0 \leq t \leq T$ η η παρούσα αξία μίας χρηματικής μονάδας είναι
$$e^{-\int_0^T i(t)dt}.$$

34. Έστω **χρηματική ροή** $X = (X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k}) \in \mathbb{R}^k$ με πληρωμές $X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k}$ στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές $t_1, t_2, ..., t_k \in [0, T]$. Η παρούσα αξία την χρονική περίοδο 0 της X είναι το άθροισμα των παρουσών αξιών των πληρωμών (όρων) της X.

35. Για την σύγκριση δύο ή περισσότερων χρηματικών ροών εντός μίας συγκεκριμένης διάρκειας $[0, T]$ χρησιμοποιούμε την **αρχή της ισοδυναμίας** με βάση την οποία δύο χρηματικές ροές είναι **οικονομικά ισοδύναμες** αν και μόνο αν έχουν ίσες παρούσες αξίες.

36. Το **κριτήριο της παρούσας αξίας** είναι ένα από τα κριτήρια για τις ατομικές μας προτιμήσεις σε ό,τι αφορά στην αξιολόγηση των χρηματικών ροών εντός της διάρκειας $[0, T]$. Μία χρηματική ροή αποτελούμενη από τις πληρωμές $X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k}$ στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές $t_1, t_2, ..., t_k \in [0, T]$ είναι **προτιμότερη** από τη χρηματική ροή $Y_{t_{k+1}}, Y_{t_{k+2}}, ..., Y_{t_m}$, όπου $t_{k+1}, t_{k+2}, ..., t_m \in [0, T]$ αν και μόνο αν η παρούσα αξία της X (τη χρονική περίοδο 0) είναι μεγαλύτερη από αυτήν της Y.

1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Καταθέτης έχει να επιλέξει μεταξύ κατάθεσης με ετήσιο επιτόκιο 0.15 και εξαμηνιαίο επιτόκιο 0.075. Ποια είναι η πιο συμφέρουσα κατάθεση ;

2. Το ίδιο αν το κεφάλαιο ανατοκίζεται με απλό ανατοκισμό σε περίοδο δύο ετών βάσει της συνάρτησης $i(t) = t^3 - 2t^2 + 1$ στη μία περίπτωση, ενώ στην άλλη συνεχώς με σταθερό επιτόκιο 0.1.

3. Καταθέτης τοποθέτησε τα χρήματά του στις 22 Αυγούστου του 2011 στην τράπεζα X και τα απέσυρε στις 27 Σεπτεμβρίου του 2011. Το ποσό ήταν 4.000 ευρώ και το ετήσιο επιτόκιο 0.15. Να βρεθεί τι τόκο εισέπραξε βάσει των τριών ημερολογιακών Κανόνων.

4. Συγκρίνετε ποια είναι η πιο συμφέρουσα κατάθεση. Συνεχής ανατοκισμός επιτοκίου 0.03 για ένα χρόνο ή απλός τόκος επιτοκίου 0.14 επίσης για ένα χρόνο.

5. Να βρείτε το πραγματικό επιτόκιο που αντιστοιχεί σε κατάθεση συνεχούς ανατοκισμού ετήσιου επιτοκίου 0.1.

6. Επίσης να υπολογιστεί το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού που αντιστοιχεί σε κατάθεση πραγματικού επιτοκίου 0.15.

7. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 1000 ευρώ που ανατοκίζεται για μισό έτος με ετήσιο επιτόκιο 2 τοις εκατό και έπειτα για άλλο μισό έτος με συνεχή ανατοκισμό σταθερού ετήσιου επιτοκίου 4 τοις εκατό.

8. Να βρεθεί το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο απλού τόκου της κατάθεσης αυτής.

9. Δανειολήπτης έχει να επιλέξει για την αποπληρωμή μέρους των υποχρεώσεών του προς την τράπεζα μεταξύ της πληρωμής 100 ευρώ σε ένα χρόνο και 50 ευρώ σε δύο χρόνια και 125 ευρώ σε ένα χρόνο. Το επιτόκιο είναι 0.15. Τι συμφέρει το δανειολήπτη ;

10. Ποια η παρούσα αξία της χρηματικής ροής (εντός της διάρκειας τριών ετών σε ετήσια βάση): $X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 1, X_2 = 3$ αν το ετήσιο επιτόκιο είναι σταθερό και ίσο με 0.15.

11. Βρείτε το χρόνο τριπλασιασμού του κεφαλαίου λογαριασμού που ανατοκίζεται συνεχώς με εξαμηνιαίο επιτόκιο i.

12. Αν η διάρκεια ανατοκισμού λογαριασμού είναι 2 έτη και οι χρονικές στιγμές απόσυρσης και επανακεφαλαιοποίησης είναι στο τέλος του πρώτου έτους και στο τέλος του τρίτου εξαμήνου και αν το επιτόκιο για το πρώτο έτος είναι 0.2 και για το δεύτερο 0.3 ποιο είναι το πραγματικό επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού ;

2 Αναφορές

Ε. Μαγείρου, *Οικονομικά Μαθηματικά και Αξιολόγηση Επενδύσεων*, εκδ. GUTENBERG
John M. Keynes, *Γενική Θεωρία της Απασχόλησης του Τόκου και του Χρήματος*, εκδ. ΤΟ ΒΗΜΑ
S. Ross, *An Introduction to Mathematical Finance*, Cambridge University Press