15 - 02 - 23

Μάθημα 1ο

Ειδικά Θέματα ΠΙΘ
και Στατ II

Περίγραμμα μαθήματος:

1) Μελέτη μη παραμετρικών μοντέλων (γραμμικής παλινδρόμησης

2) -//- εκτίμησης

3):

$$E = \hat{E} \oplus E_r$$

4) Μερικά διατεταγμένοι γραμμικοί χώροι

5) Διανυσματικοί σύνδεσμοι (vector lattices or Riesz spaces)

$(E, \geq)$ $\geq$ $E \times E \longrightarrow E$

$x \geq y \Leftrightarrow (x, y) \longmapsto x - y$

i) $x \geq x$ (ανακλαστική), $x \in E$

Αν $x, y \in E$:

ii) $x \geq y$ και $y \geq x \Rightarrow x = y$ (αντισυμμετρική)

iii) Αν $x, y, z \in E$, $x \geq y$ και $y \geq z \Rightarrow x \geq z$ (μεταβατική

iv) Αν $x, y, z \in E$: $x \geq y \Leftrightarrow x + z \geq y + z$ (ακολουθική)

v) Αν $x, y \in E$ και $x \geq y \Rightarrow \lambda \cdot x \geq \lambda \cdot y$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ (Θετικη ομοχε-νεια)

vi) Αν $x \geq 0$ και $-x \geq 0 \Rightarrow x = 0$ (κωνικη)

$E_+ := \{ x \in E \,/\, x \geq 0 \}$

$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in E_+$

Αν:

E_+ $\quad x, y, z \in E_+$ και $\lambda \in \mathbb{R}_+$ $\quad (E_+ : \{ x \in E \,/\, x \geq 0 \})$

A) $x + y \in E_+$ $\qquad x \geq_{E_+} y \Leftrightarrow x - y \in E_+$

B) $\lambda x \in E_+$

Γ) $E_+ \cap (-E_+) = \{0\}$

Αν A, B, Γ ισχυει τοτε E_+: κωνος

$x, y \in E$ $\quad x \geq_K y$

$\mathbb{R}^2$ $\quad (1,2)$ $\quad (5,0)$ κατα συντεταγμενη (μερικη) διαταξη

K

$C_+[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R}_+ \,/\, f$: συνεχης $\}$

$f \geq g \Leftrightarrow f(t) - g(t) \geq 0 \;\; \forall\, t \in [0,1]$

L^p (Lebesgue)

$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$1 \le p < +\infty$ $\quad L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$:= \{X : \Omega \to \mathbb{R},\ X : \mathcal{F}$ μετρήσιμη

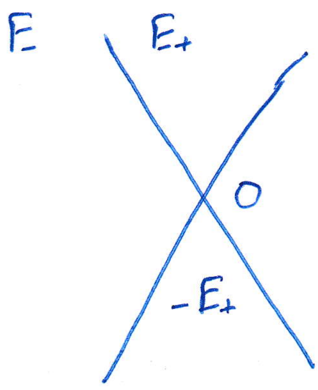
και $E(|X|^p) < +\infty\}$

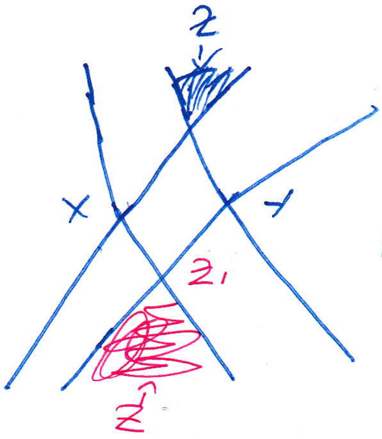
$L^p_+(\Omega, \mathcal{F}, P) := \{X : \Omega \to \mathbb{R},\ X : \mathcal{F}$- μετρήσιμη

$E(|X|^p) < +\infty \mid X(\omega) \ge 0,\ P$-σ.β.$^*\}$

$^*\ P(N) = 0,\ N \in \mathcal{F}$

$|X+Y|^p \le |X|^p + |Y|^p$ ανισότητα Minkowski





$z \ge x, y$

$z_0 \ge x, y$

και $z \ge z_0$

$z = \sup\{x, y\}$

$= x \vee y$

$x, y \ge z$

$z_1 \ge z$

$z_1 = \inf\{x, y\} = x \wedge y$

$(E, \ge)$: Riesz space (vector lattice)

διανυσματικοί σύνδεσμοι

$E = \hat{E} \oplus E_r$

$x, y \in \mathbb{R}^n \quad x \vee y = z \quad : \quad z_i = \max\{x_i, y_i\}, \ \forall i = 1, \dots, n$

$f, g \in C[0,1] \quad f \wedge g = t \quad t_i = \min\{x_i, y_i\}, \ \forall i = 1, \dots, n$

$x, y \in \mathbb{R}^n \quad f \vee g = z \quad : \quad z(\theta) = \max\{f(\theta), g(\theta)\}, \ \theta \in \Omega$

$f, g \in L^p \quad f \wedge g = t \quad : \quad t(\theta) = \min\{f(\theta), g(\theta)\}, \ \theta \in N$

Υποσύνδεσμος S ενός διαν. συνδέσμου E, είναι κάθε υπόχωρος του E, τ.ω για κάθε $x, y \in S$, $x \vee y \in S$ και $x \wedge y \in S$

Έστω $x \in E$, τ.ω E Riesz space

Τότε $|x| := x \vee (-x)$

$|x| \leq |y|, \ y \in I \Rightarrow x \in I$

Π.χ 1: κάθε ιδεώδες I του E είναι υποσύνδεσμος του E

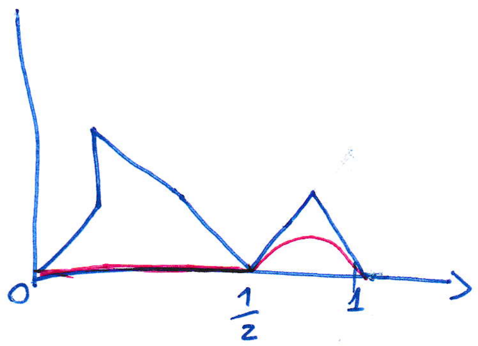
Για να δείξουμε το συμπέρασμα, αρκεί ν.δ.ο αν $x, y \in I$, τότε $x \vee y, \ x \wedge y \in I$

$$x \vee y = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

$$x \wedge y = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$$

$$|x-y| \leq |x|+|y|$$

Εστω E: διαν. συνδεσμος και S: υποσυνδεσμος του E. Ο S δεν ειναι απαραιτητα ιδεωδες του E



22-02-23 Μαθημα 2ο

Ειδικα Θεματα ΠΙΘ
και Στατ II

Εστω $(E, \geq)$ διανυσματικος συνδεσμος

$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} : x_i \in E, i = 1, \ldots, k$

Αν $x, y \in E$, τοτε $x \wedge y = y \wedge x$ και $x \vee y = y \vee x$

$S(A) = \{ x \in E \,/\, x = \pm \bigvee_{i=1}^{k} (\pm \bigwedge_{i=1}^{k}) \}$ υποσυνδεσμος που παραγεται απο το A

Εστω $x \in E$, τοτε

$I(x) = \{ y \in E \,/\,$ υπαρχει $\lambda \in \mathbb{R}_+ : |y| \leq \lambda |x| \}$

ιδεωδες που παραγεται απο το x

$I(A) = \{ y \in E \,/\,$ υπαρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}_+, \forall i = 1, \ldots k$ τ.ω $|y| \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |x_i| \}$

οπου $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$

$E = B \oplus B^d$

$B = \bar{I}^o$

$x \perp y$ ορθογωνια

$x, y \in E$ $x \,\underline{d}\, y$ ανν $|x| \wedge |y| = 0$

disjoint (διακεκριμενα)

$X \perp Y \iff X, Y$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

$X = \lambda Y$, $\lambda \in \mathbb{R} \iff |X| \wedge |\lambda X| = |\lambda| \cdot |X| = 0 \iff \lambda = 0$

$X_n = \frac{1}{n} \cdot X$, $X \in E_+$, $n \in \mathbb{N}$ (ιδιότητα της πληρότητας ή Αρχιμήδεια ιδιότητα)

X_n : φθίνουσα και $X_n \to 0 \in E$

$Y_n \xrightarrow{o} Y$ ανν $|Y_n - Y| \leq X_n$

Ένας διαν. σύνδεσμος ονομάζεται διαταικτικά πλήρης (order complete) ανν για κάθε φραγμένο $A \subseteq E$ υπάρχει το

$a = \sup(A)$

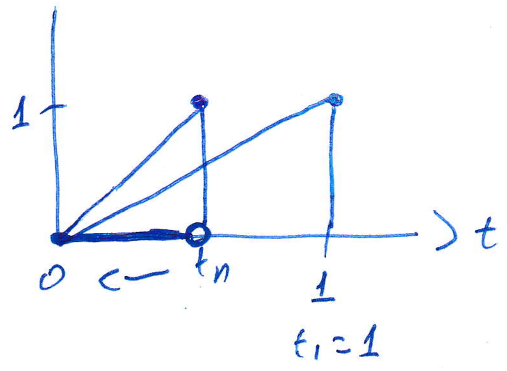
$C[0,1]$. Έστω $X_n = \frac{X}{n}$, $X = X(t)$, $t \in [0,1]$

και $X(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]$

και είναι συνεχής

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τ.ω

$X_n(t) = I_{(t_n, 1]}$



<u>Προταση</u> : Τα παρακατω ειναι ισοδυναμα:

i) $X \perp Y$

ii) $||X|+|Y|| = ||X|-|Y||$

iii) $|X| \vee |Y| = |X|+|Y|$

$X_1, X_2, \dots, X_k$ ειναι ορθογωνια μεταξυ τους, τοτε

$$\sum_{i=1}^{k} |X_i| = \bigvee_{i=1}^{k} |X_i| \quad L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

$X \perp Y : |X| \wedge |Y| = 0$

$$\underbrace{|X| \wedge |Y|}_{0} = \frac{1}{2}\left(|X|+|Y| - \big||X|-|Y|\big|\right) \iff$$

$\iff ||X+|Y|| = ||X|-|Y||$

Παρομοια απο το (ii) $\to$ (iii) αντι για $- \to +$ και αντι
για $|X|+|Y| \to ||X|+|Y||$

$\bar{B}^{\circ} = B$, B: ιδεωδες τοτε το B ονομαζεται ζωνη

(band)

Αν ο E διανυσματικος συνδεσμος και B ζωνη του

E, $E = B \oplus B^d$

Εστω E: διανυσματικος συνδεσμος και $e \in E_+$ τ.ω $\boxed{I_e = E}$. Τοτε το e ονομαζεται διατακτικη μοναδα του E

↪ $x \in E$, υπαρχει $\lambda \in \mathbb{R}_+ : |x| \le \lambda \cdot e$

$L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$: $\mathbb{1}_\Omega = \mathbb{1}$ $x \in L^2$

$x \perp 1$

$I_{\{\mathbb{1}, x\}} = \{ y \in L^2 \mid$ υπαρχουν $\lambda_0^{(y)}, \lambda_1^{(y)} \in \mathbb{R}_+$ τ.ω $|y| \le \lambda_0 \cdot \mathbb{1} + \lambda_1 |x| \}$ (1)

$\hat{\lambda}_0 \overset{L^p}{=} \inf(\lambda_0)$: ισχυει η (1) $\quad 1 \le p < +\infty$

$\inf(\lambda_1) \overset{L^p}{=} \hat{\lambda}_1$: ισχυει η (1)

$L^2 \overset{?}{=} I_{\{1,x\}} \oplus I^d_{\{1,x\}}$

01-03-23

Μάθημα 3ο

Ειδικά Θέματα ΠΠΘ και Στατ II

<u>Παράδειγμα</u> (για τις εκτιμήτριες που προκύπτουν από ιδεώδη)

Έστω ο $C[0,1]$, μερικά διατεταγμένος από την κατά σημείο διάταξη δηλ.

αν $f, g \in C[0,1]$, τότε $f \geq g \Leftrightarrow f(t) \geq g(t), \forall t \in [0,1]$

Έστω το ιδεώδες που παράγεται από τις συναρτήσεις $x_0(t) = 1$, $t \in [0,1]$ και $x_1(t) = t$, $t \in [0,1]$. Το ιδεώδες αυτό αντιστοιχεί στο απλό γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης και είναι το εξής:

$$I_{\{x_0, x_1\}} = \{ y \in C[0,1] \mid \text{υπάρχουν } \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}_+ : |y(t)| \leq \lambda_0 \cdot x_0(t) + \lambda_1 x_1(t) \}$$

i) Η αβεβαιότητα του μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης που αντιστοιχεί στο $I_{\{x_0, x_1\}}$ περιγράφεται από τον υπόχωρο

$$I^d_{\{x_0, x_1\}} := \{ z \in C[0,1] : |z| \wedge |k| = 0, \; k \in I_{\{x_0, x_1\}} \}$$

ii) Η συνάρτηση $x_2(t) = t^2$, $t \in [0,1]$ ανήκει στο $I_{\{x_0, x_1\}}$

Αρκεί ν.δ.ο υπάρχουν $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}_+$:

(1) $|X_2(t)| \le \lambda_0 X_0(t) + \lambda_1 X_1(t)$, $t \in [0,1]$

Αν $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 1$ ισχύει η (1)

δηλ ισχύει ότι $\underbrace{t^2 \le 1+t}_{(2)}$, $\forall\, t \in [0,1]$

Αυτό δηλ η (2) ισχύει γιατί θεωρώντας την

$f(t) = 1+t-t^2$, $f'(t) = 1-2t = \frac{1}{2}2 - 2t = 2(\frac{1}{2} - t)$

t	0		$1/2$		1
$f'(t)$		$+$		$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Άρα, $f(t) \le f(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$f(0) = 1 \le f(t)$

$f(1) = 1+1-1 = 1$

Το "σφάλμα" είναι ίσο με $\max|1+t-t^2| = \frac{5}{4}$, $t \in [0,1]$

Το προσαρμοσμένο σφάλμα είναι

$\frac{5}{4 \cdot \boxed{2}}$ 2 είναι πλήθος των "χσυντόρων" X_0, X_1 του ιδεώδους

Εστω E διανυσματικος συνδεσμος και Θ ενας πεπερασμενης διαστασης υποχωρος του E θα λεμε οτι ο Θ εχει θετικη βαση $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$

αν $\beta_i \in \Theta$, $\beta_i \in E_+$, $\forall\, i=1,2,\dots,k$ και

αν $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \beta_i$, $y = \sum_{i=1}^{k} t_i \beta_i$ τ.ω $x, y \in E_+$ τοτε

$$x \vee y = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i \vee t_i)\beta_i, \quad x \wedge y = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i \wedge t_i)\beta_i$$

Αν ο Θ εχει θετικη βαση τοτε

$$\Theta_+ = \left\{ y \in \Theta \cap E_+ : y = \sum_{i=1}^{k} t_i \beta_i,\ t_i \in \mathbb{R}_+,\ i=1,2,\dots,k \right\}$$

<u>Παραδειγμα</u>: υποχωρου ενος διανυσματικου συνδεσμοι που δεν εχει θετικη βαση ειναι ο υποχωρος των

$\dim \Pi_2 = 3$ $\quad \Pi$

(2-βαθμων πολυωνυμων) στο $C[0,1]$ (ως προς την κατα σημειο διαταξη)

$1+t-t^2$ $\quad \{1, t, t^2\}$ δεν ειναι θετικη βαση

<u>Παραδειγμα</u>: υποχωρου ενος διαν. συνδεσμου που εχει μια θετικη βαση η οποια δεν ειναι θετικη:

$\dim \Pi_k = k+1$ $\quad \Pi_k$: υποχωρος του $C[0,1]$

$x_n \to +\infty \iff \forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_n > n : |x_{k_n}| < \frac{1}{n}$

$x > y \iff x - y \in E_+ \setminus \{0\}$

$B_x := \{ y \in E_+ : |y| \wedge (n \cdot x) \uparrow |y| \}$

$x > 0$

$|y| \wedge |x_n| = (nx) \wedge |y| \uparrow |y|$

$I_x = E$ το x ονομάζεται (διατακτική) μονάδα του E

$B_x = E$ -//- ασθενής διατακτική μονάδα του E

08 - 03 - 23

Μάθημα 4ο:

Ειδικά Θέματα ΠΙΘ
και Στατ ΙΙ

Κάθε ιδεώδες ενός διανυσματικού συνδέσμου αντιστοιχεί στην έννοια του "συστηματικού κινδύνου" ή αλλιώς στην "αβεβαιότητα μοντέλου" σε ότι αφορά ένα μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης. Έστω, E: διανυσματικός σύνδεσμος και B: ζώνη του E

Η "διάσπαση" - ευθύ άθροισμα $E = B \oplus B^d$, όπου

$B^d = \{x \in E \mid |x| \wedge |y| = 0,\ \forall y \in B\}$ και αποδεικνύεται ότι B^d είναι ζώνη και μάλιστα ισχύει $B^{dd} = (B^d)^d = B$

διατακτική μονάδα - e $\quad$ $x \in E_+$

Έστω $y \in E$. Τότε $\hat{y}\ (= \beta_0 \mathbb{1} + \beta_1 x)$, με $\hat{y} \in I$: ιδεώδες του E

στην απλή γραμμ. παλιν.

$y = (\hat{y} + \boxed{e(y)}) + \sigma(y),\ \sigma(y) \in B^d$, όπου

e = διατακτική μονάδα του E

$B = \bar{I}^o$ κλειστή θήκη

Έστω I: ιδεώδες του E. Τότε:

$$\bar{I}^o = \{y \in E \mid \exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I \quad y_n \uparrow y\}$$

$P_M : E \to M$ προβολή ανν $\forall x \in M$, υπάρχει $y \in E$, τ.ω.

$y = P_M(x)$ και $P \circ P = P$, $\quad P_M \circ (I - P_M) = 0$

M υποσυνδεσμος (sublattice) του E, αν $\forall\ x, y \in M$

$x \vee y \in M \quad , \quad x \wedge y \in M$

$$S(A) = \left\{ x \in E \mid x = \bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{k} x_j \right) \text{ και } x_1, x_2, \ldots, x_k \in A \right\}$$

$\hat{y} + e(y) =$

$\|$

$P_{S(A)}(y) + (I - P_{S(A)})(y) + (6(y))$

$\uparrow$

E_+

$\to P_{S(A)}(y) \in S(A)_+$

$\|$

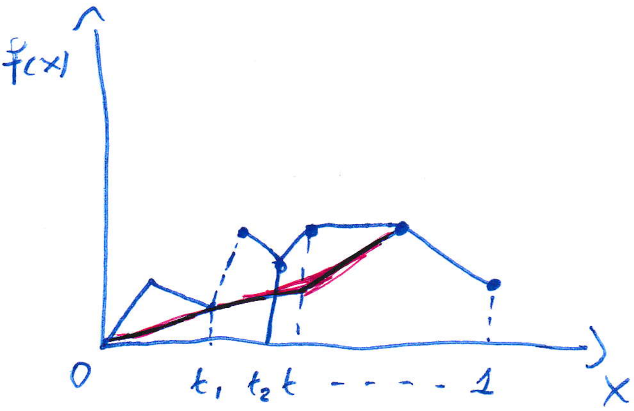
$E_+ \cap S(A)$

15 - 03 - 23 Μάθημα 5ο

Ειδικά Θέματα Πιθ και Στατ ΙΙ

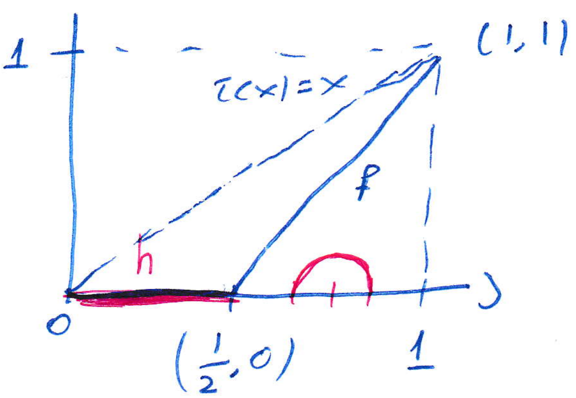
Παράδειγμα: Υπάρχει υποσύνδεσμος του $C[0,1]$ που δεν είναι ιδεώδες.

Θεωρούμε τον υπόχωρο των τμηματικά γραμμικών συναρτήσεων G



$f \vee g \in G$, $f \wedge g \in G$, $f, g \in G$. Ο G: υποσύνδεσμος του $C[0,1]$

Ο G δεν είναι ιδεώδες του $C[0,1]$ γιατί αν θεωρήσουμε την f και την h



$h \leq g$ κατά σημείο

$Ax + By + \Gamma = 0$

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot\frac{1}{2} + B\cdot 0 + \Gamma = 0 \\ A\cdot 1 + B\cdot 1 + \Gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A + 2\Gamma = 0 \\ -2\Gamma + B + \Gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -2\Gamma,\ B = \Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\Gamma x + \Gamma y + \Gamma = 0$$

$$(1) \quad \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$$

Εστω E: διανυσματικος συνδεσμος και I: ιδεωδες του E

Ειναι καθε ιδεωδες ενος E υποσυνδεσμος του E?

<u>Απαντηση</u>: Οχι!

Το $I_1 = \{ \sigma \in C[0,1] \mid |\sigma| \leq 1 \}$

$\sigma_1(x) = \eta\mu x$, $\sigma_2(x) = \eta\mu(\frac{1}{2}x)$ $\quad \sigma_1, \sigma_2 \in I$

Εστω ο υποχωρος που παραγεται απο τις συναρτησεις της μορφης $\sigma_a(x) = \eta\mu(ax)$, $a \in (0,1]$

$$(\sigma_1 \vee \sigma_2)(x) = \eta\mu(ax), \ a \in (0,1], \ x \in [0,1]$$

Εστω $x, y \in E$, οπου E ο διανυσματικος συνδεσμος των τυχαιων μεταβλητων των

$L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $((\Omega, \mathcal{F}, P))$ χωρος πιθανοτητας

και $x \wedge y = 0$

$|x| \wedge |y| = 0$ τοτε τα x, y ονομαζονται ορθογωνια

<u>Ερωτηση</u>:

Υπαρχουν $x, y \in \underline{\underline{L}}^1$ οι τ.μ ειναι συσχετισμενες και $|x| \wedge |y| = 0$

Borel

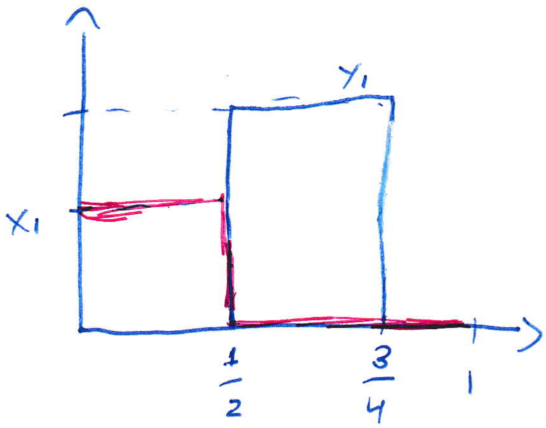
Π.Χ : $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$

Lebesgue

$X = x_1 I_{[0,\frac{1}{2}]}$, όπου $x_1 > 0$

$Y = y_1 I_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}$, $y_1 > 0$

$X \wedge Y = 0$



$E(XY) - \underbrace{E(X)E(Y)}_{\neq 0} = cov(X,Y)$

0

22 - 03 - 23

Μάθημα 6ο

Ειδικά Θέματα ΠΠΘ

και Στατ ΙΙ

Έστω E διαν. συνδεσμος και X υπόχωρος του E. Τότε ο X ονομάζεται υποσυνδεσμος του E, αν $\forall$ $x, y \in X$ ισχύει ότι $x \vee y$, $x \wedge y \in X$. Έστω $E = C[0,1] \cap L^2[0,1]$, $B[0,1]$, λ.

Έστω ότι ο X είναι υποσυνδεσμος του $E = C[0,1] \cap L^2[0,1]$ πεπερασμένης διάστασης, δηλ $X = [x_1, \dots, x_n]$ $(\dim(X) = n)$

__Πρόταση__: Αν ο X είναι υποσυνδεσμος πεπερασμένης διάστασης $(\dim(X) = \mu) \iff$ Ο X έχει θετική βάση δηλ $X = [b_1, \dots, b_m]$ και αν $x \in X_+ = E_+ \cap X$, τότε:

$$X = \{ x \in E_+ \mid x = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i b_i,\ \lambda_i \geq 0 \ \forall\ i = 1, \dots, \mu \}$$

__Παρατήρηση__: $b_i \wedge b_j = 0$, $i \neq j$

$S(X)$: ο ελάχιστος υποσυνδεσμος του E που περιέχει την X ή αλλιώς η τομή όλων των υποσυνδεσμων του E που περιέχουν τον X ($\dim S(X) = \mu$? $\{b_1, \dots, b_\mu\}$: θετική βάση του $S(X)$?)

$x_i = x_i^+ - x_i^-$, $\forall$ $i = 1, \dots, n$ $(x \vee 0)$ $(-x) \vee 0$

$X = [x_i^+, x_i^-, i = 1, \ldots, n] \overset{\text{βαση}}{\Leftrightarrow} X = [z_1, \ldots, z_r] \quad (r \leq 2n)$

$H \; \beta(t) = (z_1(t), \ldots, z_r(t)), \; z(t) = z_1(t) + \ldots + z_r(t), \; \forall t \in [0,1]$

$z(t) > 0$

ονομάζεται βασική συνάρτηση του X

Επίσης $\sum_{i=1}^{r} z_i(t) = z(t)$, τότε παρατηρούμε ότι οι τιμές της

$\beta \in \Delta_{r-1}$ όπου $\Delta_{r-1} = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^r \mid \sum_{i=1}^{+\infty} y_i = 1 \right\}$

Υποθέτουμε ότι κανένα από τα $\frac{z_i(t)}{z(t)}$, $i = 1, \ldots, r$ δεν εκφράζεται (δεν αποτελεί κυρτό συνδυασμό των $\frac{z_j(t)}{z(t)}$, $i \neq j$. Διαφορετικά, προσδιορίζουμε ποια από τα

$\frac{z_i(t)}{z(t)}$, $i = 1, \ldots, r$ κ' t τ.ω $z(t) > 0$ ικανοποιεί την

ιδιότητα.

Έστω μ το πλήθος αυτών των $\frac{z_i(t)}{z(t)}$, $i = 1, \ldots, \mu$,

$t : z(t) > 0$

$\rightarrow$ Lattice subspaces in Function Spaces - Σελ 275

$\dim S(x) = \mu \leq r$, $n = \mu = r$

P_i, $i = 1, \ldots, n \in \mathbb{R}_+^n$ (Δ_{n-1}) που είναι οι κορυφές του πολυτόπου του $R(\beta)$ και $A : n \cdot n$ πίνακας με j στήλες τα P_i

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(t) \\ \vdots \\ \sigma_n(t) \end{pmatrix} = A^{-1} \quad (X_1(t) \quad X_2(t) \quad \dots \quad X_n(t))$$

<u>Άσκηση</u>: $X = [X_1(t) = 1,\ t \in [0,1],\ X_2(t) = t^2+1,\ X_3 = t^2+t+1]$,

$S(X) = M \leq 3$

$$\sigma(t) = \left(\frac{1}{2t^2+t+3},\ \frac{t^2+1}{2t^2+t+3},\ \frac{t^2+t+1}{2t^2+t+3}\right)$$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23$

$\lambda \in (0,1):\ 1 = \lambda(t^2+1) + (1-\lambda)(t^2+t+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(t^2+1) + (1-\lambda)(t^2+t+1) - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\lambda(t^2+1)} - \cancel{\lambda(t^2+1)} + (1-\lambda)t + t^2 + t + \cancel{1} - \cancel{1} = 0$

$t^2 + 2t - \lambda t = 0 \Rightarrow (t+1)^2 - \lambda t - 1 = 0$

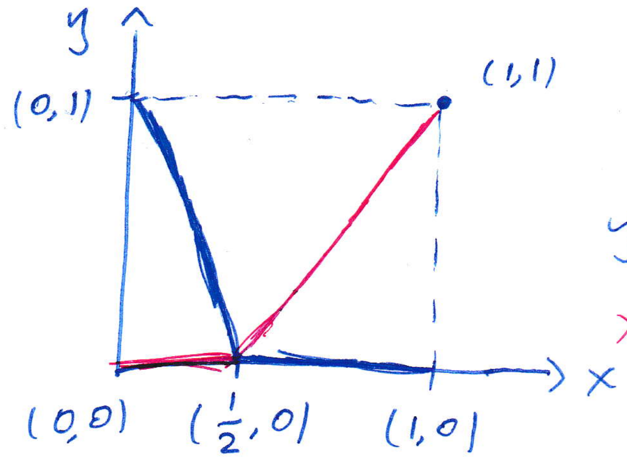
$\hat{\Theta} = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(t^2+1) + \lambda_3(t^2+t+1) \overset{\sigma_i \wedge \sigma_j = 0}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (\hat{\Theta} - (\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(t^2+1) + \lambda_3(t^2+t+1)))^2 = 0$

29-03-23

Μαθημα 7ο

Ειδικα Θεματα ΤΠΘ και Στοχ ΙΙ



$(Ax+By+\Gamma=0)$

f_1 f_2

$y=f_1(x)=1-2x, \quad x\in[0,\frac{1}{2}]$

$y=f_2(x)=2x-1, \quad x\in[\frac{1}{2},1]$

$Z(x)=f_1(x)+f_2(x)=f_1(x), \quad x\in[0,\frac{1}{2}], \quad Z(x)=f_2(x), \quad x\in[\frac{1}{2},1]$

$$B(x)=\left(\frac{f_1(x)}{Z(x)}, \frac{f_2(x)}{Z(x)}\right)=\left(1=\frac{f_1(x)}{f_1(x)}, 0=\frac{f_2(x)}{Z(x)}\right), \quad x\in[0,\frac{1}{2}]$$

$B(x)=(0,1)$ $\qquad = (1,0), \quad x\in[0,\frac{1}{2}]$

$x\in[\frac{1}{2},1]$

$B(x)=(1,0)=P_1, \quad x\in[0,\frac{1}{2}]$ και

$B(x)=(0,1)=P_2, \quad x\in[\frac{1}{2},1]$

Το πεδιο τιμων της B, $\forall\, x\in[0,1]$, αποτελειται απο τα P_1, P_2 που ειναι γραμμικως ανεξαρτητα και επισης το P_1 δεν ειναι ισο με λP_2, $\lambda\in(0,1)$, ουτε P_2 ειναι ισο με λP_1, οπου $\lambda\in(0,1)$. Ο πινακας των $P_1\ P_2$ ειναι ο $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=A=I_2$ αρα $A^{-1}=A$

Άρα, ο υποσυνδεσμος που παράγεται από τις γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις f_1, f_2 έχει θετική βάση η οποία προσδιορίζεται από την εξίσωση $\begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{pmatrix} = \underset{\overset{\|}{I_2}}{A^{-1}} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, $x \in [0,1]$ άρα οι

συναρτήσεις f_1, f_2 είναι η θετική βάση

Έστω μια παράμετρος θ την οποία θέλουμε να εκτιμήσουμε μέσω του υποσυνδέσμου που παράγουν οι f_1, f_2

$$(\hat{\theta} - (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)))^2 = E(x)$$

$\hat{\theta}(\lambda_1, \lambda_2)$ τ.ω ελαχιστοποιεί την $E(x)$

$$\left.\begin{array}{l} E(x) = (\theta - \lambda_1 f_1(x))^2, \ x \in [0, \tfrac{1}{2}] \text{ και} \\ E(x) \ (\theta - \lambda_2 f_2(x))^2, \ x \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{array}\right\} \begin{array}{l} E(x) = (\theta - \lambda_1(1-2x))^2 \ x \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ \text{και} \\ E(x) = (\theta - \lambda_2(2x-1))^2, \\ x \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{array}$$

$$E'(x) = 2(\theta + 2\lambda_1 x - \lambda_2) \cdot 2 = 4(\theta + \lambda_1(2x-1)) =$$
$$= 4(2\lambda_1 x + \theta - \lambda_1)$$

$$E'(x) = 2(\theta - \lambda_2 - 2\lambda_2 x)(-2) = -4(\theta - \lambda_2 - 2\lambda_2 x)$$
$$= 8\lambda_2 x - 4\theta + 4\lambda_2$$

$$E''(x) = 8\lambda_2 \geq 0 \quad \text{όταν} \quad \lambda_2 \geq 0$$

$$< 0 \quad \text{όταν} \quad \lambda_2 < 0$$

$$E(x) = (e^x - \lambda_1 f_1(x) - \lambda_2 f_2(x))^2 \quad \text{(Landau)}$$

$$e^x = 1 + x + O(x^2) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$E(x) = (1 + x + O(x^2) - \lambda_1 f_1(x) - \lambda_2 (x))^2$$

$$= (1 + x - \lambda_1 f_1(x) - \lambda_2 f(x)))^2$$

$$E_{\lambda_1}(x) = (1 + x - \underset{\geq 0}{\lambda_1}\overbrace{(1-2x)}^{6_1})^2, \quad x \in [0, \tfrac{1}{2}] \qquad E(x) = E(x, \lambda_1, \lambda_2) = E(x, \lambda_1)$$

$$E_{\lambda_2}(x) = (1 + x - \underset{\geq 0}{\lambda_2} \underset{6_2}{(2x-1)})^2, \quad x \in [\tfrac{1}{2}, 1] \qquad , \quad E(x) = E(x, \lambda_2)$$

$$E_{\lambda_1}(x) = (1 + x + \lambda_1 + 2\lambda_1 x)(2x+1) = (2x+1)((2\lambda_1 + 1)x + \lambda_1 + 1)$$

$$\lambda_1 < 0$$

$$1 + x = f_1(1 - 2x) + \cancel{f_2} 0$$

$$e^x = 1 + O(x) \simeq 1$$

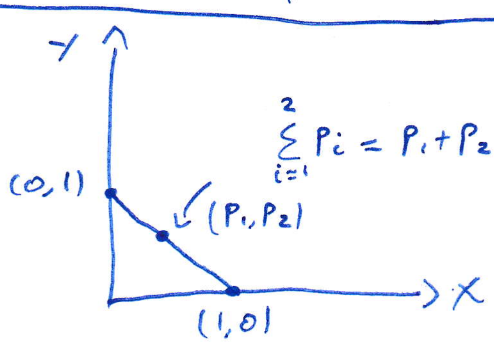
$$1 + x = f_1 0 + f_2 (2x - 1)$$

05 - 08 - 23

Μαθημα 8ο

Ειδικα Θεματα ΠιΘ και Στατ ΙΙ

Γεωμετρικα Ζητηματα στη Θεωρια Πιθανοτητων



$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)$

$\sum_{i=1}^{2} P_i = P_1 + P_2 = 1 = P \cdot (1,1) = x$

$$\Delta_{n-1} = \left\{ (P_1, P_2, \dots, P_n) \,/\, P_i > 0, \sum_{i=1}^{n} = 1 \right\}$$

$P \cdot (2, \dots, 1) = 1$

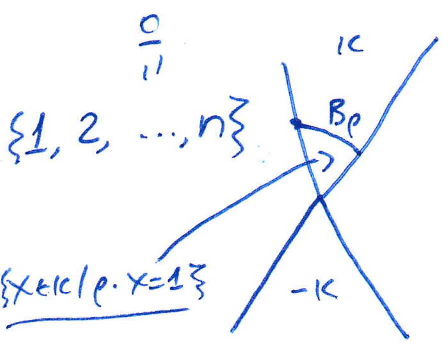
Βαση του $\mathbb{R}^n_+$ $\quad B_p = \{ x \in \mathbb{R}^n_+ \mid p \cdot x = 1 \}$

τη συνολο Κ $\rightarrow$ πρεπει να μοιαζει με $\mathbb{R}^n_+$

$P_i \; \underline{\underline{x_i}}$

$x, y \in K \Rightarrow x + y \in K$

$x \in K$ και $\lambda \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \lambda x \in K \quad K \cap (-K) = \{0\}$



καθε τετοιο Κ ονομαζεται κωνος

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_p : x \in \mathbb{R}^n \quad \|\cdot\| \Rightarrow \mathbb{R}_+$

συναρτηση

$x \rightarrow \|x\|$

i) $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$

ii) $||\lambda \cdot x|| = ||\lambda|| \cdot ||x||$

iii) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

l^2

$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$||x||_\infty = \max\{|x_i|, i = 1, \dots, n\}$

ικανοποιούν την ιδιότητα normal

$||x+y||_2 \le ||x||_2 + ||y||_2$

Cauchy

$A > 0$

$(\min(\{p_i\})) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|} \le p \cdot x = 1 \Rightarrow$

$i = 1, \dots, n$

$A||x||_1 \le 1$

Για να

R^n Κ

$\boxed{l_1}$ $\{x = (x_n)_{n \in N} \ (x_n \in R) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_i| < +\infty\}$

↳ Η διάσταση αυτού του χώρου είναι ίση με τον πληθάριθμο $w = \langle x, a \rangle$ η συνάρτηση είναι γραμμική και συμμετρική δηλαδή $\langle x, a \rangle = \langle a, x \rangle$

$\langle x, a \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n < +\infty$

$$\overset{\geq w}{e_n} = (0, \ldots, \underset{\underset{n}{\shortparallel}}{1}, 0 \ldots 0)$$

$$B_a = \{ x \in \ell_+^1 \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 1 \}$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$B_a = \{ x \in \ell_+^1 \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x, e_n) = 1 \}$$

$$a_n = n$$

$$B_a = \{ x \in \ell_+^1 \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 1 \}$$

$$a_n = n \qquad x_n = \frac{1}{n}$$

$$w = \# N$$

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t) \overbrace{y(t) dt}^{\overset{y(t) c' \lambda(t)}{\shortparallel}}$$

συναρτηση συχνοτητας πιθανοτητας

$y(t) > 0$

$a_n > 0$ συναρτηση πιθανοτητας

$y(t) > 0 \qquad \int_0^1 y(t) dt = 1$

Ισότητες εσωτερικού γινομένου μιας μεταβλητής

$y(t)=1 \quad \int_0^1 x(t)\,1\,dt = 1$

$\|x\|_\infty = \sup$

$\|x\|_\infty = \max\{|x(t)| \mid t\in[0,1]\}$

$\int_0^1 x(t)\cdot 1\,dt = 1$

Υπάρχει θετικός αριθμός τ.ω: $\int_0^1 x(t)\cdot 1\,dt \leq A$;

26-04-23

Μαθημα 9ο

Ειδικα Θεματα Πιθ και Στατ ΙΙ

$\underline{o} = \{1, \dots, m\}$

$P = (P(1), \dots, P(m))$

$X = \begin{bmatrix} P_1, \dots, P_n \end{bmatrix}_{m \times n} \qquad P_i \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{array}{c} s=1 \\ s=2 \\ s=3 \\ s=4 \\ s=5 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = X \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$y = m = 5$

$b(3) = b(2) = b(5) = (1/3, 1/3, 1/3) = P_2$

$P_1 = b(1) = (1/4, 1/4, 1/2)$

$P_3 = b(4) = (1/2, 1/3, 1/6)$

$$A = [P_1, P_2, P_3] = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R^5 Sublattice linear regression

$X = (1, 1, 2, -3, 4)$

$$X = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \underbrace{\boxed{\varepsilon(x)}}^{\neq 0} \in R^5$$

$$R^2(x) = \sum_{s=1}^{5} \varepsilon^2(x)(s)\, p(s) \qquad \frac{R^2(x)}{5-3+1}$$

$$|y(s)| \leq (t_1 p_1 + t_2 p_2 + t_3 p_3)(s)$$

03 - 05 - 23

Μαθημα 10ο

Ειδικα Θεματα ΠΚΘ
και ΕΠΑΤ II

Να προσδιοριστει ιδεωδες διαστασης 2 στον R^4 που να παραγεται απο ενα (η δυο) διανυσματα, αν ο R^4 ειναι εφοδιασμενος με την κατα σημειο/συντεταγμενη μερικη διαταξη

$\cdot\, x \geq y \iff y_i \geq x_i, \ \forall i = 1, \dots, 4$

$I(z,t) := \{ y \in R^4 \,/\, |y| \leq \lambda_1 z + \lambda_2 t, \ \lambda_1, \lambda_2 \in R_+ \}$

$t, z \in R^4_+$

$I(z_1) = \{ y \in R^4 \,/\, |y| \leq \lambda \cdot z, \ \lambda \in R_+ \}$

$t, z \in R^4_+$ καθοια $\underbrace{z_i, z_j}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

Εστω $z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$R^4 = I(z_1) \oplus (M = I(z_1)^d)$

$z_1 \perp z_2 \iff |z_1| \wedge |z_2| = 0$

$z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|z_1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|z_2| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1

Να προσδιοριστει η θετικη βαση του υποσυν
δεσμου που παραγουν τα

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_1^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2^+ = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$x_2^- = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = (P_1, P_2, P_3, P_4)$$

$$B(1) = (0, 0, 1) = P_1^T$$

$$B(2) = (1, 0, 1) = P_2^T$$

$$B(3) = (0, 1, 0) = P_3^T$$

$$B(4) = (2/5, 2/5, 1/5) = P_4^T$$

4x3 4x4 4x3

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}^T = D^{-1} \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_1^- \\ x_2^+ \end{pmatrix}^T$$

Να εξετασθει αν ο υποχωρος του χωρου των συνεχων συναρτησεων $C[0,1]$ (με πεδιο ορισμου το $[0,1]$) ο οποιο παραγεται απο τις συναρτησεις $\{1, ημx, συνx, ημ2x, συν2x, \dots\}$ ειναι υποσυνδεσμος του $C[0,1]$ (ως προς τη μερικη διαταξη $z(x) \geq y(x) \Leftrightarrow z \geq y, \forall x \in [0,1]$)

Εστω οτι ο υποχωρος αυτος ειναι υποσυνδεσμος. Τοτε για καθε z, y που ανηκουν σε αυτον να ισχυει οτι $z \vee y \in X$ οπου X ειναι ο υποχωρος αυτος. Εστω $z(x) = ημx$, $y(x) = συνx$. Τοτε το $(z \vee y)(x) = \dots +$ παρατηρουμε οτι δεν υπαρχει καποιο $f(x) \in X$ τ.ω. $(z \vee y)(x) = f(x)$

Εστω $y(x) = συνx$, $x \in [0,1]$

Η $y(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$

$I(y) = \{ z \in C[0,1] \mid |z| \leq \lambda y$, για καποιο $\lambda \in \mathbb{R}_+ \}$

$x = \lambda(1 + x^2)$

15-05-23

Μάθημα 11ο

Ειδικά Θέματα ΠΙΘ
και Στατ II

Πρόταση: Έστω E: διανυσματικός σύνδεσμος και I: ιδεώδες του E, που παράγεται από κάποιο $e \in E \setminus \{0\}$

Τότε το I είναι υποσύνδεσμος του E

Απόδειξη: Εφ' όσον το I παράγεται από το e, τότε $I = I_e$ όπου $I_e = \{x \in E \;/\; |x| \leq \lambda \cdot e,$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}_+\}$

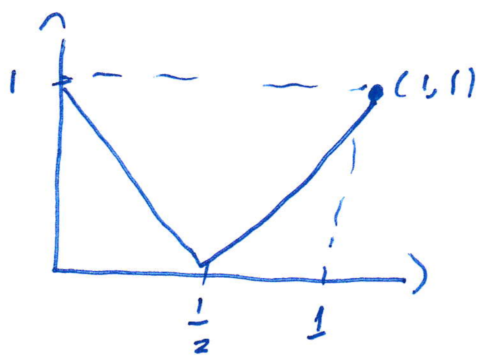
Έστω $x, y \in I_e$. Για να δείξουμε ότι το I_e είναι υποσύνδεσμοι του E, αρκεί ν.δ.ο $x \vee y, \; x \wedge y \in I_e$

Αφού $x, y \in I_e$, τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ τ.ω $x \leq |x| \leq \lambda_1 e$ και $y \leq |y| \leq \lambda_2 e \Rightarrow x \vee y \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\} e$

Αφού $|x| \leq \lambda_1 e \Rightarrow -x \leq |x| \leq \lambda_1 e \quad (1)$

και $\quad -y \leq |y| \leq \lambda_2 e \quad (2)$

όμως $x \wedge y = -(-x) \vee (-y) \leq -|x| \vee |y| \leq |x| \vee |y| \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\} \cdot e$



(Ιδιότητα διάσπασης του Riesz)

Θ. Έστω E: διανυσματικός σύνδεσμος και

x, y_i, $i=1,\dots,k$ $k\in\mathbb{N}$ είναι στοιχεία του E

(Τα $y_i \in E_+$, $i=1,\dots,k$). Τότε αν $|x| \le \sum_{i=1}^{k} y_i$, τότε υπάρχουν $x_i \in E$, $i=1,\dots,k$ τ.ω $x=\sum_{i=1}^{k} x_i$ και $0 \le x_i \le y_i$ $\forall$ $i=1,\dots,k$

17-05-23

Μάθημα 12ο

Ειδικά Θέματα ΠΙΘ και ΣΤΑΤ ΙΙ

Συναρτησιακή Πολυμεταβλητή Ανάλυση Δεδομένων

Συναρτησιακή Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών

Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών σε πεπερασμένη διάσταση

$$X = \begin{array}{c} \\ m \end{array}\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & n \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$n >> m$ $\quad X^2 X$

$$\underbrace{m\times n \quad n\times m}_{m\times m}$$

<u>Πρόταση</u>: Ο $\overset{m\times n}{X^T}\overset{n\times m}{X}$ έχει θετικές ιδιοτιμές

<u>Απόδειξη</u>: Έστω λ ιδιοτιμή του X^TX

Έστω $z(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ ιδιοδιανύσματα του X^TX δηλ.

$$X^TX\cdot z(\lambda) = \lambda\cdot z(\lambda) \Rightarrow z^T(\lambda)X^Tz(\lambda) = \lambda z(\lambda)^T\cdot z(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \langle X z(\lambda), \overbrace{\underset{m\times n}{X}\cdot \underset{n\times 1}{z(\lambda)}}^{t(\lambda)}\rangle = \sum_{i=1}^{m} t_i^2(\lambda) = \lambda\sum_{j=1}^{n} z_j^2(\lambda)$$

$\lambda(1) > \ldots > \lambda(m) > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda(i) > 0$ και η

"βαρύτητα" - "σημαντικότητα" κάθε ιδιοδιανύσματος $z(\lambda(i))$ δίνεται από το πηλίκο $\frac{\lambda(i)}{\sum_{i=1}^{n} \lambda(i)}$

<u>Ερώτημα</u>: Είναι ο $X^T X$ η προβολή μιας γραμμικής απεικόνισης $T: \ell^2 \to \ell^2$

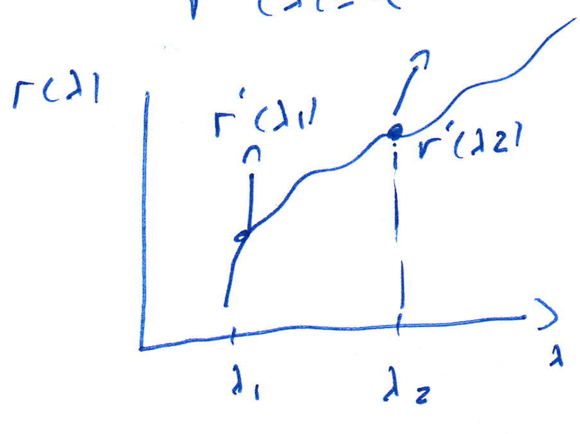
$\ell^2 = \{ (a_i)_{i \in N}$ με $a_i \in R \mid \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ συγκλίνει $\}$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad X^T X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

R^m $\theta \in R$ $(r_1(\lambda), \ldots, r_m(\lambda))$

$r'(\lambda) = (r_1'(\lambda), \ldots, r_m'(\lambda))$

$r'(\lambda) = a$



$r'(\lambda_1) = a_1$

$r(\lambda) - r(\lambda_1) = a_1(\lambda - \lambda_1)$

$\lambda_0 \simeq \lambda_1 = a_1(\lambda_0 - \lambda_1) + \varepsilon$

$X^T X$

$\frac{\lambda(i)}{\sum \lambda(i)}$ $z(\lambda_i)$

Δηλώνω ότι εξεταστικά κατά τη διάρκεια του μαθήματος

24-05-23 **Μαθημα 13ο**

Ειδικα Θεματα ΠιΘ

και Στατ II

Ασκηση : (**Multi-sos!**)

Εστω τα διανυσματα του R^5:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) Να προσδιοριστει το ιδεωδες I που παραγεται απο τα X_1, X_2

ii) Να προσδιοριστει το ορθογωνιο συμπληρωμα I^d συμφωνα με τη διασπαση $R^5 = I \oplus I^d$

Απαντηση: Το I συμπιπτει με τον υποσυνδεσμο που παραγουν τα X_1, X_2 συμφωνα με την ιδιοτητα διασπασης του Riesz

Αρκει επομενως να προσδιοριστει μια θετικη βαση του I (του 5).

Παρατηρούμε ότι τα $x_1^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1^- = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = x_2^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι θετικά και γραμμικώς ανεξάρτητα

Επομένως, η θετική βάση του S είναι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των $supp(x_1^+)$, $supp(x_1^-)$, $supp(x_2)$

↑ support

$supp(x) = \{ i \in \{1,2,3,4,5\} / x_i > 0 \}$

αν $x \in \mathbb{R}_+^5$

$supp(x_1^+) = \{2\}$, $supp(x_1^-) = \{1\}$

$supp(x_2) = \{3\}$. Συνεπώς ο S (και το I) έχει ως θετική βάση

τα $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) Το $I^d = \{ x \in \mathbb{R}^5 \,/\, |x| \cap |y| = 0, \ \forall\, y \in I \}$

Η θετική βάση του I^d είναι τα

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iii) Τι εκφράζουν τα I, I^d σχετιζόμενα με ένα μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης με 5 παρατηρήσεις

<u>Απάντηση</u> (<u>Σιαχαλαξιακό S.O.S</u> !)

$$5 = 3 + 2 = \underset{\underset{3}{\parallel}}{\dim(I)} + \underset{\underset{2}{\parallel}}{\dim(I^d)}$$

Το R^2 είναι το πολύ $\frac{3}{5} = 60\%$